Università degli Studi di Udine — Anno Accademico 2012/2013

Facoltà di Scienze Matematiche, Fisiche e Naturali
Corso di Laurea in Matematica

Equazioni Differenziali

Appello del 5 febbraio 2013

N.B.: scrivere nome, cognome e numero di matricola su ogni foglio consegnato. È ammesso l'utilizzo degli appunti del corso. Tempo a disposizione: 3 ore

1 Data l'equazione differenziale

$$\frac{dy}{dt} = \frac{t}{t^2 - 2y + 1} \tag{1}$$

a) determinare il dominio di definizione e verificare che si hanno esistenza e unicità locale per le soluzioni del problema di Cauchy associato. Valgono le ipotesi dei teoremi di esistenza globale?

Detta $\omega(t, y)$ la 1-forma differenziale associata all'equazione:

b) verificare che ω non è una forma esatta in $\mathbb{R}^2$; calcolare un fattore integrante λ e utilizzarlo per trovare una primitiva $F(t, y)$ di $\lambda\omega$;

c) disegnare le curve F_c di livello c di $F(t, y)$; utilizzarle per studiare gli intervalli massimali di esistenza delle relative soluzioni massimali e il loro comportamento agli estremi. Esistono orbite periodiche? Esistono orbite limitate ma non periodiche?

d) trovare esplicitamente l'intervallo massimale di esistenza della soluzione in dipendenza dai dati iniziali $y(t_0) = y_0$;

e) verificare che il cambio di variabili $w = t^2 - 2y$ trasforma (1) in un'equazione a variabili separabili. Risolvere tale equazione e riottenere la formula chiusa per le soluzioni di (1);

f) trovare l'andamento asintotico delle eventuali soluzioni globalmente definite;

g) provare che, mediante uno stratagemma, è possibile ricondurre (1) a un'equazione di Bernoulli. Risolverla per ottenere il medesimo risultato di c).

2 Data la matrice

$$A := \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

a) verificare che A si può decomporre nella somma di una matrice diagonale D e di una triangolare superiore nilpotente N. Calcolare l'indice di nilpotenza di N per poi, sfruttando i risultati sui sistemi lineari di equazioni differenziali, dimostrare *senza fare ulteriori calcoli* che D e N non possono commutare;

b) calcolare la matrice fondamentale e^{tA} e utilizzarla per trovare esplicitamente la soluzione y del problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' = Ay + b \\ y(1) = y_1 \end{cases}$$

con $y_1 = (-1, 0, 3)$, $b = (-2, -1, 1)$.

Punteggi indicativi: 2+6+6+2+4+10+5, 2+10

Appello del 20 febbraio 2013

$\boxed{\mathbf{1}}$ Dato il sistema planare

$$\begin{cases} x' = 3xy + x^2 - 2 \\ y' = -3xy - y^2 + 2, \end{cases}$$

a) studiare l'esistenza e l'unicità locale per i relativi problemi di Cauchy e trovare gli eventuali equilibri del sistema. Valgono le ipotesi dei teoremi di esistenza globale?

b) Verificare che la retta di equazione $x + y = 0$ è un insieme invariante per il sistema, ovvero che ogni soluzione con dato iniziale su tale retta, ha orbita tutta contenuta in tale retta. Ci si aspetta un analogo risultato per la generica retta $x + y = c$ con $c \neq 0$?

Detta ora $\omega(x, y)$ la 1-forma differenziale associata al sistema:

c) dopo avere verificato che ω non è esatta in $\mathbb{R}^2$ e che non esistono fattori integranti del tipo $\lambda = \lambda(x)$ oppure $\lambda = \lambda(y)$, calcolare un fattore integrante $\lambda = \lambda(x, y)$ e utilizzarlo per trovare una primitiva di $\lambda\omega$;

d) detta $F(x, y)$ la primitiva tale che $F(0, 0) = 0$, verificare che il relativo insieme di livello 0 è unione di una conica irriducibile e di una conica doppiamente degenere. Calcolare esplicitamente tutte le soluzioni con dato iniziale (x_0, y_0) tale che $F(x_0, y_0) = 0$ e verificare che non sono globalmente definite né in futuro né in passato. Calcolare anche l'intervallo massimale di esistenza e studiare il loro comportamento agli estremi;

e) rappresentare indicativamente la direzione del campo vettoriale al fine di studiare l'esistenza globale delle soluzioni. Provare ad argomentare perché in generale non ci si aspetta di averla. Esistono comunque soluzioni globalmente definite in futuro/passato?

$\boxed{\mathbf{2}}$ Dato un sistema lineare della forma

$$y' = Ay + e^{\gamma t} v, \tag{2}$$

con $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $v \in \mathbb{R}^n$ e $\gamma \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ fissati,

a) verificare che se $\gamma \notin \mathrm{Sp}(A)$ (spettro di A) allora esiste una soluzione della forma $\bar{y}(t) = e^{\gamma t} w$ per un opportuno $w \in \mathbb{R}^n$. Dimostrare che se $\gamma \in \mathrm{Sp}(A)$ non ci si aspetta che il risultato valga; in questo caso caratterizzare algebricamente tutti i vettori v per cui $\bar{y}$ è soluzione;

b) nel caso in cui (2) è il sistema associato all'equazione lineare di ordine n

$$z^{(n)} + a_{n-1} z^{(n-1)} + \ldots + a_1 z' + a_0 z = e^{\gamma t} c, \tag{3}$$

con $c \in \mathbb{R}$, $c \neq 0$, dimostrare che se γ è uno zero del polinomio caratteristico associato, allora esiste una soluzione dell'equazione (3) della forma $\bar{z}(t) = a t^p e^{\gamma t}$, per qualche $a \in \mathbb{R}$, dove p è la molteplicità algebrica di γ come radice. (Suggerimento: provare a trasformare il relativo sistema $n \times n$ in un sistema omogeneo $(n + 1) \times (n + 1)$.)

c) Calcolare la soluzione del problema di Cauchy associato a (2) con dati $y(0) = (3, 2)$ dove

$$A := \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -3 & -5 \end{pmatrix}, \qquad v = \begin{pmatrix} 2 \\ -10 \end{pmatrix}, \qquad \gamma = 2.$$

$\boxed{\mathbf{3}}$ È noto che se l'orbita di un sistema planare autonomo con campo vettoriale di classe C^1 è contenuta in una curva chiusa semplice priva di punti di equilibrio allora l'orbita è periodica. È ancora vero se il sistema non è autonomo? In caso affermativo provarlo, altrimenti fornire un controesempio.

Punteggi indicativi: 3+4+8+6+10, 4+8+7, 5

Appello straordinario del 18 aprile 2013

1 Dato il sistema planare

$$\begin{cases} x' = 3y - 2x^2 - 1 \\ y' = 2xy - 2x, \end{cases}$$

a) studiare l'esistenza e l'unicità locale per i relativi problemi di Cauchy e trovare gli eventuali equilibri del sistema. Valgono le ipotesi dei teoremi di esistenza globale? Rappresentare indicativamente la direzione del campo vettoriale nelle varie sottoregioni del piano;

b) dimostrare che se $(x(t), y(t))$ è soluzione, anche $(-x(-t), y(-t))$ è soluzione;

c) verificare che la retta $\mathcal{R}$ di equazione $y = 1$ è un insieme invariante per il sistema, ovvero che ogni soluzione con dato iniziale su tale retta ha orbita ivi tutta contenuta. Trovare esplicitamente tali soluzioni e determinare il loro intervallo massimale di esistenza;

d) verificare che anche l'insieme $\mathcal{P} = \{(x, y) : y = x^2\}$ è invariante. Trovare esplicitamente le soluzioni con orbita ivi contenuta e determinare il loro intervallo massimale di esistenza;

e) dedurre da c) e d) che la regione di piano $\mathcal{A} = \{(x, y) : x^2 \leq y \leq 1\}$ è un insieme invariante in futuro e passato; dimostrare che tutte le soluzioni con dati iniziali $(x_0, y_0) \in \mathcal{A}$ sono globalmente definite.

Detta ora $\omega(x, y)$ la 1-forma differenziale associata al sistema:

f) dopo avere verificato che ω non è esatta in $\mathbb{R}^2$, calcolare un fattore integrante λ e utilizzarlo per trovare un integrale primo $F(x, y)$ del sistema;

g) studiare gli insiemi F_c di livello c di $F(x, y)$ per provare che tutte le orbite contenute all'interno di $\mathcal{A}$ sono periodiche;

h) dimostrare che tutte le altre soluzioni diverse da quelle di c), d), g) esplodono in tempo finito in passato e/o futuro.

i) Trovare una formula integrale per il periodo delle soluzioni periodiche in dipendenza da c (Suggerimento: cercare un'equazione differenziale scalare soddisfatta dalla componente $y(t)$ della soluzione). Calcolare esplicitamente una stima per difetto del periodo nel caso $c = 6^2/7^3$;

j) detto T_n il periodo della soluzione con dato iniziale $(x_0, y_0) = (0, 1/n)$, $n \geq 4$, dimostrare che $\lim_{n\to+\infty} T_n = +\infty$. Perché ciò doveva essere atteso?

2 Sia data l'equazione del secondo ordine $y'' = g(t, y)$ dove $g(t, y)$ è un polinomio non costante. Dimostrare che ogni polinomio $p(t, y)$ di primo grado, non costante in y, e che divide g dà origine a una soluzione dell'equazione. Quale? Che tipo di soluzioni si ottengono in questo modo se $g = g(y)$ dipende solo da y?

Punteggi indicativi: 4+2+6+4+3+6+8+10+10+5, 5

Appello del 1 luglio 2013

1 Dato il sistema di equazioni differenziali

$$\begin{cases} x' = -yz^2 \\ y' = x(x^2 + y^2 + z^2) \\ z' = xyz \end{cases}$$

a) studiare l'esistenza e l'unicità locale delle soluzioni e individuare gli equilibri del sistema. Valgono anche le ipotesi dei teoremi di esistenza globale?

b) Dimostrare che se $(x(t), y(t), z(t))$ è soluzione, $(x(-t), -y(-t), \pm z(-t))$ e $(-x(t), -y(t), \pm z(t))$ sono ancora soluzioni;

c) verificare che le due funzioni $E_1(x, y, z) = \frac{z^2}{x^2+y^2}$ e $E_2(x, y, z) = x^2 + z^2$, ove definite, sono integrali primi del sistema. Dare l'interpretazione geometrica degli insiemi di livello di E_1 e E_2 e dire se sono insiemi limitati oppure no;

d) utilizzare il punto precedente per studiare l'intervallo massimale di esistenza delle soluzioni e la loro eventuale esistenza globale;

e) dimostrare che tutte le orbite non banali o sono rettilinee oppure sono periodiche; nel primo caso calcolare esplicitamente le soluzioni e determinare il loro intervallo massimale di esistenza;

f) calcolare il periodo di oscillazione della soluzione relativa al dato iniziale $(1, 0, 1)$. (Suggerimento: trovare un'equazione differenziale scalare per la componente $x(t)$ della soluzione, poi utilizzare opportunamente il metodo di separazione delle variabili e la sostituzione $s = x/\sqrt{2(1-x^2)}$.)

2 Data il problema di Cauchy $y' = 2\sqrt{|y|}$, $y(0) = y_0$, calcolare le soluzioni $y(t)$ strettamente positive con i seguenti due metodi

a) operare la sostituzione $y = z^2$, trovare un'equazione per z e integrarla; oppure

b) dopo aver dimostrato che $y \in C^2$, differenziare l'equazione per ottenere una nuovo problema di Cauchy per un'equazione di ordine 2. Integrare quest'ultima due volte per ottenere la soluzione.

Giustificare la validità delle argomentazioni utilizzate in a)-b).

3 Trovare la generica soluzione dell'equazione $y' = Ay$ dove

$$A := \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -2 & -3 & 2 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Punteggi indicativi: 3+3+5+5+7+9, 2+4, 5

Appello del 18 luglio 2013

1 Data l'equazione differenziale

$$y' = \frac{\ln(ty)}{t^2}$$

a) studiare l'esistenza e l'unicità locale delle soluzioni nel dominio $\Omega = \{(t, y) : \ t, y > 0\}$. Verificare che non valgono le ipotesi dei teoremi di esistenza globale. Trovare le eventuali soluzioni costanti, le regioni dove le soluzioni sono crescenti/decrescenti e rappresentarle nel piano $t - y$;

b) dimostrare che esiste un unico $\bar{y} \in]0, 1[$ tale che la funzione $\bar{y}(t) = \bar{y}/t$ è soluzione dell'equazione;

c) provare che tutte le soluzioni sono globalmente definite in passato e studiare il loro comportamento per $t \to \alpha^+$;

d) fissato ora il dato iniziale $y(1) = y_1 > \bar{y}$, provare che la relativa soluzione è globalmente definita in futuro. Cosa si può dire se $y_1 < \bar{y}$? Esistono soluzioni non globalmente definite in futuro?

e) Nel caso $y_1 > \bar{y}$, dimostrare che $\lim_{t\to+\infty} y(t)$ esiste finito (Suggerimento: dimostrare che definitivamente $y(t) \leq ct$ per qualche $c > 0$ e utilizzare questa disuguaglianza nell'equazione differenziale per ottenere la tesi).

f) Operare un opportuno cambiamento di variabile e integrare l'equazione ottenuta al fine di calcolare una forma chiusa per la generica soluzione. Utilizzare quest'ultima per studiare l'intervallo massimale d'esistenza $]\alpha, \beta[$ e il comportamento agli estremi α, β.

(Suggerimento: in c-d-e) potrebbe risultare utile applicare il teorema del confronto a opportune sopra/sottosoluzioni.)

2 Data l'equazione differenziale

$$y'' + a(t)y' + b(t)y = 0$$

dove $a, b \in C^1(I)$ e $I \subseteq]0, +\infty[$ è un intervallo

a) discutere l'esistenza locale/globale e l'unicità delle soluzioni individuando anche l'intervallo massimale di esistenza;

b) determinare condizioni necessarie su a, b affinché l'equazione ammetta due soluzioni della forma $y_1(t)$ e $y_2(t) = t^2 y_1(t)$ con y_1 mai nulla; nel qual caso trovare anche l'espressione di y_1 in funzione di a e b (Suggerimento: imporre la condizione di essere soluzioni, trovare prima una formula per y_1 in funzione di a, b, poi imporre che y_1 sia soluzione per trovare una relazione che leghi a e b). Tali condizioni sono anche sufficienti?

c) Verificare che y_1 e y_2 sono linearmente indipendenti e utilizzare b) per risolvere esplicitamente il problema di Cauchy in $I =]0, +\infty[$

$$\begin{cases} 4t^2 y'' + 4t^2 y' + (t^2 - 3)y = 0 \\ y(1) = 3, \ y'(1) = 1. \end{cases} \tag{4}$$

d) Alternativamente, posto $z(t) = \sqrt{t}e^{t/2} y(t)$, trovare l'equazione differenziale di ordine 2 soddisfatta da z. Di che tipo di equazione si tratta? Risolverla per riottenere la soluzione di (4).

e) Fare l'analogo di d) ma con la trasformazione delle variabili sia dipendente che indipendente $(t, y(t)) \mapsto (s, v(s))$ dove $s = \ln t$ (cioè $t = e^s$) e $v(s) = \exp\big[(s + e^s)/2\big] y(e^s)$. Verificare che $v(s)$ soddisfa un'equazione differenziale lineare del secondo ordine a coefficienti costanti e risolverla per ottenere nuovamente la soluzione di (4).

Punteggi indicativi: 4+3+5+6+5+8, 2+9+3+6+6

Appello del 3 settembre 2013

1 Data l'equazione differenziale $y' = \dfrac{t^2 y - 1}{y^3}$

a) studiare l'esistenza e l'unicità locale delle soluzioni nel dominio $\Omega = \{(t, y) : \ y > 0\}$. Verificare che non valgono le ipotesi dei teoremi di esistenza globale. Trovare le eventuali soluzioni costanti, le regioni dove le soluzioni sono crescenti/decrescenti e rappresentarle nel piano $t - y$;

b) dimostrare che non esistono soluzioni massimali che esplodono all'infinito in tempo finito;

c) verificare che ogni soluzione massimale $y(t)$ è globalmente definita in passato e studiare l'esistenza e l'eventuale valore del limite di $y(t)$ per $t \to -\infty$;

d) provare che tutte le soluzioni con dati iniziali $y(t_0) = y_0$ dove $t_0 > 0$ e $y_0 \geq 1/t_0^2$ sono globalmente definite e monotone crescenti in futuro. Studiare il limite di $y(t)$ per $t \to +\infty$;

e) dimostrare che esistono soluzioni massimali $y :]-\infty, \beta[\to \mathbb{R}$ che non sono globalmente definite in futuro. Qual è eventualmente il valore del limite di $y(t)$ per $t \to \beta^-$?

f) Dimostrare che tutte le soluzioni globalmente definite in futuro sono sublineari;

g) provare che tutte le soluzioni $y(t)$ relative al punto d) verificano $\lim_{t\to+\infty}(y(t) - t) = 0$.

(Suggerimento: in alcuni punti potrebbe risultare utile applicare opportunamente il teorema del confronto)

2 Risolvere il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' = Ay \\ y(1) = (1, 2, 2) \end{cases}$$

dove

$$A := \begin{pmatrix} -1 & 0 & -1 \\ -2 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & -3 \end{pmatrix}$$

3 Data l'equazione del secondo ordine $y'' = g(y)$ con g funzione lipschitziana

a) verificare che i relativi problemi di Cauchy ammettono esistenza e unicità locale e che le funzioni costantemente uguali agli eventuali zeri di g sono soluzioni;

b) supposto che g abbia un unico zero $\overline{y}$, provare o confutare che se $y(t)$ è una soluzione con $y(t_0) \neq \overline{y}$ per qualche t_0 allora $y(t) \neq \overline{y}$ per ogni t di definizione.

Punteggi indicativi: 4+3+5+5+6+6+10, 8, 3+4