Università degli Studi di Udine   Anno Accademico 2012/2013

Corso di Laurea in Biotecnologie

Modulo di Matematica

Esame del 08/07/2013

N.B.: scrivere nome, cognome e numero di matricola su ogni foglio consegnato.
Tempo a disposizione: 2.5 ore

---

1 Se $\lim_{x \to x_0} f(x) = -\infty$ e $\lim_{x \to x_0} g(x) = 0^+$, allora $\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)}$ è

- A $-\infty$
- B $+\infty$
- C 0
- D non ci sono elementi sufficienti per rispondere

---

2 Se f è una funzione derivabile due volte in $]a, b[$ e tale che $f'(x_0) > 0$ e $f''(x_0) = 0$ con $x_0 \in]a, b[$, allora

- A x_0 è punto di minimo relativo per f in $[a, b]$
- B x_0 è punto di massimo relativo per f in $[a, b]$
- C x_0 è punto di flesso per f in $[a, b]$
- D nessuna delle precedenti

---

3 L'equazione differenziale $y'' = te^y - \operatorname{sen} t$ è

- A un'equazione lineare del primo ordine
- B un'equazione lineare del secondo ordine
- C un'equazione non lineare del primo ordine
- D un'equazione non lineare del secondo ordine

---

4 La funzione $f(x) = \log_{1/2} x$

- A è definita in $\mathbb{R}$
- B è una funzione decrescente
- C è una funzione dispari
- D ha limite $-\infty$ per $x \to 0^+$

---

5 a) Scrivere la definizione di primitiva di una funzione f in un intervallo I.

$\boxed{6}$ Rappresentare il grafico di una funzione g che verifichi contemporaneamente le seguenti proprietà:

$$\lim_{x\to-\infty} g(x) = +\infty \qquad \lim_{x\to 2^-} g(x) = 1 \qquad \lim_{x\to 2^+} g(x) = -\infty \qquad \lim_{x\to+\infty} g(x) = -2$$

$\boxed{7}$

a) Enunciare il Teorema di de L'Hôpital;

b) per ciascuno dei seguenti tre limiti

$$\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen}(x^2) - \arccos x}{x^2 + \ln(1+2x)}, \qquad \lim_{x\to+\infty} \frac{3x^2 + \ln x}{7-5x}, \qquad \lim_{x\to\pi} \frac{e^{x-\pi} - \cos x}{x \operatorname{sen} x},$$

determinare se è possibile applicare il teorema ed eventualmente calcolarne il valore.

$\boxed{8}$ Data la funzione

$$g(x) = \frac{2 - \ln(x^5)}{x}$$

a) determinarne il dominio $\mathcal{D}$;

b) studiare il segno di g;

c) calcolare i limiti agli estremi del dominio e determinare gli eventuali asintoti;

d) determinare gli intervalli in cui la funzione è crescente, quelli in cui è decrescente, e gli eventuali punti di massimo/minimo relativo e/o assoluto;

e) determinare gli intervalli in cui la funzione è concava e quelli in cui è convessa;

f) disegnare un grafico approssimativo di g.

$\boxed{9}$ Dato il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' = \dfrac{t^2 y^4}{\sqrt{t^3+1}} \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

a) dire se la funzione $y(t) = \cos(t^3)$ è soluzione del problema in $]-1, +\infty[$;

b) determinare una soluzione del problema nel caso in cui non lo sia la funzione di cui al punto precedente; oppure, alternativamente

b') calcolare i seguenti integrali

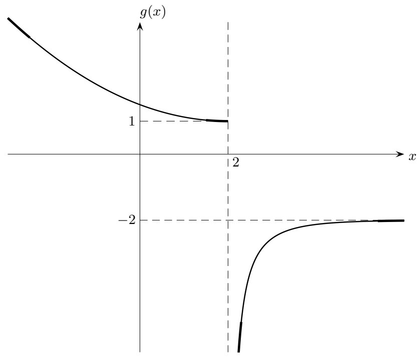
$$\int \left(\frac{3\cos^2 x - 4}{\cos^2 x} - \frac{5}{x\sqrt{x}} \right) dx, \qquad \int_0^\pi \frac{\operatorname{sen} t}{\sqrt[3]{3 - 2\cos t}}\, dx.$$

$\boxed{10}$ Calcolare il polinomio di Taylor di grado 2 di $f(x) = x \operatorname{tg} x$ nel punto $x_0 = \pi/4$.

Soluzioni dei quesiti dell'esame del 8 luglio 2013

$\boxed{1}$ A; $\boxed{2}$ D; $\boxed{3}$ D; $\boxed{4}$ B; $\boxed{5}$ consultare il libro di testo.

$\boxed{6}$ In neretto si evidenziano le informazioni date dai limiti. Il grafico della funzione è quindi completato a piacere (linea sottile), per esempio:



$\boxed{7}$ a) consultare il libro di testo; b) il primo limite è della forma $-(\pi/2)/0$, il secondo $+\infty/-\infty$, il terzo $2/0$. Il teorema si può applicare solamente al secondo limite, per il quale si ha

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{3x^2+\ln x}{7-5x}\overset{H}{=}\lim_{x\to+\infty}\frac{6x+1/x}{-5}=\lim_{x\to+\infty}\Big(-\frac{6}{5}x-\frac{1}{5x}\Big)=-\infty.$$

$\boxed{8}$ a) Il dominio è individuato dagli x per cui $x^5>0$ quindi $\mathcal{D}=]0,+\infty[$ e la funzione è ivi continua e derivabile. Osserviamo inoltre che la funzione può essere scritta nella seguente forma

$$f(x)=\frac{2-5\ln x}{x}.$$

b) Poiché il denominatore è sempre positivo nel dominio $\mathcal{D}$, si ha che $f(x)\geq 0$ se e solo se $2-5\ln x\geq 0$ ovvero $\ln x\leq 2/5$ cioè $x\leq \mathrm{e}^{2/5}$. In definitiva

$$g(x)\begin{cases} >0, & \text{se } x\in]0,\mathrm{e}^{2/5}[,\\ =0, & \text{se } x=\mathrm{e}^{2/5},\\ <0, & \text{se } x\in]\mathrm{e}^{2/5},+\infty[.\end{cases}$$

c) Ha senso andare a studiare i limiti a $+\infty$ e in 0 da destra. Si ha

$$\lim_{x\to0^+}g(x)=\left[\frac{2+\infty}{0^+}\right]=+\infty,$$

$$\lim_{x\to+\infty}g(x)=\lim_{x\to+\infty}\frac{2-5\ln x}{x}=\left[\frac{-\infty}{+\infty}\right]\overset{H}{=}\lim_{x\to+\infty}\frac{-5/x}{1}=0.$$

Da questa analisi segue che la retta $y=0$ è asintoto orizzontale a $+\infty$, mentre $x=0$ è asintoto verticale.

d) Calcoliamo la derivata prima:

$$g'(x)=\frac{-\frac{5}{x}x-(2-5\ln x)\cdot 1}{x^2}=\frac{5\ln x-7}{x^2}.$$

La derivata è positiva quando $5\ln x - 7 \geq 0$ ovvero $\ln x \geq 7/5$ cioè $x \geq \mathrm{e}^{7/5}$. Quindi

$$g'(x) \begin{cases} < 0, & \text{se } x \in]0, \mathrm{e}^{7/5}[, \\ = 0, & \text{se } x = \mathrm{e}^{7/5}, \\ > 0, & \text{se } x \in]\mathrm{e}^{7/5}, +\infty[, \end{cases}$$

perciò la funzione è crescente in $]\mathrm{e}^{7/5}, +\infty[$, mentre è decrescente in $]0, \mathrm{e}^{7/5}[$. In $x = \mathrm{e}^{7/5}$ ammette un minimo relativo relativo e assoluto. Dal punto c) si vede subito che la funzione non possiede massimo.

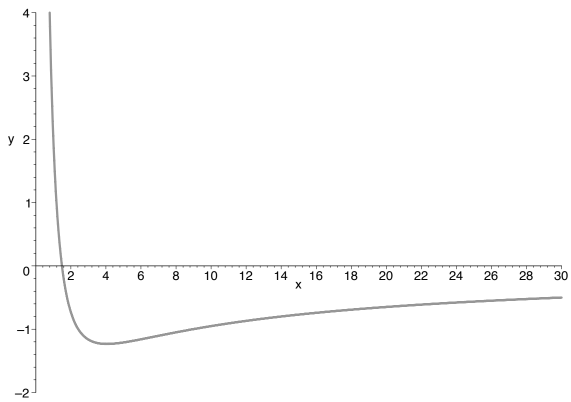
e) Calcoliamo la derivata seconda:

$$g''(x) = \frac{\frac{5}{x}x^2 - (5\ln x - 7)2x}{x^4} = \frac{19 - 10\ln x}{x^3}.$$

Il denominatore è positivo quando $x > 0$, il numeratore quando $19 - 10\ln x \geq 0$ ovvero $\ln x \leq 19/10$ cioè $x \leq \mathrm{e}^{19/10}$. Quindi

$$g''(x) \begin{cases} > 0, & \text{se } x \in]0, \mathrm{e}^{19/10}[, \\ = 0, & \text{se } x = \mathrm{e}^{19/10}, \\ < 0, & \text{se } x \in]\mathrm{e}^{19/10}, +\infty[, \end{cases}$$

perciò la funzione è convessa in $]0, \mathrm{e}^{19/10}[$, mentre è concava in $]\mathrm{e}^{19/10}, +\infty[$.



9 a) Si ha $y'(t) = -3t^2\,\mathrm{sen}(t^3)$. Sostituendo si ottiene l'equazione

$$-3t^2\,\mathrm{sen}(t^3) = \frac{t^2(\cos(t^3))^4}{\sqrt{t^3+1}},$$

che non è identicamente soddisfatta per $t > -1$ (ad esempio, per $t = \sqrt[3]{\pi}$ si ottiene $0 \neq \frac{\sqrt[3]{\pi^2}}{\sqrt{\pi+1}}$). La funzione non è dunque soluzione. Si osservi che la funzione soddisfa la seconda condizione $y(0) = 1$.

b) Scrivendo $y' = \frac{dy}{dt}$ e utilizzando il metodo di separazione delle variabili si ha

$$\frac{1}{y^4}\,dy = \frac{t^2}{\sqrt{t^3+1}}\,dt \qquad \Longrightarrow \qquad \int y^{-4}\,dy = \int \frac{t^2}{\sqrt{t^3+1}}\,dt,$$

e utilizzando le tabelle

$$\frac{y^{-3}}{-3} = \frac{1}{3}\int (3t^2)(t^3+1)^{-1/2}\,dt \qquad \Longrightarrow \qquad -\frac{1}{3y^3} = \frac{1}{3}\frac{(t^3+1)^{1/2}}{1/2} + c = \frac{2}{3}\sqrt{t^3+1} + c,$$

dove c è la generica costante d'integrazione. Risolvendo in y si ottiene

$$y^3 = \frac{1}{-3c - 2\sqrt{t^3+1}} \qquad \Longleftrightarrow \qquad y = \frac{1}{\sqrt[3]{-3c - 2\sqrt{t^3+1}}}.$$

Imponendo la condizione $y(0) = 1$ si ottiene $1 = \frac{1}{-3c-2}$, da cui si ricava $c = -1$. La soluzione è quindi

$$y(t) = \frac{1}{\sqrt[3]{3 - 2\sqrt{t^3+1}}}.$$

Alternativamente, si poteva utilizzare direttamente la formula risolutiva per le equazioni a variabili separabili (insieme alla formula fondamentale del calcolo integrale)

$$\int_1^y z^{-4}\,dz = \int_0^t \frac{s^2}{\sqrt{s^3+1}}\,ds \quad \Longrightarrow \quad \left[\frac{z^{-3}}{-3}\right]_1^y = \left[\frac{2}{3}\sqrt{s^3+1}\right]_0^t$$
$$\Longrightarrow \quad \frac{1}{3} - \frac{1}{3y^3} = \frac{2}{3}\sqrt{t^3+1} - \frac{2}{3},$$

che risolta rispetto a y fornisce la soluzione cercata.

b') Dalle tabelle si ottiene

$$\int \Big(\frac{3\cos^2 x - 4}{\cos^2 x} - \frac{5}{x\sqrt{x}}\Big)\,dx = \int 3\,dx - 4\int \frac{1}{\cos^2 x}\,dx - 5\int x^{-3/2}\,dx$$
$$= 3x - 4\,\mathrm{tg}\,x - 5\frac{x^{-1/2}}{-1/2} + c = 3x - 4\,\mathrm{tg}\,x + \frac{10}{\sqrt{x}} + c,$$

con c costante arbitraria. Per il teorema fondamentale del calcolo si ha

$$\int_0^\pi \frac{\mathrm{sen}\,t}{\sqrt[3]{3-2\cos t}}\,dx = \frac{1}{2}\int_0^\pi (2\,\mathrm{sen}\,t)(3-2\cos t)^{-1/3}\,dx = \frac{1}{2}\int_0^\pi (3-2\cos t)'(3-2\cos t)^{-1/3}\,dx$$
$$= \frac{1}{2}\Big[\frac{(3-2\cos t)^{2/3}}{2/3}\Big]_0^\pi = \frac{3}{4}(5^{2/3} - 1).$$

10 Si ha $f'(x) = \mathrm{tg}\,x + \frac{x}{\cos^2 x}$ e $f''(x) = \frac{2}{\cos^2 x} + \frac{2x\,\mathrm{sen}\,x}{\cos^3 x}$ da cui $f(\pi/4) = \pi/4$, $f'(\pi/4) = 1 + \pi/2$, $f''(\pi/4) = 4 + \pi$ perciò il polinomio di Taylor cercato è

$$P(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + \frac{f''(x_0)}{2}(x-x_0)^2 = \frac{\pi}{4} + \frac{2+\pi}{2}\Big(x - \frac{\pi}{4}\Big) + \frac{4+\pi}{2}\Big(x - \frac{\pi}{4}\Big)^2.$$