Università degli Studi di Udine — Anno Accademico 2012/2013

Corso di Laurea in Biotecnologie

Modulo di Matematica

Esame del 24/09/2013

N.B.: scrivere nome, cognome e numero di matricola su ogni foglio consegnato.
Tempo a disposizione: 2.5 ore

---

1 Se $\lim_{x\to x_0} f(x) = 0^+$ e $\lim_{x\to x_0} g(x) = -\infty$, allora $\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)}$ è

- A $-\infty$
- B $+\infty$
- C 0
- D non ci sono elementi sufficienti per rispondere

---

2 Se f è una funzione derivabile due volte in $]a,b[$ e tale che $f''(x) < 0$ per $x \in]a,b[$, allora

- A f è crescente in $[a,b]$
- B f è convessa in $[a,b]$
- C f è concava in $[a,b]$
- D f è decrescente in $[a,b]$

---

3 L'equazione differenziale $y' = \log t - e^t y \operatorname{sen} t$ è

- A un'equazione lineare del primo ordine
- B un'equazione lineare del secondo ordine
- C un'equazione non lineare del primo ordine
- D un'equazione non lineare del secondo ordine

---

4 La funzione $f(x) = \arccos x$

- A è definita in $\mathbb{R}$
- B è una funzione decrescente
- C è definita in $[0,\pi]$
- D è derivabile nel suo dominio

---

5 a) Scrivere la definizione di derivata di una funzione f in un punto x_0.

$\boxed{6}$ Rappresentare il grafico di una funzione g che verifichi contemporaneamente le seguenti proprietà:

$$\lim_{x\to-\infty} g(x) = +\infty \qquad \lim_{x\to1^-} g(x) = -\infty \qquad \lim_{x\to1^+} g(x) = -2 \qquad \lim_{x\to+\infty} g(x) = 1$$

$\boxed{7}$

a) Enunciare il Teorema di de L'Hôpital;

b) per ciascuno dei seguenti tre limiti

$$\lim_{x\to0} \frac{\operatorname{arcsen} x - \operatorname{sen}(2x - x^2)}{e^{2x} - \cos x}, \qquad \lim_{x\to+\infty} \frac{(1/2)^x - 5}{3^x + 4x + 1}, \qquad \lim_{x\to1} \frac{\operatorname{sen} x + (x-1)^2}{x^2 - 3x + 2},$$

determinare se è possibile applicare il teorema ed eventualmente calcolarne il valore.

$\boxed{8}$ Data la funzione

$$g(x) = \frac{x^3}{x^2 - 1}$$

a) determinarne il dominio $\mathcal{D}$;

b) studiare il segno di g;

c) calcolare i limiti agli estremi del dominio e determinare gli eventuali asintoti;

d) determinare gli intervalli in cui la funzione è crescente, quelli in cui è decrescente, e gli eventuali punti di massimo/minimo relativo;

e) determinare gli intervalli in cui la funzione è concava e quelli in cui è convessa;

f) disegnare un grafico approssimativo di g

$\boxed{9}$ Dato il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' = y(3 + \ln y)\cos t \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

a) dire se la funzione $y(t) = e^{3t}$ è soluzione del problema;

b) determinare una soluzione del problema nel caso in cui non lo sia la funzione di cui al punto precedente; oppure, alternativamente

b') calcolare i seguenti integrali

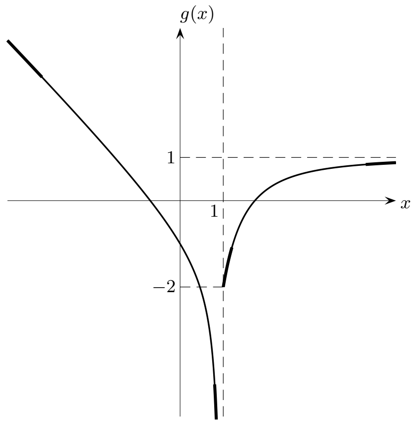
$$\int \left(\frac{4 - \sqrt{x}}{3x} + \frac{3}{4^x} \right) dx, \qquad \int_1^3 \frac{e^{3x}}{2 + e^{3x}}\, dx.$$

$\boxed{10}$ Calcolare il polinomio di Taylor di grado 2 di $f(x) = e^{2x}\cos x$ nel punto $x_0 = 0$.

Soluzioni dei quesiti dell'esame del 24 settembre 2013

$\boxed{1}$ C; $\boxed{2}$ C; $\boxed{3}$ A; $\boxed{4}$ B; $\boxed{5}$ consultare il libro di testo.

$\boxed{6}$ In neretto si evidenziano le informazioni date dai limiti. Il grafico della funzione è quindi completato a piacere (linea sottile), per esempio:



$\boxed{7}$ a) consultare il libro di testo; b) il primo limite è della forma $0/0$, il secondo $-5/+\infty$, il terzo $\operatorname{sen} 1/0$. Il teorema si può applicare solamente al primo limite, per il quale si ha

$$\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{arcsen} x - \operatorname{sen}(2x - x^2)}{\mathrm{e}^{2x} - \cos x} \overset{H}{=} \lim_{x\to 0} \frac{\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} - (2-2x)\cos(2x-x^2)}{2\mathrm{e}^{2x} + \operatorname{sen} x} = \frac{1-2}{2+0} = -\frac{1}{2}.$$

$\boxed{8}$ a) La funzione è definita per $x^2 - 1 \neq 0$, perciò il dominio è $\mathcal{D} = \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$ e la funzione (razionale) è ivi continua e derivabile. Osserviamo che g è funzione dispari, dunque potremmo limitarci a studiarne il grafico per gli $x \geq 0$ ottenendo il grafico relativo agli $x < 0$ per simmetria rispetto all'origine.

b) Il numeratore è positivo se $x \geq 0$, il denominatore è positivo se $x^2 - 1 > 0$ ovvero $x < -1$ oppure $x > 1$. In definitiva la funzione è positiva per $-1 < x < 0$ e $x > 1$, negativa per $x < -1$ e $0 < x < 1$. Si annulla in $x = 0$.

c) Ha senso andare a studiare i limiti in 1, in -1 ed a $\pm\infty$. Si ha

$$\lim_{x\to\pm\infty} g(x) = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{x}{1 - 1/x^2} = \left[\frac{\pm\infty}{1}\right] = \pm\infty,$$

$$\lim_{x\to 1^\pm} g(x) = \left[\frac{1}{0^\pm}\right] = \pm\infty, \qquad \lim_{x\to -1^\pm} g(x) = \left[\frac{-1}{0^\mp}\right] = \pm\infty,$$

quindi la funzione non ammette massimo né minimo. Asintoti: le rette di equazione $x = -1$ e $x = 1$ sono asintoti verticali. Per quanto riguarda quelli obliqui si ha

$$m = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{g(x)}{x} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{x^3}{x^3 - x} = 1, \quad q = \lim_{x\to\pm\infty} [g(x) - x] = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{x}{x^2-1} = 0,$$

dunque la retta di equazione $y = x$ è asintoto a $-\infty$ e a $+\infty$.

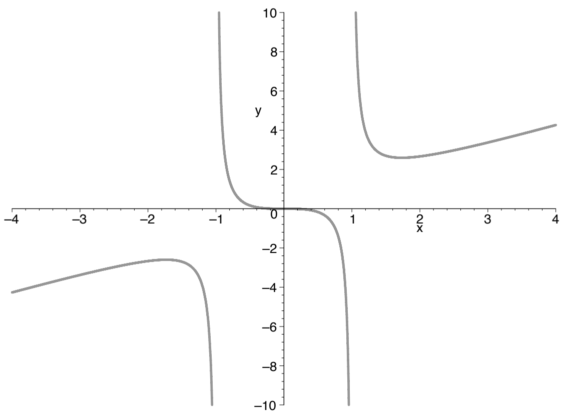
d) La derivata prima è

$$g'(x) = \frac{3x^2(x^2-1) - x^3 2x}{(x^2-1)^2} = \frac{x^4 - 3x^2}{(x^2-1)^2} = \frac{x^2(x^2-3)}{(x^2-1)^2}.$$

Il numeratore è positivo quando $x^2 - 3 > 0$ cioè se e solo se $x < -\sqrt{3}$ oppure $x > \sqrt{3}$, il denominatore è sempre positivo nel dominio. Inoltre la derivata si annulla in $x = 0$, $x = \pm\sqrt{3}$, quindi

$$g'(x) \begin{cases} < 0, & \text{se } x \in]-\sqrt{3}, -1[\cup]-1, 0[\cup]0, 1[\cup]1, \sqrt{3}[, \\ = 0, & \text{se } x = 0 \text{ oppure } x = -\sqrt{3} \text{ oppure } x = \sqrt{3}, \\ > 0, & \text{se } x \in]-\infty, -\sqrt{3}[\cup]\sqrt{3}, +\infty[, \end{cases}$$

perciò la funzione è crescente in $]-\infty, -\sqrt{3}[$ e in $]\sqrt{3}, +\infty[$, mentre è decrescente in $]-\sqrt{3}, -1[$, in $]-1, 1[$ e in $]1, \sqrt{3}[$. In $x = -\sqrt{3}$ e $x = \sqrt{3}$ ammette, rispettivamente, un massimo e un minimo relativo. In $x = 0$ la funzione ha un punto di flesso a tangente orizzontale.



e) La derivata seconda è

$$\begin{aligned} g''(x) &= \frac{(4x^3 - 6x)(x^2-1)^2 - (x^4 - 3x^2)2(x^2-1)2x}{(x^2-1)^4} \\ &= \frac{(4x^3 - 6x)(x^2-1) - (x^4 - 3x^2)4x}{(x^2-1)^3} = \frac{2x(x^2+3)}{(x^2-1)^3}. \end{aligned}$$

Il numeratore è positivo quando $x \geq 0$, il denominatore è positivo se $(x^2-1)^3 > 0$ cioè se e solo se $x^2 - 1 > 0$ ovvero se $x < -1$ oppure $x > 1$. In definitiva

$$g''(x) \begin{cases} < 0, & \text{se } x \in]-\infty, -1[\cup]0, 1[, \\ = 0, & \text{se } x = 0, \\ > 0, & \text{se } x \in]-1, 0[\cup]1, +\infty[, \end{cases}$$

perciò la funzione è concava in $]-\infty, -1[$ e in $]0, 1[$, mentre è convessa in $]-1, 0[$ e in $]1, +\infty[$. Come già osservato in precedenza, in $x = 0$ la funzione ha un punto di flesso a tangente orizzontale.

$\boxed{\mathbf{9}}$ a) Si ha $y'(t) = 3e^{3t}$. Sostituendo si ottiene l'equazione

$$3e^{3t} = e^{3t}(3 + \ln e^{3t}) \cos t,$$

che non è identicamente soddisfatta per $t \in \mathbb{R}$ (ad esempio, per $t = \pi/2$ si ottiene $3e^{3\pi/2} \neq 0$). La funzione non è dunque soluzione. Si osservi che la funzione soddisfa la seconda condizione $y(0) = 1$.

b) Scrivendo $y' = \frac{dy}{dt}$ e utilizzando il metodo di separazione delle variabili si ha

$$\frac{1}{y(3 + \ln y)}\, dy = \cos t\, dt \qquad \Longrightarrow \qquad \int \frac{1}{y(3 + \ln y)}\, dy = \int \cos t\, dt.$$

Ricordando che una primitiva del coseno è il seno e utilizzando le tabelle si ottiene

$$\int \frac{1}{y(3 + \ln y)}\, dy = \int \frac{(\ln y)'}{3 + \ln y}\, dy = \ln|3 + \ln y| \qquad \Longrightarrow \qquad \ln|3 + \ln y| = \operatorname{sen} t + c,$$

dove c è la generica costante d'integrazione. Osservando che dovrà essere $y(0) = 1$, si può supporre (almeno per i t vicini a 0) che $3 + \ln y(t) > 0$, perciò risolvendo in y si ottiene

$$3 + \ln y = e^{\operatorname{sen} t + c} \qquad \Longleftrightarrow \qquad y = \exp\left(e^{\operatorname{sen} t + c} - 3\right).$$

Imponendo la condizione $y(0) = 1$ si ottiene $3 = e^c$, da cui si ricava $c = \ln 3$. La soluzione è quindi

$$y(t) = \exp\left(3e^{\operatorname{sen} t} - 3\right).$$

Alternativamente, si poteva utilizzare direttamente la formula risolutiva per le equazioni a variabili separabili (insieme alla formula fondamentale del calcolo integrale)

$$\int_1^y \frac{1}{z(3 + \ln z)}\, dz = \int_0^t \cos s\, ds \qquad \Longrightarrow \qquad \Big[\ln|3 + \ln z|\Big]_1^y = \Big[\operatorname{sen} s\Big]_0^t$$

$$\Longrightarrow \qquad \ln|3 + \ln y| - \ln 3 = \operatorname{sen} t,$$

che risolta rispetto a y fornisce la soluzione cercata.

c) Dalle tabelle si ottiene

$$\int \Big(\frac{4 - \sqrt{x}}{3x} + \frac{3}{4^x}\Big)\, dx = \frac{4}{3}\int \frac{1}{x}\, dx - \frac{1}{3}\int x^{-1/2}\, dx + 3\int (1/4)^x\, dx$$

$$= \frac{4}{3}\ln|x| - \frac{1}{3}\frac{x^{1/2}}{1/2} + 3\frac{(1/4)^x}{\ln(1/4)} + c = \frac{4}{3}\ln|x| - \frac{2}{3}\sqrt{x} - \frac{3}{4^x \ln 4} + c,$$

con c costante arbitraria. Per il teorema fondamentale del calcolo si ha

$$\int_1^3 \frac{e^{3x}}{2 + e^{3x}}\, dx = \frac{1}{3}\int_1^3 \frac{(e^{3x})'}{2 + e^{3x}}\, dx = \frac{1}{3}\Big[\ln(2 + e^{3x})\Big]_1^3 = \frac{1}{3}\ln\frac{2 + e^9}{2 + e^3}.$$

$\boxed{\mathbf{10}}$ Si ha $f'(x) = 2e^{2x}\cos x - e^{2x}\operatorname{sen} x$ e $f''(x) = 3e^{2x}\cos x - 4e^{x}\operatorname{sen} x$ da cui $f(0) = 1$, $f'(0) = 2$, $f''(0) = 3$ perciò il polinomio di Taylor cercato è

$$P(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2}(x - x_0)^2 = 1 + 2x + \frac{3}{2}x^2.$$