



Facoltà di Scienze Matematiche, Fisiche e Naturali
Corso di Laurea in Matematica

EQUAZIONI DIFFERENZIALI

Appello del 5 febbraio 2013

N.B.: scrivere nome, cognome e numero di matricola su ogni foglio consegnato. È ammesso l'utilizzo degli appunti del corso. Tempo a disposizione: 3 ore

1 Data l'equazione differenziale

$$\frac{dy}{dt} = \frac{t}{t^2 - 2y + 1} \quad (1)$$

- a) determinare il dominio di definizione e verificare che si hanno esistenza e unicità locale per le soluzioni del problema di Cauchy associato. Valgono le ipotesi dei teoremi di esistenza globale?

Detta $\omega(t, y)$ la 1-forma differenziale associata all'equazione:

- b) verificare che ω non è una forma esatta in $\mathbb{R}^2$; calcolare un fattore integrante λ e utilizzarlo per trovare una primitiva $F(t, y)$ di $\lambda\omega$;
- c) disegnare le curve F_c di livello c di $F(t, y)$; utilizzarle per studiare gli intervalli massimali di esistenza delle relative soluzioni massimali e il loro comportamento agli estremi. Esistono orbite periodiche? Esistono orbite limitate ma non periodiche?
- d) trovare esplicitamente l'intervallo massimale di esistenza della soluzione in dipendenza dai dati iniziali $y(t_0) = y_0$;
- e) verificare che il cambio di variabili $w = t^2 - 2y$ trasforma (1) in un'equazione a variabili separabili. Risolvere tale equazione e riottenere la formula chiusa per le soluzioni di (1);
- f) trovare l'andamento asintotico delle eventuali soluzioni globalmente definite;
- g) provare che, mediante uno stratagemma, è possibile ricondurre (1) a un'equazione di Bernoulli. Risolverla per ottenere il medesimo risultato di c).

2 Data la matrice

$$A := \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

- a) verificare che A si può decomporre nella somma di una matrice diagonale D e di una triangolare superiore nilpotente N . Calcolare l'indice di nilpotenza di N per poi, sfruttando i risultati sui sistemi lineari di equazioni differenziali, dimostrare *senza fare ulteriori calcoli* che D e N non possono commutare;
- b) calcolare la matrice fondamentale e^{tA} e utilizzarla per trovare esplicitamente la soluzione y del problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' = Ay + b \\ y(1) = y_1 \end{cases}$$

con $y_1 = (-1, 0, 3)$, $b = (-2, -1, 1)$.