Università degli Studi di Udine — Anno Accademico 2012/2013

Corso di Laurea in Biotecnologie

Modulo di Matematica

Esame del 29/01/2013

N.B.: scrivere nome, cognome e numero di matricola su ogni foglio consegnato.
Tempo a disposizione: 2.5 ore

---

1 Se $\lim_{x\to x_0} f(x) = -\infty$ e $\lim_{x\to x_0} g(x) = +\infty$, allora $\lim_{x\to x_0}(f(x) - g(x))$ è

A $-\infty$

B $+\infty$

C 0

D non ci sono elementi sufficienti per rispondere

---

2 Se f è una funzione derivabile su $]a, b[$ e vale $f'(x) < 0$ per ogni $x \in]a, b[$, allora

A f è crescente in $]a, b[$

B f è decrescente in $]a, b[$

C f è concava in $]a, b[$

D f è convessa in $]a, b[$

---

3 L'equazione differenziale $y' = t \operatorname{sen} y + 5t$ è

A un'equazione lineare del primo ordine

B un'equazione lineare del secondo ordine

C un'equazione non lineare del primo ordine

D un'equazione non lineare del secondo ordine

---

4 Il grafico della funzione $f(x) = \dfrac{1 - 3x - x^2}{2 - 7}$ rappresenta

A una retta

B una parabola

C un'iperbole

D nessuna delle precedenti

---

5 a) Scrivere il generico problema di Cauchy associato all'equazione $y' = f(t, y)$ e dare la definizione di una sua soluzione.

---

6 Rappresentare il grafico di una funzione g che verifichi contemporaneamente le seguenti proprietà:

$$\lim_{x\to-\infty} g(x) = -2 \qquad \lim_{x\to-1^-} g(x) = -\infty \qquad \lim_{x\to-1^+} g(x) = 1 \qquad \lim_{x\to+\infty} g(x) = +\infty$$

---

7 a) Enunciare il Teorema di de L'Hôpital;

b) per ciascuno dei seguenti tre limiti

$$\lim_{x\to 0} \frac{3x - \cos x}{4\,\mathrm{sen}\, x + \mathrm{e}^{2x} - 1}, \qquad \lim_{x\to 0} \frac{2x + \mathrm{sen}(x^2)}{4\,\mathrm{tg}\, x + 3x}, \qquad \lim_{x\to+\infty} \frac{2^x + x}{3^{-x} + 1},$$

determinare se è possibile applicare il teorema ed eventualmente calcolarne il valore.

---

8 Data la funzione

$$g(x) = \frac{2x+1}{x^3}$$

a) determinare il dominio $\mathcal{D}$;

b) studiare il segno di g;

c) calcolare i limiti agli estremi del dominio e determinare gli eventuali asintoti;

d) determinare gli intervalli in cui la funzione è crescente, quelli in cui è decrescente, e gli eventuali punti di massimo/minimo relativo e/o assoluto;

e) determinare gli intervalli in cui la funzione è convessa e quelli in cui è concava;

f) disegnare un grafico approssimativo di g.

---

9 Dato il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' = \dfrac{y}{\ln^2 y}(\cos(2t) - 2t^3) \\ y(0) = \mathrm{e} \end{cases}$$

a) dire se la funzione $y(t) = \mathrm{e}^{1-2t}$ è soluzione del problema;

b) determinare una soluzione del problema nel caso in cui non lo sia la funzione di cui al punto precedente; oppure, alternativamente

b') calcolare i seguenti integrali

$$\int \left(\frac{x^2 + 2\sqrt{x}}{x} - 3\,\mathrm{sen}\, x\right) dx \qquad \int_1^{\mathrm{e}} \frac{\ln^3 x}{3x}\, dx.$$

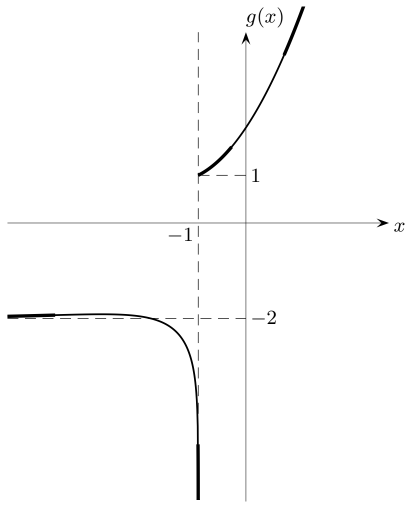
---

10 Calcolare il polinomio di Taylor di grado 2 della funzione $f(x) = \mathrm{e}^{-2x}$ nel punto $x_0 = -1$.

Soluzioni dei quesiti dell'esame del 29 gennaio 2013

1 A; **2** B; **3** C; **4** B; **5** consultare il libro di testo.

6 In neretto si evidenziano le informazioni date dai limiti. Il grafico della funzione è quindi completato a piacere (linea sottile), per esempio:



$\boxed{7}$ a) consultare il libro di testo; b) il primo limite è della forma $-1/0$, il secondo $0/0$, il terzo $+\infty/1$. Il teorema si può applicare solamente al secondo limite, per il quale si ha

$$\lim_{x\to 0} \frac{2x + \operatorname{sen}(x^2)}{4\operatorname{tg} x + 3x} \overset{H}{=} \lim_{x\to 0} \frac{2 + 2x\cos(x^2)}{4(1 + \operatorname{tg}^2 x) + 3} = \frac{2}{7}.$$

$\boxed{8}$ a) Il dominio è $\mathcal{D} = \mathbb{R} \setminus \{0\}$ e la funzione è ivi continua e derivabile.

b) Il numeratore è positivo quando $x > -1/2$, il denominatore è positivo quando $x > 0$, quindi g è positiva quando $x > 0$ oppure $x < -1/2$, negativa quando $-1/2 < x < 0$ e si annulla in $x = -1/2$.

c) Ha senso andare a studiare i limiti in 0 e a $\pm\infty$. Si ha

$$\lim_{x\to\pm\infty} g(x) = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{2 + 1/x}{x^2} = \left[\frac{2}{+\infty}\right] = 0, \qquad \lim_{x\to 0^\pm} g(x) = \left[\frac{1}{0^\pm}\right] = \pm\infty,$$

quindi il limite in $x_0 = 0$ non esiste e inoltre la funzione non ammette massimo né minimo.

d) La derivata prima è

$$g'(x) = \frac{2x^3 - (2x+1)3x^2}{x^6} = \frac{2x - (2x+1)3}{x^4} = -\frac{4x+3}{x^4}.$$

Il numeratore è positivo quando $x \geq -3/4$, il denominatore è sempre positivo nel dominio, quindi

$$g'(x) \begin{cases} < 0, & \text{se } x \in]-3/4, 0[\cup]0, +\infty[, \\ = 0, & \text{se } x = -3/4, \\ > 0, & \text{se } x \in]-\infty, -3/4[, \end{cases}$$

perciò la funzione è decrescente in $]-3/4, 0[$ e in $]0, +\infty[$, mentre è crescente in $]-\infty, -3/4[$.

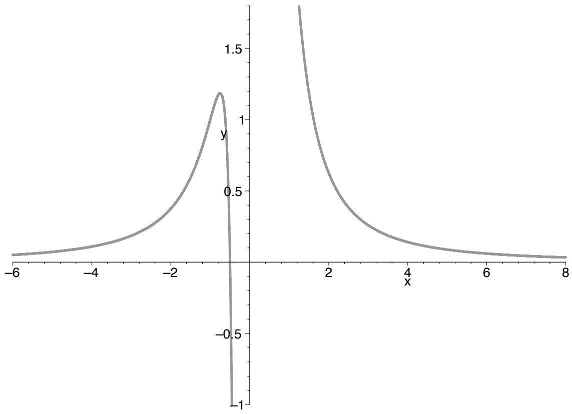
e) Calcoliamo la derivata seconda:

$$g''(x) = -\frac{4 \cdot x^4 - (4x+3)4x^3}{x^8} = -\frac{4x - (4x+3)4}{x^5} = \frac{12x + 12}{x^5}.$$

Il numeratore è positivo quando $x \geq -1$, il denominatore è positivo se $x > 0$, quindi

$$g''(x) \begin{cases} < 0, & \text{se } x \in]-1, 0[, \\ = 0, & \text{se } x = 1, \\ > 0, & \text{se } x \in]-\infty, -1[\cup]0, +\infty[. \end{cases}$$

In definitiva la funzione è convessa in $]-\infty, -1[$ e in $]0, +\infty[$, concava in $]-1, 0[$.



9 a) Si ha $y'(t) = -2\mathrm{e}^{1-2t}$ e sostituendo si ottiene l'equazione

$$-2\mathrm{e}^{1-2t} = \frac{\mathrm{e}^{1-2t}}{\ln^2(\mathrm{e}^{1-2t})}(\cos(2t) - 2t^3)$$

che non è identicamente soddisfatta per $t \in \mathbb{R}$ (ad esempio, per $t = 0$ si ottiene $-2\mathrm{e} \neq \mathrm{e}$). La funzione non è dunque soluzione. Si osservi che la funzione soddisfa invece la seconda condizione, essendo $y(0) = \mathrm{e}$.

b) Scrivendo $y' = \frac{dy}{dt}$ e utilizzando il metodo di separazione delle variabili si ha

$$\frac{\ln^2 y}{y}\, dy = (\cos(2t) - 2t^3)\, dt$$

e integrando (utilizzando le tabelle)

$$\int \frac{\ln^2 y}{y}\, dy = \int (\cos(2t) - 2t^3)\, dt \qquad \Longrightarrow \qquad \frac{\ln^3 y}{3} = \frac{\operatorname{sen}(2t)}{2} - \frac{t^4}{2} + c,$$

dove c è la generica costante d'integrazione. Quest'ultima equazione è equivalente a

$$\ln^3 y = \frac{3\operatorname{sen}(2t)}{2} - \frac{3t^4}{2} + 3c \qquad \Longleftrightarrow \qquad y = \exp\sqrt[3]{\frac{3\operatorname{sen}(2t)}{2} - \frac{3t^4}{2} + 3c}.$$

Imponendo la condizione $y(0) = \mathrm{e}$ (nella prima delle due equazioni qui sopra) si ricava $1^3 = 3c$ che risolta nell'incognita c fornisce $c = 1/3$. La soluzione è quindi

$$y(t) = \exp\sqrt[3]{\frac{3\operatorname{sen}(2t)}{2} - \frac{3t^4}{2} + 1}.$$

Alternativamente, si poteva utilizzare direttamente la formula risolutiva per le equazioni a variabili separabili (insieme alla formula fondamentale del calcolo integrale)

$$\int_{\mathrm{e}}^{y} \frac{\ln^2 z}{z}\, dz = \int_0^t \big(\cos(3s) - 2s^3)\big)\, ds \quad \Longrightarrow \quad \left[\frac{\ln^3 z}{3}\right]_{\mathrm{e}}^{y} = \left[\frac{\operatorname{sen}(2s)}{2} - \frac{s^4}{2}\right]_0^t$$

$$\Longrightarrow \quad \frac{\ln^3 y}{3} - \frac{1}{3} = \frac{\operatorname{sen}(2t)}{2} - \frac{t^4}{2},$$

che risolvendo rispetto a y fornisce la soluzione cercata.

b') Dalla prima tabella si ottiene

$$\int \Big(\frac{x^2 + 2\sqrt{x}}{x} - 3\operatorname{sen} x\Big)\, dx = \int x\, dx + 2\int x^{-1/2}\, dx - 3\int \operatorname{sen} x\, dx$$

$$= \frac{x^2}{2} + 2\frac{x^{1/2}}{1/2} + 3\cos x + c = \frac{x^2}{2} + 4\sqrt{x} + 3\cos x + c,$$

con c costante arbitraria. Utilizzando la seconda tabella e il Teorema fondamentale del calcolo si ha

$$\int_1^e \frac{\ln^3 x}{3x}\,dx = \frac{1}{3}\int_1^e \ln^3 x\,(\ln x)'\,dx = \frac{1}{3}\left[\frac{\ln^4 x}{4}\right]_1^e = \frac{1}{3}\left(\frac{1}{4}-0\right) = \frac{1}{12}.$$

10 Si ha $f'(x) = -2e^{-2x}$ e $f''(x) = 4e^{-2x}$ da cui $f(-1) = e^2$, $f'(-1) = -2e^2$, $f''(-1) = 4e^2$ perciò il polinomio di Taylor cercato è

$$P(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + \frac{f''(x_0)}{2}(x-x_0)^2 = e^2 - 2e^2(x+1) + 2e^2(x+1)^2.$$

Appello del 19 febbraio 2013

N.B.: scrivere nome, cognome e numero di matricola su ogni foglio consegnato.

---

1 Se $\lim_{x\to x_0} f(x) = -3$ e $\lim_{x\to x_0} g(x) = 0$, allora $\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)}$ è

A $-\infty$

B $+\infty$

C 0

D non ci sono elementi sufficienti per rispondere

---

2 Se f è una funzione derivabile due volte in $]a,b[$ e tale che $f'(x_0) = 0$ e $f''(x_0) < 0$ con $x_0 \in]a,b[$, allora

A x_0 è punto di minimo relativo per f in $[a,b]$

B x_0 è punto di massimo relativo per f in $[a,b]$

C x_0 è punto di minimo assoluto per f in $[a,b]$

D x_0 è punto di massimo assoluto per f in $[a,b]$

---

3 L'equazione differenziale $y' = 3t^2 - e^t y$ è

A un'equazione lineare del primo ordine

B un'equazione lineare del secondo ordine

C un'equazione non lineare del primo ordine

D un'equazione non lineare del secondo ordine

---

4 La funzione $f(x) = \sqrt[3]{x}$

A è decrescente per $x < 0$ e crescente per $x > 0$

B è una funzione dispari

C è una funzione pari

D è crescente per $x < 0$ e decrescente per $x > 0$

---

5 a) Scrivere la definizione di derivata di una funzione f in un punto x_0.

---

6 Rappresentare il grafico di una funzione g che verifichi contemporaneamente le seguenti proprietà:

$$\lim_{x\to-\infty} g(x) = -2 \qquad \lim_{x\to 0^-} g(x) = 1 \qquad \lim_{x\to 0^+} g(x) = +\infty \qquad \lim_{x\to+\infty} g(x) = +\infty$$

---

7 a) Enunciare il teorema fondamentale del calcolo integrale;

b) per quali delle tre funzioni

$$f(x) = |x^2 - 2|, \qquad g(x) = \begin{cases} x\,\mathrm{sgn}x & \text{se } x \neq 0 \\ 0 & \text{se } x = 0, \end{cases} \qquad h(x) = \begin{cases} \dfrac{1-\cos(2x)}{x^2} & \text{se } x \neq 0 \\ 1/2 & \text{se } x \neq 0 \end{cases}$$

è possibile applicare il teorema nell'intervallo $[-1, 3]$? (sgn è la funzione segno.)

---

8 Data la funzione

$$g(x) = \frac{x^3}{1-x}$$

a) determinare il dominio $\mathcal{D}$;

b) studiare il segno di g;

c) calcolare i limiti agli estremi del dominio e determinare gli eventuali asintoti;

d) determinare gli intervalli in cui la funzione è crescente, quelli in cui è decrescente, e gli eventuali punti di massimo/minimo relativo e/o assoluto;

e) determinare gli intervalli in cui la funzione è convessa e quelli in cui è concava;

f) disegnare un grafico approssimativo di g.

---

9 Dato il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' = y^4(3t-1)\mathrm{e}^t \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

a) dire se la funzione $y(t) = (1-t)\mathrm{e}^{2t}$ è soluzione del problema;

b) determinare una soluzione del problema nel caso in cui non lo sia la funzione di cui al punto precedente; oppure, alternativamente

b') calcolare i seguenti integrali

$$\int \left(\frac{\mathrm{sen}^2\, x - 3x^2}{(x\,\mathrm{sen}\, x)^2} - \frac{3}{2+x^2} \right) dx \qquad \int_0^2 (3x - 2x^2)\mathrm{e}^{-2x}\, dx.$$

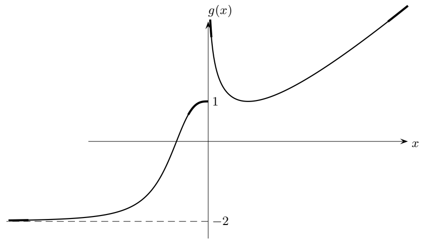
---

10 Calcolare il polinomio di Taylor di grado 2 di $f(x) = x\,\mathrm{sen}\, x$ nel punto $x_0 = \pi/2$.

Soluzioni dei quesiti dell'esame del 19 febbraio 2013

1 D; **2** B; **3** A; **4** B; **5** consultare il libro di testo.

6 In neretto si evidenziano le informazioni date dai limiti. Il grafico della funzione è quindi completato a piacere (linea sottile), per esempio:



7 a) consultare il libro di testo; b) anzitutto tutte le funzioni sono definite in $[-1,3]$. f è continua dunque si può applicare il teorema; g è banalmente continua per $x \neq 0$ e inoltre si ha

$$\lim_{x\to 0} g(x) = \lim_{x\to 0} x\operatorname{sgn} x = [0 \cdot (\text{limitata})] = 0 = g(0),$$

dunque g è continua anche in 0 e si può applicare il teorema. Per ultimo, h è continua per $x \neq 0$ e si ha

$$\lim_{x\to 0} h(x) = \lim_{x\to 0} \frac{1-\cos(2x)}{x^2} = 4 \lim_{x\to 0} \frac{1-\cos(2x)}{(2x)^2} = 4 \cdot \frac{1}{2} = 2 \neq h(0),$$

quindi h non è continua in 0 e non si può applicare il teorema.

8 a) Il dominio è $\mathcal{D} = \mathbb{R} \setminus \{1\}$ e la funzione è ivi continua e derivabile.

b) Il numeratore è positivo se $x \geq 0$ il denominatore se $x < 1$ quindi la funzione è positiva se $0 < x < 1$, negativa se $x < 0$ oppure $x > 1$ e si annulla in $x = 0$.

c) Ha senso andare a studiare i limiti in 1 e a $\pm\infty$. Si ha

$$\lim_{x\to\pm\infty} g(x) = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{x^2}{1/x - 1} = \left[\frac{+\infty}{-1}\right] = -\infty, \qquad \lim_{x\to 1^\pm} g(x) = \left[\frac{1}{0^\mp}\right] = \mp\infty,$$

quindi il limite in $x_0 = 1$ non esiste ed inoltre la funzione non ammette massimo né minimo. La retta di equazione $x = 1$ è un asintoto verticale mentre, essendo $\lim_{x\to+\pm\infty} g(x)/x = \mp\infty$, non esistono asintoti obliqui.

d) La derivata prima è

$$g'(x) = \frac{3x^2(1-x) - x^3(-1)}{(1-x)^2} = \frac{3x^2 - 2x^3}{(1-x)^2} = \frac{x^2(3-2x)}{(1-x)^2}.$$

La derivata prima è dunque positiva se $3-2x > 0$ cioè $x < 3/2$ e si annulla in $x = 0$ oppure $x = 3/2$. Più precisamente

$$g'(x) \begin{cases} > 0, & \text{se } x \in]-\infty, 0[\cup]0,1[\cup]1, 3/2[, \\ = 0, & \text{se } x = 0 \text{ oppure } x = 3/2, \\ < 0, & \text{se } x \in]3/2, +\infty[, \end{cases}$$

perciò la funzione è crescente in $]-\infty, 1[$ e in $]1, 3/2[$, mentre è decrescente in $]3/2, +\infty[$. In $x = 3/2$ ammette un massimo relativo.

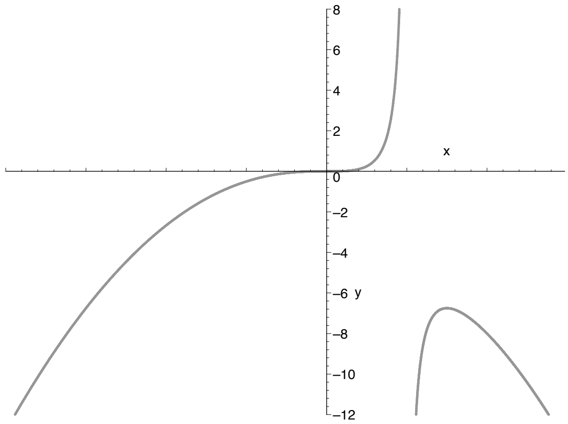
e) Calcoliamo la derivata seconda:

$$g''(x) = \frac{(6x-6x^2)(1-x)^2 - (3x^2-2x^3)2(1-x)(-1)}{(1-x)^4} = \frac{(6x-6x^2)(1-x) + (3x^2-2x^3)2}{(1-x)^3}$$
$$= \frac{2x^3 - 6x^2 + 6x}{(1-x)^3} = \frac{2x(x^2-3x+3)}{(1-x)^3}.$$

Poiché $x^2 - 3x + 3$ è sempre positivo, il numeratore è positivo quando $x \geq 0$. Il denominatore è invece positivo quando $x < 1$, quindi

$$g''(x) \begin{cases} > 0, & \text{se } x \in]0,1[, \\ = 0, & \text{se } x = 0, \\ < 0, & \text{se } x \in]-\infty, 0[\cup]1, +\infty[. \end{cases}$$

In definitiva la funzione è concava in $]-\infty, 0[$ e in $]1, +\infty[$, convessa in $]0,1[$. Il $x = 0$ ammette un punto di flesso.



9 a) Si ha $y'(t) = -\mathrm{e}^{2t} + 2(1-t)\mathrm{e}^{2t} = (1-2t)\mathrm{e}^{2t}$ e sostituendo si ottiene l'equazione

$$(1-2t)\mathrm{e}^{2t} = (1-t)^4 \mathrm{e}^{8t}(3t-1)\mathrm{e}^t$$

che non è identicamente soddisfatta per $t \in \mathbb{R}$ (ad esempio, per $t = 0$ si ottiene $1 \neq -1$). La funzione non è dunque soluzione. Si osservi che la funzione soddisfa invece la seconda condizione, essendo $y(0) = 1$.

b) Scrivendo $y' = \frac{dy}{dt}$ e utilizzando il metodo di separazione delle variabili si ha

$$\frac{1}{y^4}\, dy = (3t-1)\mathrm{e}^t\, dt,$$

e integrando si ottiene

$$\int y^{-4}\, dy = \int (3t-1)\mathrm{e}^t\, dt \qquad \Longrightarrow \qquad \frac{y^{-3}}{-3} = (3t-4)\mathrm{e}^t + c,$$

dove c è la generica costante d'integrazione. Infatti, utilizzando il metodo d'integrazione per parti

$$\int (3t-1)\mathrm{e}^t\, dt = (3t-1)\mathrm{e}^t - \int 3\,\mathrm{e}^t\, dt = (3t-1)\mathrm{e}^t - 3\mathrm{e}^t + c = (3t-4)\mathrm{e}^t + c.$$

L'equazione sopra è equivalente a

$$-\frac{1}{3y^3} = (3t-4)\mathrm{e}^t + c \qquad \Longleftrightarrow \qquad y = \frac{1}{\sqrt[3]{3(4-3t)\mathrm{e}^t - 3c}}$$

con c costante arbitraria. Imponendo la condizione $y(0) = 1$ (nella prima delle due equazioni qui sopra) si ricava

$$-\frac{1}{3} = -4 + c$$

che risolta nell'incognita c fornisce $c = 11/3$. La soluzione è quindi

$$y(t) = \frac{1}{\sqrt[3]{3(4-3t)e^t - 11}}.$$

Alternativamente, si poteva utilizzare direttamente la formula risolutiva per le equazioni a variabili separabili (insieme alla formula fondamentale del calcolo integrale)

$$\int_1^y z^{-4}\,dz = \int_0^t (3s-1)e^s\,ds \implies \Big[-\frac{1}{3z^3}\Big]_1^y = \Big[(3s-4)e^s\Big]_0^t$$
$$\implies \frac{1}{3} - \frac{1}{3y^3} = (3t-4)e^t + 4$$

che risolvendo rispetto a y fornisce la soluzione cercata.

b') Dalla prima tabella si ottiene

$$\int \Big(\frac{\operatorname{sen}^2 x - 3x^2}{(x\operatorname{sen} x)^2} - \frac{3}{2+x^2}\Big)\,dx = \int \frac{1}{x^2}\,dx - 3\int \frac{1}{\operatorname{sen}^2 x}\,dx - 3\int \frac{1}{2+x^2}\,dx$$
$$= -\frac{1}{x} + 3\operatorname{ctg} x - \frac{3}{\sqrt{2}}\operatorname{arctg}\frac{x}{\sqrt{2}} + c,$$

con c costante arbitraria. Utilizzando il metodo di integrazione per parti si ha

$$\int_0^2 (3x-2x^2)e^{-2x}\,dx = \Big[(3x-2x^2)\frac{e^{-2x}}{-2}\Big]_0^2 - \int_0^2 (3-4x)\frac{e^{-2x}}{-2}\,dx$$
$$= e^{-4} + \frac{1}{2}\Big(\Big[(3-4x)\frac{e^{-2x}}{-2}\Big]_0^2 - \int_0^2 -4\frac{e^{-2x}}{-2}\,dx\Big)$$
$$= e^{-4} + \frac{1}{2}\big(\frac{5}{2}e^{-4} + \frac{3}{2}\big) - \Big[\frac{e^{-2x}}{-2}\Big]_0^2 = \frac{9}{4}e^{-4} + \frac{3}{4} + \frac{1}{2}(e^{-4} - 1) = \frac{11}{4}e^{-4} + \frac{1}{4}.$$

10 Si ha $f'(x) = \operatorname{sen} x + x\cos x$ e $f''(x) = 2\cos x - x\operatorname{sen} x$ da cui $f(\pi/2) = \pi/2$, $f'(\pi/2) = 1$, $f''(\pi/2) = -\pi/2$ perciò il polinomio di Taylor cercato è

$$P(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + \frac{f''(x_0)}{2}(x-x_0)^2 = \frac{\pi}{2} + \Big(x - \frac{\pi}{2}\Big) - \frac{\pi}{4}\Big(x - \frac{\pi}{2}\Big)^2.$$

Appello del 8 luglio 2013

N.B.: scrivere nome, cognome e numero di matricola su ogni foglio consegnato.
Tempo a disposizione: 2.5 ore

---

1 Se $\lim_{x\to x_0} f(x) = -\infty$ e $\lim_{x\to x_0} g(x) = 0^+$, allora $\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)}$ è

- A $-\infty$
- B $+\infty$
- C 0
- D non ci sono elementi sufficienti per rispondere

---

2 Se f è una funzione derivabile due volte in $]a,b[$ e tale che $f'(x_0) > 0$ e $f''(x_0) = 0$ con $x_0 \in]a,b[$, allora

- A x_0 è punto di minimo relativo per f in $[a,b]$
- B x_0 è punto di massimo relativo per f in $[a,b]$
- C x_0 è punto di flesso per f in $[a,b]$
- D nessuna delle precedenti

---

3 L'equazione differenziale $y'' = te^y - \operatorname{sen} t$ è

- A un'equazione lineare del primo ordine
- B un'equazione lineare del secondo ordine
- C un'equazione non lineare del primo ordine
- D un'equazione non lineare del secondo ordine

---

4 La funzione $f(x) = \log_{1/2} x$

- A è definita in $\mathbb{R}$
- B è una funzione decrescente
- C è una funzione dispari
- D ha limite $-\infty$ per $x \to 0^+$

---

5 a) Scrivere la definizione di primitiva di una funzione f in un intervallo I.

---

6 Rappresentare il grafico di una funzione g che verifichi contemporaneamente le seguenti proprietà:

$$\lim_{x\to-\infty} g(x) = +\infty \qquad \lim_{x\to 2^-} g(x) = 1 \qquad \lim_{x\to 2^+} g(x) = -\infty \qquad \lim_{x\to+\infty} g(x) = -2$$

---

7 a) Enunciare il Teorema di de L'Hôpital;

b) per ciascuno dei seguenti tre limiti

$$\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen}(x^2) - \arccos x}{x^2 + \ln(1+2x)}, \qquad \lim_{x\to+\infty} \frac{3x^2 + \ln x}{7 - 5x}, \qquad \lim_{x\to\pi} \frac{e^{x-\pi} - \cos x}{x \operatorname{sen} x},$$

determinare se è possibile applicare il teorema ed eventualmente calcolarne il valore.

---

8 Data la funzione

$$g(x) = \frac{2 - \ln(x^5)}{x}$$

a) determinarne il dominio $\mathcal{D}$;

b) studiare il segno di g;

c) calcolare i limiti agli estremi del dominio e determinare gli eventuali asintoti;

d) determinare gli intervalli in cui la funzione è crescente, quelli in cui è decrescente, e gli eventuali punti di massimo/minimo relativo e/o assoluto;

e) determinare gli intervalli in cui la funzione è concava e quelli in cui è convessa;

f) disegnare un grafico approssimativo di g.

$\boxed{\mathbf{9}}$ Dato il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' = \dfrac{t^2 y^4}{\sqrt{t^3+1}} \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

a) dire se la funzione $y(t) = \cos(t^3)$ è soluzione del problema in $]-1, +\infty[$;

b) determinare una soluzione del problema nel caso in cui non lo sia la funzione di cui al punto precedente; oppure, alternativamente

b') calcolare i seguenti integrali

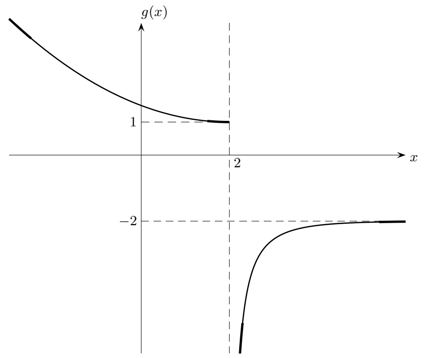
$$\int \Big(\frac{3\cos^2 x - 4}{\cos^2 x} - \frac{5}{x\sqrt{x}} \Big)\, dx, \qquad \int_0^{\pi} \frac{\operatorname{sen} t}{\sqrt[3]{3 - 2\cos t}}\, dx.$$

$\boxed{\mathbf{10}}$ Calcolare il polinomio di Taylor di grado 2 di $f(x) = x \operatorname{tg} x$ nel punto $x_0 = \pi/4$.

Soluzioni dei quesiti dell'esame del 8 luglio 2013

$\boxed{\mathbf{1}}$ A; $\boxed{\mathbf{2}}$ D; $\boxed{\mathbf{3}}$ D; $\boxed{\mathbf{4}}$ B; $\boxed{\mathbf{5}}$ consultare il libro di testo.

$\boxed{\mathbf{6}}$ In neretto si evidenziano le informazioni date dai limiti. Il grafico della funzione è quindi completato a piacere (linea sottile), per esempio:



$\boxed{\mathbf{7}}$ a) consultare il libro di testo; b) il primo limite è della forma $-(\pi/2)/0$, il secondo $+\infty/-\infty$, il terzo $2/0$. Il teorema si può applicare solamente al secondo limite, per il quale si ha

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{3x^2 + \ln x}{7 - 5x} \overset{H}{=} \lim_{x\to+\infty} \frac{6x + 1/x}{-5} = \lim_{x\to+\infty} \Big(-\frac{6}{5}x - \frac{1}{5x} \Big) = -\infty.$$

$\boxed{\mathbf{8}}$ a) Il dominio è individuato dagli x per cui $x^5 > 0$ quindi $\mathcal{D} =]0, +\infty[$ e la funzione è ivi continua e derivabile. Osserviamo inoltre che la funzione può essere scritta nella seguente forma

$$f(x) = \frac{2 - 5\ln x}{x}.$$

b) Poiché il denominatore è sempre positivo nel dominio $\mathcal{D}$, si ha che $f(x) \geq 0$ se e solo se $2-5\ln x \geq 0$ ovvero $\ln x \leq 2/5$ cioè $x \leq \mathrm{e}^{2/5}$. In definitiva

$$g(x) \begin{cases} > 0, & \text{se } x \in]0, \mathrm{e}^{2/5}[, \\ = 0, & \text{se } x = \mathrm{e}^{2/5}, \\ < 0, & \text{se } x \in]\mathrm{e}^{2/5}, +\infty[. \end{cases}$$

c) Ha senso andare a studiare i limiti a $+\infty$ e in 0 da destra. Si ha

$$\lim_{x\to 0^+} g(x) = \left[\frac{2+\infty}{0^+}\right] = +\infty,$$

$$\lim_{x\to+\infty} g(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{2-5\ln x}{x} = \left[\frac{-\infty}{+\infty}\right] \overset{H}{=} \lim_{x\to+\infty} \frac{-5/x}{1} = 0.$$

Da questa analisi segue che la retta $y=0$ è asintoto orizzontale a $+\infty$, mentre $x=0$ è asintoto verticale.

d) Calcoliamo la derivata prima:

$$g'(x) = \frac{-\frac{5}{x}x - (2-5\ln x)\cdot 1}{x^2} = \frac{5\ln x - 7}{x^2}.$$

La derivata è positiva quando $5\ln x - 7 \geq 0$ ovvero $\ln x \geq 7/5$ cioè $x \geq \mathrm{e}^{7/5}$. Quindi

$$g'(x) \begin{cases} < 0, & \text{se } x \in]0, \mathrm{e}^{7/5}[, \\ = 0, & \text{se } x = \mathrm{e}^{7/5}, \\ > 0, & \text{se } x \in]\mathrm{e}^{7/5}, +\infty[, \end{cases}$$

perciò la funzione è crescente in $]\mathrm{e}^{7/5}, +\infty[$, mentre è decrescente in $]0, \mathrm{e}^{7/5}[$. In $x = \mathrm{e}^{7/5}$ ammette un minimo relativo relativo e assoluto. Dal punto c) si vede subito che la funzione non possiede massimo.

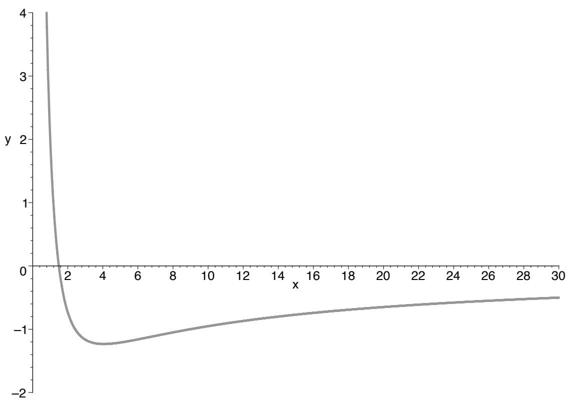
e) Calcoliamo la derivata seconda:

$$g''(x) = \frac{\frac{5}{x}x^2 - (5\ln x - 7)2x}{x^4} = \frac{19 - 10\ln x}{x^3}.$$

Il denominatore è positivo quando $x > 0$, il numeratore quando $19 - 10\ln x \geq 0$ ovvero $\ln x \leq 19/10$ cioè $x \leq \mathrm{e}^{19/10}$. Quindi

$$g''(x) \begin{cases} > 0, & \text{se } x \in]0, \mathrm{e}^{19/10}[, \\ = 0, & \text{se } x = \mathrm{e}^{19/10}, \\ < 0, & \text{se } x \in]\mathrm{e}^{19/10}, +\infty[, \end{cases}$$

perciò la funzione è convessa in $]0, \mathrm{e}^{19/10}[$, mentre è concava in $]\mathrm{e}^{19/10}, +\infty[$.



$\boxed{9}$ a) Si ha $y'(t) = -3t^2 \operatorname{sen}(t^3)$. Sostituendo si ottiene l'equazione

$$-3t^2 \operatorname{sen}(t^3) = \frac{t^2(\cos(t^3))^4}{\sqrt{t^3+1}},$$

che non è identicamente soddisfatta per $t > -1$ (ad esempio, per $t = \sqrt[3]{\pi}$ si ottiene $0 \neq \frac{\sqrt[3]{\pi^2}}{\sqrt{\pi+1}}$). La funzione non è dunque soluzione. Si osservi che la funzione soddisfa la seconda condizione $y(0) = 1$.
b) Scrivendo $y' = \frac{dy}{dt}$ e utilizzando il metodo di separazione delle variabili si ha

$$\frac{1}{y^4}\,dy = \frac{t^2}{\sqrt{t^3+1}}\,dt \qquad \Longrightarrow \qquad \int y^{-4}\,dy = \int \frac{t^2}{\sqrt{t^3+1}}\,dt,$$

e utilizzando le tabelle

$$\frac{y^{-3}}{-3} = \frac{1}{3}\int (3t^2)(t^3+1)^{-1/2}\,dt \qquad \Longrightarrow \qquad -\frac{1}{3y^3} = \frac{1}{3}\frac{(t^3+1)^{1/2}}{1/2} + c = \frac{2}{3}\sqrt{t^3+1} + c,$$

dove c è la generica costante d'integrazione. Risolvendo in y si ottiene

$$y^3 = \frac{1}{-3c - 2\sqrt{t^3+1}} \qquad \Longleftrightarrow \qquad y = \frac{1}{\sqrt[3]{-3c - 2\sqrt{t^3+1}}}.$$

Imponendo la condizione $y(0) = 1$ si ottiene $1 = \frac{1}{-3c-2}$, da cui si ricava $c = -1$. La soluzione è quindi

$$y(t) = \frac{1}{\sqrt[3]{3 - 2\sqrt{t^3+1}}}.$$

Alternativamente, si poteva utilizzare direttamente la formula risolutiva per le equazioni a variabili separabili (insieme alla formula fondamentale del calcolo integrale)

$$\int_1^y z^{-4}\,dz = \int_0^t \frac{s^2}{\sqrt{s^3+1}}\,ds \quad \Longrightarrow \quad \left[\frac{z^{-3}}{-3}\right]_1^y = \left[\frac{2}{3}\sqrt{s^3+1}\right]_0^t$$
$$\Longrightarrow \quad \frac{1}{3} - \frac{1}{3y^3} = \frac{2}{3}\sqrt{t^3+1} - \frac{2}{3},$$

che risolta rispetto a y fornisce la soluzione cercata.
b') Dalle tabelle si ottiene

$$\int \Big(\frac{3\cos^2 x - 4}{\cos^2 x} - \frac{5}{x\sqrt{x}}\Big)\,dx = \int 3\,dx - 4\int \frac{1}{\cos^2 x}\,dx - 5\int x^{-3/2}\,dx$$
$$= 3x - 4\operatorname{tg} x - 5\frac{x^{-1/2}}{-1/2} + c = 3x - 4\operatorname{tg} x + \frac{10}{\sqrt{x}} + c,$$

con c costante arbitraria. Per il teorema fondamentale del calcolo si ha

$$\int_0^\pi \frac{\operatorname{sen} t}{\sqrt[3]{3 - 2\cos t}}\,dx = \frac{1}{2}\int_0^\pi (2\operatorname{sen} t)(3 - 2\cos t)^{-1/3}\,dx = \frac{1}{2}\int_0^\pi (3 - 2\cos t)'(3 - 2\cos t)^{-1/3}\,dx$$
$$= \frac{1}{2}\Big[\frac{(3 - 2\cos t)^{2/3}}{2/3}\Big]_0^\pi = \frac{3}{4}(5^{2/3} - 1).$$

$\boxed{10}$ Si ha $f'(x) = \operatorname{tg} x + \frac{x}{\cos^2 x}$ e $f''(x) = \frac{2}{\cos^2 x} + \frac{2x\operatorname{sen} x}{\cos^3 x}$ da cui $f(\pi/4) = \pi/4$, $f'(\pi/4) = 1 + \pi/2$, $f''(\pi/4) = 4 + \pi$ perciò il polinomio di Taylor cercato è

$$P(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2}(x - x_0)^2 = \frac{\pi}{4} + \frac{2+\pi}{2}\Big(x - \frac{\pi}{4}\Big) + \frac{4+\pi}{2}\Big(x - \frac{\pi}{4}\Big)^2.$$

Appello del 24 settembre 2013

1 Se $\lim_{x\to x_0} f(x) = 0^+$ e $\lim_{x\to x_0} g(x) = -\infty$, allora $\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)}$ è

A $-\infty$

B $+\infty$

C 0

D non ci sono elementi sufficienti per rispondere

---

2 Se f è una funzione derivabile due volte in $]a,b[$ e tale che $f''(x) < 0$ per $x \in]a,b[$, allora

A f è crescente in $[a,b]$

B f è convessa in $[a,b]$

C f è concava in $[a,b]$

D f è decrescente in $[a,b]$

---

3 L'equazione differenziale $y' = \log t - e^t y \,\mathrm{sen}\, t$ è

A un'equazione lineare del primo ordine

B un'equazione lineare del secondo ordine

C un'equazione non lineare del primo ordine

D un'equazione non lineare del secondo ordine

---

4 La funzione $f(x) = \arccos x$

A è definita in $\mathbb{R}$

B è una funzione decrescente

C è definita in $[0,\pi]$

D è derivabile nel suo dominio

---

5 a) Scrivere la definizione di derivata di una funzione f in un punto x_0.

---

6 Rappresentare il grafico di una funzione g che verifichi contemporaneamente le seguenti proprietà:

$$\lim_{x\to-\infty} g(x) = +\infty \qquad \lim_{x\to 1^-} g(x) = -\infty \qquad \lim_{x\to 1^+} g(x) = -2 \qquad \lim_{x\to+\infty} g(x) = 1$$

7 a) Enunciare il Teorema di de L'Hôpital;

b) per ciascuno dei seguenti tre limiti

$$\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{arcsen} x - \operatorname{sen}(2x - x^2)}{e^{2x} - \cos x}, \qquad \lim_{x\to +\infty} \frac{(1/2)^x - 5}{3^x + 4x + 1}, \qquad \lim_{x\to 1} \frac{\operatorname{sen} x + (x-1)^2}{x^2 - 3x + 2},$$

determinare se è possibile applicare il teorema ed eventualmente calcolarne il valore.

---

8 Data la funzione

$$g(x) = \frac{x^3}{x^2 - 1}$$

a) determinarne il dominio $\mathcal{D}$;

b) studiare il segno di g;

c) calcolare i limiti agli estremi del dominio e determinare gli eventuali asintoti;

d) determinare gli intervalli in cui la funzione è crescente, quelli in cui è decrescente, e gli eventuali punti di massimo/minimo relativo;

e) determinare gli intervalli in cui la funzione è concava e quelli in cui è convessa;

f) disegnare un grafico approssimativo di g

---

9 Dato il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' = y(3 + \ln y)\cos t \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

a) dire se la funzione $y(t) = e^{3t}$ è soluzione del problema;

b) determinare una soluzione del problema nel caso in cui non lo sia la funzione di cui al punto precedente; oppure, alternativamente

b') calcolare i seguenti integrali

$$\int \left(\frac{4 - \sqrt{x}}{3x} + \frac{3}{4^x} \right) dx, \qquad \int_1^3 \frac{e^{3x}}{2 + e^{3x}}\, dx.$$

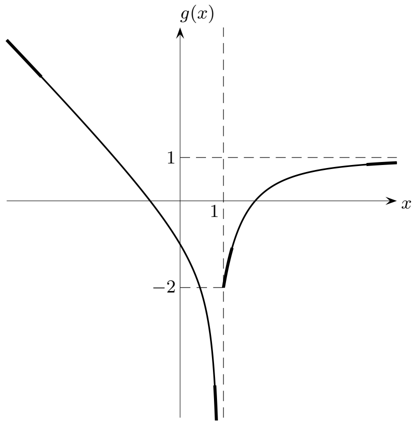
---

10 Calcolare il polinomio di Taylor di grado 2 di $f(x) = e^{2x} \cos x$ nel punto $x_0 = 0$.

Soluzioni dei quesiti dell'esame del 24 settembre 2013

1 C; **2** C; **3** A; **4** B; **5** consultare il libro di testo.

6 In neretto si evidenziano le informazioni date dai limiti. Il grafico della funzione è quindi completato a piacere (linea sottile), per esempio:



7 a) consultare il libro di testo; b) il primo limite è della forma $0/0$, il secondo $-5/+\infty$, il terzo $\operatorname{sen} 1/0$. Il teorema si può applicare solamente al primo limite, per il quale si ha

$$\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{arcsen} x - \operatorname{sen}(2x-x^2)}{e^{2x}-\cos x} \overset{H}{=} \lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}-(2-2x)\cos(2x-x^2)}{2e^{2x}+\operatorname{sen} x} = \frac{1-2}{2+0} = -\frac{1}{2}.$$

8 a) La funzione è definita per $x^2-1\neq 0$, perciò il dominio è $\mathcal{D}=\mathbb{R}\setminus\{-1,1\}$ e la funzione (razionale) è ivi continua e derivabile. Osserviamo che g è funzione dispari, dunque potremmo limitarci a studiarne il grafico per gli $x\geq 0$ ottenendo il grafico relativo agli $x<0$ per simmetria rispetto all'origine.

b) Il numeratore è positivo se $x\geq 0$, il denominatore è positivo se $x^2-1>0$ ovvero $x<-1$ oppure $x>1$. In definitiva la funzione è positiva per $-1<x<0$ e $x>1$, negativa per $x<-1$ e $0<x<1$. Si annulla in $x=0$.

c) Ha senso andare a studiare i limiti in 1, in -1 ed a $\pm\infty$. Si ha

$$\lim_{x\to\pm\infty} g(x) = \lim_{x\to\pm\infty}\frac{x}{1-1/x^2} = \left[\frac{\pm\infty}{1}\right] = \pm\infty,$$

$$\lim_{x\to 1^\pm} g(x) = \left[\frac{1}{0^\pm}\right] = \pm\infty, \qquad \lim_{x\to -1^\pm} g(x) = \left[\frac{-1}{0^\mp}\right] = \pm\infty,$$

quindi la funzione non ammette massimo né minimo. Asintoti: le rette di equazione $x=-1$ e $x=1$ sono asintoti verticali. Per quanto riguarda quelli obliqui si ha

$$m=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{g(x)}{x} = \lim_{x\to\pm\infty}\frac{x^3}{x^3-x} = 1, \quad q=\lim_{x\to\pm\infty}[g(x)-x] = \lim_{x\to\pm\infty}\frac{x}{x^2-1} = 0,$$

dunque la retta di equazione $y=x$ è asintoto a $-\infty$ e a $+\infty$.

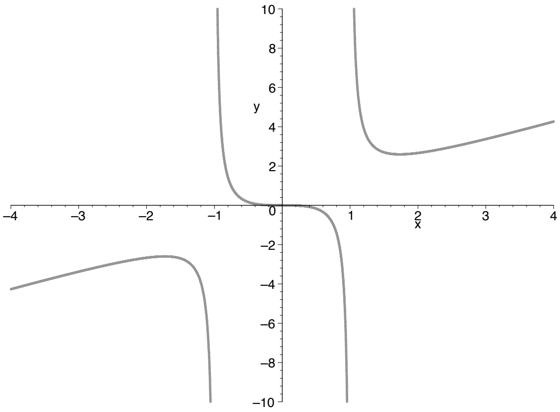
d) La derivata prima è

$$g'(x) = \frac{3x^2(x^2-1)-x^3 2x}{(x^2-1)^2} = \frac{x^4-3x^2}{(x^2-1)^2} = \frac{x^2(x^2-3)}{(x^2-1)^2}.$$

Il numeratore è positivo quando $x^2-3>0$ cioè se e solo se $x<-\sqrt{3}$ oppure $x>\sqrt{3}$, il denominatore è sempre positivo nel dominio. Inoltre la derivata si annulla in $x=0$, $x=\pm\sqrt{3}$, quindi

$$g'(x)\begin{cases} <0, & \text{se } x\in]-\sqrt{3},-1[\cup]-1,0[\cup]0,1[\cup]1,\sqrt{3}[,\\ =0, & \text{se } x=0 \text{ oppure } x=-\sqrt{3} \text{ oppure } x=\sqrt{3},\\ >0, & \text{se } x\in]-\infty,-\sqrt{3}[\cup]\sqrt{3},+\infty[,\end{cases}$$

perciò la funzione è crescente in $]-\infty,-\sqrt{3}[$ e in $]\sqrt{3},+\infty[$, mentre è decrescente in $]-\sqrt{3},-1[$, in $]-1,1[$ e in $]1,\sqrt{3}[$. In $x=-\sqrt{3}$ e $x=\sqrt{3}$ ammette, rispettivamente, un massimo e un minimo relativo. In $x=0$ la funzione ha un punto di flesso a tangente orizzontale.



e) La derivata seconda è

$$\begin{aligned}g''(x) &= \frac{(4x^3-6x)(x^2-1)^2-(x^4-3x^2)2(x^2-1)2x}{(x^2-1)^4}\\ &= \frac{(4x^3-6x)(x^2-1)-(x^4-3x^2)4x}{(x^2-1)^3} = \frac{2x(x^2+3)}{(x^2-1)^3}.\end{aligned}$$

Il numeratore è positivo quando $x \geq 0$, il denominatore è positivo se $(x^2-1)^3 > 0$ cioè se e solo se $x^2-1>0$ ovvero se $x<-1$ oppure $x>1$. In definitiva

$$g''(x)\begin{cases} <0, & \text{se } x \in]-\infty,-1[\cup]0,1[,\\ =0, & \text{se } x=0,\\ >0, & \text{se } x\in]-1,0[\cup]1,+\infty[,\end{cases}$$

perciò la funzione è concava in $]-\infty,-1[$ e in $]0,1[$, mentre è convessa in $]-1,0[$ e in $]1,+\infty[$. Come già osservato in precedenza, in $x=0$ la funzione ha un punto di flesso a tangente orizzontale.

9 a) Si ha $y'(t) = 3e^{3t}$. Sostituendo si ottiene l'equazione

$$3e^{3t} = e^{3t}(3+\ln e^{3t})\cos t,$$

che non è identicamente soddisfatta per $t\in\mathbb{R}$ (ad esempio, per $t=\pi/2$ si ottiene $3e^{3\pi/2}\neq 0$). La funzione non è dunque soluzione. Si osservi che la funzione soddisfa la seconda condizione $y(0)=1$.

b) Scrivendo $y' = \frac{dy}{dt}$ e utilizzando il metodo di separazione delle variabili si ha

$$\frac{1}{y(3+\ln y)}\,dy = \cos t\,dt \qquad\Longrightarrow\qquad \int\frac{1}{y(3+\ln y)}\,dy = \int \cos t\,dt.$$

Ricordando che una primitiva del coseno è il seno e utilizzando le tabelle si ottiene

$$\int\frac{1}{y(3+\ln y)}\,dy = \int\frac{(\ln y)'}{3+\ln y}\,dy = \ln|3+\ln y| \qquad\Longrightarrow\qquad \ln|3+\ln y| = \operatorname{sen} t + c,$$

dove c è la generica costante d'integrazione. Osservando che dovrà essere $y(0)=1$, si può supporre (almeno per i t vicini a 0) che $3+\ln y(t)>0$, perciò risolvendo in y si ottiene

$$3+\ln y = e^{\operatorname{sen} t+c} \qquad\Longleftrightarrow\qquad y=\exp\left(e^{\operatorname{sen} t+c}-3\right).$$

Imponendo la condizione $y(0)=1$ si ottiene $3=e^c$, da cui si ricava $c=\ln 3$. La soluzione è quindi

$$y(t) = \exp\left(3e^{\operatorname{sen} t}-3\right).$$

Alternativamente, si poteva utilizzare direttamente la formula risolutiva per le equazioni a variabili separabili (insieme alla formula fondamentale del calcolo integrale)

$$\int_1^y \frac{1}{z(3+\ln z)}\,dz = \int_0^t \cos s\,ds \quad\Longrightarrow\quad \Big[\ln|3+\ln z|\Big]_1^y = \Big[\operatorname{sen} s\Big]_0^t$$
$$\Longrightarrow\quad \ln|3+\ln y| - \ln 3 = \operatorname{sen} t,$$

che risolta rispetto a y fornisce la soluzione cercata.

c) Dalle tabelle si ottiene

$$\int \Big(\frac{4-\sqrt{x}}{3x} + \frac{3}{4^x}\Big)\,dx = \frac{4}{3}\int \frac{1}{x}\,dx - \frac{1}{3}\int x^{-1/2}\,dx + 3\int (1/4)^x\,dx$$
$$= \frac{4}{3}\ln|x| - \frac{1}{3}\frac{x^{1/2}}{1/2} + 3\frac{(1/4)^x}{\ln(1/4)} + c = \frac{4}{3}\ln|x| - \frac{2}{3}\sqrt{x} - \frac{3}{4^x\ln 4} + c,$$

con c costante arbitraria. Per il teorema fondamentale del calcolo si ha

$$\int_1^3 \frac{e^{3x}}{2+e^{3x}}\,dx = \frac{1}{3}\int_1^3 \frac{(e^{3x})'}{2+e^{3x}}\,dx = \frac{1}{3}\Big[\ln(2+e^{3x})\Big]_1^3 = \frac{1}{3}\ln\frac{2+e^9}{2+e^3}.$$

10 Si ha $f'(x) = 2e^{2x}\cos x - e^{2x}\operatorname{sen} x$ e $f''(x) = 3e^{2x}\cos x - 4e^x\operatorname{sen} x$ da cui $f(0) = 1$, $f'(0) = 2$, $f''(0) = 3$ perciò il polinomio di Taylor cercato è

$$P(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + \frac{f''(x_0)}{2}(x-x_0)^2 = 1 + 2x + \frac{3}{2}x^2.$$