Università degli Studi di Udine | Anno Accademico 2012/2013

Facoltà di Scienze Matematiche, Fisiche e Naturali
Corso di Laurea in Matematica

Equazioni Differenziali

Appello Straordinario del 18 aprile 2013

N.B.: scrivere nome, cognome e numero di matricola su ogni foglio consegnato. È ammesso l'utilizzo degli appunti del corso. Tempo a disposizione: 3 ore

1 Dato il sistema planare

$$\begin{cases} x' = 3y - 2x^2 - 1 \\ y' = 2xy - 2x, \end{cases}$$

a) studiare l'esistenza e l'unicità locale per i relativi problemi di Cauchy e trovare gli eventuali equilibri del sistema. Valgono le ipotesi dei teoremi di esistenza globale? Rappresentare indicativamente la direzione del campo vettoriale nelle varie sottoregioni del piano;

b) dimostrare che se $(x(t), y(t))$ è soluzione, anche $(-x(-t), y(-t))$ è soluzione;

c) verificare che la retta $\mathcal{R}$ di equazione $y = 1$ è un insieme invariante per il sistema, ovvero che ogni soluzione con dato iniziale su tale retta ha orbita ivi tutta contenuta. Trovare esplicitamente tali soluzioni e determinare il loro intervallo massimale di esistenza;

d) verificare che anche l'insieme $\mathcal{P} = \{(x, y) : y = x^2\}$ è invariante. Trovare esplicitamente le soluzioni con orbita ivi contenuta e determinare il loro intervallo massimale di esistenza;

e) dedurre da c) e d) che la regione di piano $\mathcal{A} = \{(x, y) : x^2 \leq y \leq 1\}$ è un insieme invariante in futuro e passato; dimostrare che tutte le soluzioni con dati iniziali $(x_0, y_0) \in \mathcal{A}$ sono globalmente definite.

Detta ora $\omega(x, y)$ la 1-forma differenziale associata al sistema:

f) dopo avere verificato che ω non è esatta in $\mathbb{R}^2$, calcolare un fattore integrante λ e utilizzarlo per trovare un integrale primo $F(x, y)$ del sistema;

g) studiare gli insiemi F_c di livello c di $F(x, y)$ per provare che tutte le orbite contenute all'interno di $\mathcal{A}$ sono periodiche;

h) dimostrare che tutte le altre soluzioni diverse da quelle di c), d), g) esplodono in tempo finito in passato e/o futuro.

i) Trovare una formula integrale per il periodo delle soluzioni periodiche in dipendenza da c (Suggerimento: cercare un'equazione differenziale scalare soddisfatta dalla componente $y(t)$ della soluzione). Calcolare esplicitamente una stima per difetto del periodo nel caso $c = 6^2/7^3$;

j) detto T_n il periodo della soluzione con dato iniziale $(x_0, y_0) = (0, 1/n)$, $n \geq 4$, dimostrare che $\lim_{n\to+\infty} T_n = +\infty$. Perché ciò doveva essere atteso?

2 Sia data l'equazione del secondo ordine $y'' = g(t, y)$ dove $g(t, y)$ è un polinomio non costante. Dimostrare che ogni polinomio $p(t, y)$ di primo grado, non costante in y, e che divide g dà origine a una soluzione dell'equazione. Quale? Che tipo di soluzioni si ottengono in questo modo se $g = g(y)$ dipende solo da y?

Punteggi indicativi: 4+2+6+4+3+6+8+10+10+5, 5