

Facoltà di Scienze Matematiche, Fisiche e Naturali
Corso di Laurea in Matematica
EQUAZIONI DIFFERENZIALI

Appello del 20 febbraio 2013

N.B.: scrivere nome, cognome e numero di matricola su ogni foglio consegnato. È ammesso l'utilizzo degli appunti del corso. Tempo a disposizione: 3 ore

1 Dato il sistema planare

$$\begin{cases} x' = 3xy + x^2 - 2 \\ y' = -3xy - y^2 + 2, \end{cases}$$

- studiare l'esistenza e l'unicità locale per i relativi problemi di Cauchy e trovare gli eventuali equilibri del sistema. Valgono le ipotesi dei teoremi di esistenza globale?
- Verificare che la retta di equazione $x + y = 0$ è un insieme invariante per il sistema, ovvero che ogni soluzione con dato iniziale su tale retta, ha orbita tutta contenuta in tale retta. Ci si aspetta un analogo risultato per la generica retta $x + y = c$ con $c \neq 0$?

Detta ora $\omega(x, y)$ la 1-forma differenziale associata al sistema:

- dopo avere verificato che ω non è esatta in $\mathbb{R}^2$ e che non esistono fattori integranti del tipo $\lambda = \lambda(x)$ oppure $\lambda = \lambda(y)$, calcolare un fattore integrante $\lambda = \lambda(x, y)$ e utilizzarlo per trovare una primitiva di $\lambda\omega$;
- detta $F(x, y)$ la primitiva tale che $F(0, 0) = 0$, verificare che il relativo insieme di livello 0 è unione di una conica irriducibile e di una conica doppiamente degenera. Calcolare esplicitamente tutte le soluzioni con dato iniziale (x_0, y_0) tale che $F(x_0, y_0) = 0$ e verificare che non sono globalmente definite né in futuro né in passato. Calcolare anche l'intervallo massimale di esistenza e studiare il loro comportamento agli estremi;
- rappresentare indicativamente la direzione del campo vettoriale al fine di studiare l'esistenza globale delle soluzioni. Provare ad argomentare perché in generale non ci si aspetta di averla. Esistono comunque soluzioni globalmente definite in futuro/passato?

2 Dato un sistema lineare della forma

$$y' = Ay + e^{\gamma t}v, \quad (1)$$

con $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $v \in \mathbb{R}^n$ e $\gamma \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ fissati,

- verificare che se $\gamma \notin \text{Sp}(A)$ (spettro di A) allora esiste una soluzione della forma $\bar{y}(t) = e^{\gamma t}w$ per un opportuno $w \in \mathbb{R}^n$. Dimostrare che se $\gamma \in \text{Sp}(A)$ non ci si aspetta che il risultato valga; in questo caso caratterizzare algebricamente tutti i vettori v per cui $\bar{y}$ è soluzione;
- nel caso in cui (1) è il sistema associato all'equazione lineare di ordine n

$$z^{(n)} + a_{n-1}z^{(n-1)} + \dots + a_1z' + a_0z = e^{\gamma t}c, \quad (2)$$

con $c \in \mathbb{R}$, $c \neq 0$, dimostrare che se γ è uno zero del polinomio caratteristico associato, allora esiste una soluzione dell'equazione (2) della forma $z(t) = at^pe^{\gamma t}$, per qualche $a \in \mathbb{R}$, dove p è la molteplicità algebrica di γ come radice. (Suggerimento: provare a trasformare il relativo sistema $n \times n$ in un sistema omogeneo $(n+1) \times (n+1)$.)

- Calcolare la soluzione del problema di Cauchy associato a (1) con dati $y(0) = (3, 2)$ dove

$$A := \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -3 & -5 \end{pmatrix}, \quad v = \begin{pmatrix} 2 \\ -10 \end{pmatrix}, \quad \gamma = 2.$$

3 È noto che se l'orbita di un sistema planare autonomo con campo vettoriale di classe C^1 è contenuta in una curva chiusa semplice priva di punti di equilibrio allora l'orbita è periodica. È ancora vero se il sistema non è autonomo? In caso affermativo provarlo, altrimenti fornire un controesempio.