



Corso di Laurea in Biotecnologie

MODULO DI MATEMATICA

Esame del 29/01/2013

N.B.: scrivere nome, cognome e numero di matricola su ogni foglio consegnato.
Tempo a disposizione: 2.5 ore

1 Se $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = -\infty$ e $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = +\infty$, allora $\lim_{x \rightarrow x_0} (f(x) - g(x))$ è

- A $-\infty$
- B $+\infty$
- C 0
- D non ci sono elementi sufficienti per rispondere

2 Se f è una funzione derivabile su $]a, b[$ e vale $f'(x) < 0$ per ogni $x \in]a, b[$, allora

- A f è crescente in $]a, b[$
- B f è decrescente in $]a, b[$
- C f è concava in $]a, b[$
- D f è convessa in $]a, b[$

3 L'equazione differenziale $y' = t \operatorname{sen} y + 5t$ è

- A un'equazione lineare del primo ordine
- B un'equazione lineare del secondo ordine
- C un'equazione non lineare del primo ordine
- D un'equazione non lineare del secondo ordine

4 Il grafico della funzione $f(x) = \frac{1 - 3x - x^2}{2 - 7}$ rappresenta

- A una retta
- B una parabola
- C un'iperbole
- D nessuna delle precedenti

5 a) Scrivere il generico problema di Cauchy associato all'equazione $y' = f(t, y)$ e dare la definizione di una sua soluzione.

6 Rappresentare il grafico di una funzione g che verifichi contemporaneamente le seguenti proprietà:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = -2 \quad \lim_{x \rightarrow -1^-} g(x) = -\infty \quad \lim_{x \rightarrow -1^+} g(x) = 1 \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = +\infty$$

7 a) Enunciare il Teorema di de L'Hôpital;
 b) per ciascuno dei seguenti tre limiti

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{3x - \cos x}{4 \operatorname{sen} x + e^{2x} - 1}, \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x + \operatorname{sen}(x^2)}{4 \operatorname{tg} x + 3x}, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2^x + x}{3^{-x} + 1},$$

determinare se è possibile applicare il teorema ed eventualmente calcolarne il valore.

8 Data la funzione

$$g(x) = \frac{2x + 1}{x^3}$$

- a) determinare il dominio \mathcal{D} ;
- b) studiare il segno di g ;
- c) calcolare i limiti agli estremi del dominio e determinare gli eventuali asintoti;
- d) determinare gli intervalli in cui la funzione è crescente, quelli in cui è decrescente, e gli eventuali punti di massimo/minimo relativo e/o assoluto;
- e) determinare gli intervalli in cui la funzione è convessa e quelli in cui è concava;
- f) disegnare un grafico approssimativo di g .

9 Dato il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' = \frac{y}{\ln^2 y} (\cos(2t) - 2t^3) \\ y(0) = e \end{cases}$$

- a) dire se la funzione $y(t) = e^{1-2t}$ è soluzione del problema;
- b) determinare una soluzione del problema nel caso in cui non lo sia la funzione di cui al punto precedente; oppure, alternativamente
- b') calcolare i seguenti integrali

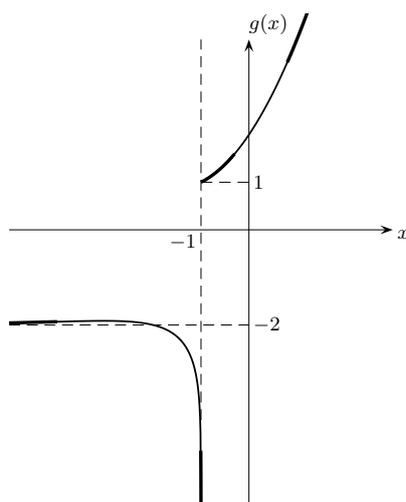
$$\int \left(\frac{x^2 + 2\sqrt{x}}{x} - 3 \operatorname{sen} x \right) dx \quad \int_1^e \frac{\ln^3 x}{3x} dx.$$

10 Calcolare il polinomio di Taylor di grado 2 della funzione $f(x) = e^{-2x}$ nel punto $x_0 = -1$.

Soluzioni dei quesiti dell'esame del 29 gennaio 2013

1 A; **2** B; **3** C; **4** B; **5** consultare il libro di testo.

6 In neretto si evidenziano le informazioni date dai limiti. Il grafico della funzione è quindi completato a piacere (linea sottile), per esempio:



- 7 a) consultare il libro di testo; b) il primo limite è della forma $-1/0$, il secondo $0/0$, il terzo $+\infty/1$. Il teorema si può applicare solamente al secondo limite, per il quale si ha

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x + \sin(x^2)}{4 \operatorname{tg} x + 3x} \stackrel{H}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 + 2x \cos(x^2)}{4(1 + \operatorname{tg}^2 x) + 3} = \frac{2}{7}.$$

- 8 a) Il dominio è $\mathcal{D} = \mathbb{R} \setminus \{0\}$ e la funzione è ivi continua e derivabile.
 b) Il numeratore è positivo quando $x > -1/2$, il denominatore è positivo quando $x > 0$, quindi g è positiva quando $x > 0$ oppure $x < -1/2$, negativa quando $-1/2 < x < 0$ e si annulla in $x = -1/2$.
 c) Ha senso andare a studiare i limiti in 0 e a $\pm\infty$. Si ha

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{2 + 1/x}{x^2} = \left[\frac{2}{+\infty} \right] = 0, \quad \lim_{x \rightarrow 0^\pm} g(x) = \left[\frac{1}{0^\pm} \right] = \pm\infty,$$

quindi il limite in $x_0 = 0$ non esiste e inoltre la funzione non ammette massimo né minimo.

d) La derivata prima è

$$g'(x) = \frac{2x^3 - (2x + 1)3x^2}{x^6} = \frac{2x - (2x + 1)3}{x^4} = -\frac{4x + 3}{x^4}.$$

Il numeratore è positivo quando $x \geq -3/4$, il denominatore è sempre positivo nel dominio, quindi

$$g'(x) \begin{cases} < 0, & \text{se } x \in] -3/4, 0[\cup] 0, +\infty[, \\ = 0, & \text{se } x = -3/4, \\ > 0, & \text{se } x \in] -\infty, -3/4[. \end{cases}$$

perciò la funzione è decrescente in $] -3/4, 0[$ e in $] 0, +\infty[$, mentre è crescente in $] -\infty, -3/4[$.

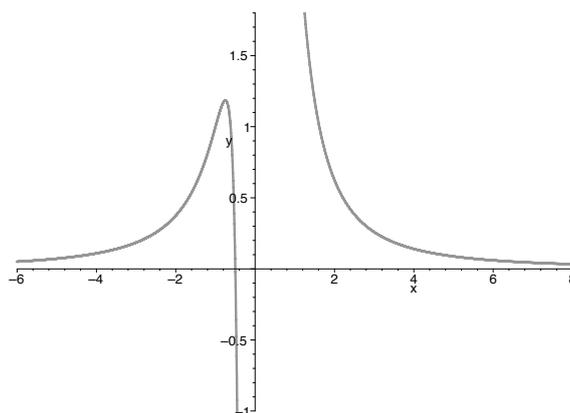
e) Calcoliamo la derivata seconda:

$$g''(x) = -\frac{4 \cdot x^4 - (4x + 3)4x^3}{x^8} = -\frac{4x - (4x + 3)4}{x^5} = \frac{12x + 12}{x^5}.$$

Il numeratore è positivo quando $x \geq -1$, il denominatore è positivo se $x > 0$, quindi

$$g''(x) \begin{cases} < 0, & \text{se } x \in] -1, 0[, \\ = 0, & \text{se } x = 1, \\ > 0, & \text{se } x \in] -\infty, -1[\cup] 0, +\infty[. \end{cases}$$

In definitiva la funzione è convessa in $] -\infty, -1[$ e in $] 0, +\infty[$, concava in $] -1, 0[$.



9 a) Si ha $y'(t) = -2e^{1-2t}$ e sostituendo si ottiene l'equazione

$$-2e^{1-2t} = \frac{e^{1-2t}}{\ln^2(e^{1-2t})} (\cos(2t) - 2t^3)$$

che non è identicamente soddisfatta per $t \in \mathbb{R}$ (ad esempio, per $t = 0$ si ottiene $-2e \neq e$). La funzione non è dunque soluzione. Si osservi che la funzione soddisfa invece la seconda condizione, essendo $y(0) = e$.

b) Scrivendo $y' = \frac{dy}{dt}$ e utilizzando il metodo di separazione delle variabili si ha

$$\frac{\ln^2 y}{y} dy = (\cos(2t) - 2t^3) dt$$

e integrando (utilizzando le tabelle)

$$\int \frac{\ln^2 y}{y} dy = \int (\cos(2t) - 2t^3) dt \implies \frac{\ln^3 y}{3} = \frac{\text{sen}(2t)}{2} - \frac{t^4}{2} + c,$$

dove c è la generica costante d'integrazione. Quest'ultima equazione è equivalente a

$$\ln^3 y = \frac{3 \text{sen}(2t)}{2} - \frac{3t^4}{2} + 3c \iff y = \exp \sqrt[3]{\frac{3 \text{sen}(2t)}{2} - \frac{3t^4}{2} + 3c}.$$

Imponendo la condizione $y(0) = e$ (nella prima delle due equazioni qui sopra) si ricava $1^3 = 3c$ che risolta nell'incognita c fornisce $c = 1/3$. La soluzione è quindi

$$y(t) = \exp \sqrt[3]{\frac{3 \text{sen}(2t)}{2} - \frac{3t^4}{2} + 1}.$$

Alternativamente, si poteva utilizzare direttamente la formula risolutiva per le equazioni a variabili separabili (insieme alla formula fondamentale del calcolo integrale)

$$\begin{aligned} \int_e^y \frac{\ln^2 z}{z} dz &= \int_0^t (\cos(3s) - 2s^3) ds \implies \left[\frac{\ln^3 z}{3} \right]_e^y = \left[\frac{\text{sen}(2s)}{2} - \frac{s^4}{2} \right]_0^t \\ &\implies \frac{\ln^3 y}{3} - \frac{1}{3} = \frac{\text{sen}(2t)}{2} - \frac{t^4}{2}, \end{aligned}$$

che risolvendo rispetto a y fornisce la soluzione cercata.

b') Dalla prima tabella si ottiene

$$\begin{aligned} \int \left(\frac{x^2 + 2\sqrt{x}}{x} - 3 \text{sen } x \right) dx &= \int x dx + 2 \int x^{-1/2} dx - 3 \int \text{sen } x dx \\ &= \frac{x^2}{2} + 2 \frac{x^{1/2}}{1/2} + 3 \cos x + c = \frac{x^2}{2} + 4\sqrt{x} + 3 \cos x + c, \end{aligned}$$

con c costante arbitraria. Utilizzando la seconda tabella e il Teorema fondamentale del calcolo si ha

$$\int_1^e \frac{\ln^3 x}{3x} dx = \frac{1}{3} \int_1^e \ln^3 x (\ln x)' dx = \frac{1}{3} \left[\frac{\ln^4 x}{4} \right]_1^e = \frac{1}{3} \left(\frac{1}{4} - 0 \right) = \frac{1}{12}.$$

- 10** Si ha $f'(x) = -2e^{-2x}$ e $f''(x) = 4e^{-2x}$ da cui $f(-1) = e^2$, $f'(-1) = -2e^2$, $f''(-1) = 4e^2$ perciò il polinomio di Taylor cercato è

$$P(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2}(x - x_0)^2 = e^2 - 2e^2(x + 1) + 2e^2(x + 1)^2.$$

Appello del 29 gennaio 2013 - Tema B

N.B.: scrivere nome, cognome e numero di matricola su ogni foglio consegnato.
 Tempo a disposizione: 2.5 ore

- 1** Se $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = 0$ e $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = +\infty$, allora $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)}$ è

- A $-\infty$
- B $+\infty$
- C 0
- D non ci sono elementi sufficienti per rispondere

- 2** Se f è una funzione derivabile due volte su $]a, b[$ con $f''(x) < 0$ per ogni $x \in]a, b[$, allora

- A f è crescente in $]a, b[$
- B f è decrescente in $]a, b[$
- C f è concava in $]a, b[$
- D f è convessa in $]a, b[$

- 3** L'equazione differenziale $y'' = t^2 y - 2y' \sin t$ è

- A un'equazione lineare del primo ordine
- B un'equazione lineare del secondo ordine
- C un'equazione non lineare del primo ordine
- D un'equazione non lineare del secondo ordine

4 Il grafico della funzione $f(x) = \frac{2 + 3x^2}{2x^2 - 1}$ rappresenta

- A** una retta
 - B** una parabola
 - C** un'iperbole
 - D** nessuna delle precedenti
-

5 a) Scrivere la definizione di asintoto obliquo a $+\infty$ per una funzione $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$;
 b) quale delle seguenti tre funzioni $f(x) = x^2$, $g(x) = \ln x$, $h(x) = x + \frac{1}{x}$ ammette asintoto per $x \rightarrow +\infty$? Argomentare la risposta.

6 Rappresentare il grafico di una funzione g che verifichi contemporaneamente le seguenti proprietà:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = +\infty \qquad \lim_{x \rightarrow 2^-} g(x) = -1 \qquad \lim_{x \rightarrow 2^+} g(x) = 3 \qquad \lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = 0$$

7 a) Enunciare il Teorema del valore medio di Lagrange;
 b) determinare, argomentando, a quale delle tre funzioni $f(x) = |x|$, $g(x) = \frac{3x+1}{x-2}$, $h(x) = \ln(x^2)$ è possibile applicare il teorema nell'intervallo $[-1, 1]$.

8 Data la funzione

$$g(x) = \frac{3 - 2x}{x^3}$$

- a) determinare il dominio \mathcal{D} ;
 - b) studiare il segno di g ;
 - c) calcolare i limiti agli estremi del dominio e determinare gli eventuali asintoti;
 - d) determinare gli intervalli in cui la funzione è crescente, quelli in cui è decrescente, e gli eventuali punti di massimo/minimo relativo e/o assoluto;
 - e) determinare gli intervalli in cui la funzione è convessa e quelli in cui è concava;
 - f) disegnare un grafico approssimativo di g .
-

9 Dato il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' = \frac{y}{\ln^3 y} (t^2 + \sin(2t)) \\ y(0) = e \end{cases}$$

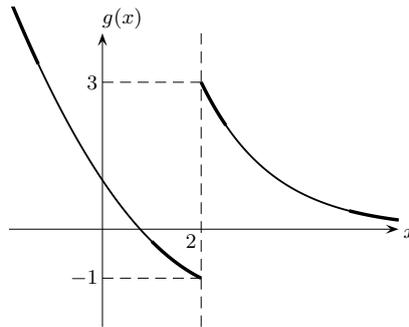
- a) dire se la funzione $y(t) = e^{1+3t}$ è soluzione del problema;
- b) determinare una soluzione del problema nel caso in cui non lo sia la funzione di cui al punto precedente; oppure,alternativamente
- b') Calcolare i seguenti integrali

$$\int \left(\frac{x^2 - 2}{\sqrt{x}} + 5 \cos x \right) dx, \qquad \int_1^e \frac{\ln^4 x}{2x} dx.$$

10 Calcolare il polinomio di Taylor di grado 2 della funzione $f(x) = \sin(3x)$ nel punto $x_0 = \pi/2$.

Soluzioni dei quesiti dell'esame del 29 gennaio 2013

- 1** C; **2** C; **3** B; **4** D; **5** a) consultare il libro di testo; b) si ha $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = +\infty$ quindi f non ammette asintoto, $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{g(x)}{x} = 0$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} (g(x) - 0 \cdot x) = +\infty$ quindi neppure g ammette asintoto, mentre $\lim_{x \rightarrow +\infty} (h(x) - x) = 0$ quindi la retta $y = x$ è un asintoto di h a $+\infty$.
- 6** In neretto si evidenziano le informazioni date dai limiti. Il grafico della funzione è quindi completato a piacere (linea sottile), per esempio:



- 7** a) consultare il libro di testo;
- 8** a) Il dominio è $\mathcal{D} = \mathbb{R} \setminus \{0\}$ e la funzione è ivi continua e derivabile.
- b) Il numeratore è positivo quando $3 - 2x \geq 0$ cioè $x \leq 3/2$, il denominatore è positivo quando $x > 0$, quindi g è negativa quando $x > 3/2$ oppure $x < 0$, positiva quando $0 < x < 3/2$ e si annulla in $x = 3/2$.
- c) Ha senso andare a studiare i limiti in 0 e a $\pm\infty$. Si ha

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{3/x - 2}{x^2} = \left[\frac{-2}{+\infty} \right] = 0, \quad \lim_{x \rightarrow 0^\pm} g(x) = \left[\frac{3}{0^\pm} \right] = \pm\infty,$$

quindi il limite in $x_0 = 0$ non esiste e inoltre la funzione non ammette massimo né minimo.

d) La derivata prima è

$$g'(x) = \frac{-2 \cdot x^3 - (3 - 2x)3x^2}{x^6} = \frac{-2x - (3 - 2x)3}{x^4} = \frac{4x - 9}{x^4}.$$

Il numeratore è positivo quando $x \geq 9/4$, il denominatore è sempre positivo nel dominio, quindi

$$g'(x) \begin{cases} < 0, & \text{se } x \in]-\infty, 0[\cup]0, 9/4[, \\ = 0, & \text{se } x = 9/4, \\ > 0, & \text{se } x \in]9/4, +\infty[, \end{cases}$$

perciò la funzione è decrescente in $]-\infty, 0[$ e in $]0, 9/4[$, mentre è crescente in $]9/4, +\infty[$. In $x = 9/4$ la funzione ha un punto di minimo relativo.

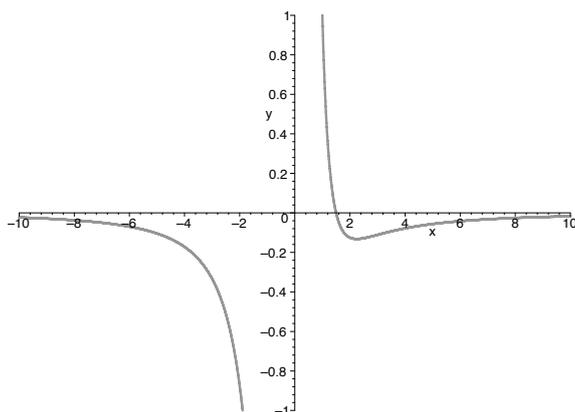
e) Calcoliamo la derivata seconda:

$$g''(x) = \frac{4 \cdot x^4 - (4x - 9)4x^3}{x^8} = \frac{4x - (4x - 9)4}{x^5} = \frac{36 - 12x}{x^5}.$$

Il numeratore è positivo quando $x \leq 3$, il denominatore è positivo se $x > 0$, quindi

$$g''(x) \begin{cases} > 0, & \text{se } x \in]0, 3[, \\ = 0, & \text{se } x = 3, \\ < 0, & \text{se } x \in]-\infty, 0[\cup]3, +\infty[. \end{cases}$$

In definitiva la funzione è concava in $]-\infty, 0[$ e in $]3, +\infty[$, convessa in $]0, 3[$.



9 a) Si ha $y'(t) = 3e^{1+3t}$ e sostituendo si ottiene l'equazione

$$3e^{1+3t} = \frac{e^{1+3t}}{\ln^3(e^{1+3t})}(t^2 + \text{sen}(2t))$$

che non è identicamente soddisfatta per $t \in \mathbb{R}$ (ad esempio, per $t = 0$ si ottiene $3e \neq 0$). La funzione non è dunque soluzione. Si osservi che la funzione soddisfa invece la seconda condizione, essendo $y(0) = e$.

b) Scrivendo $y' = \frac{dy}{dt}$ e utilizzando il metodo di separazione delle variabili si ha

$$\frac{\ln^3 y}{y} dy = (t^2 + \text{sen}(2t)) dt$$

e integrando (utilizzando le tabelle)

$$\int \frac{\ln^3 y}{y} dy = \int (t^2 + \text{sen}(2t)) dt \implies \frac{\ln^4 y}{4} = \frac{t^3}{3} - \frac{\cos(2t)}{2} + c,$$

dove c è la generica costante d'integrazione. Quest'ultima equazione è equivalente a

$$\ln^4 y = \frac{4t^3}{3} - 2 \cos(2t) + 4c \iff |\ln y| = \sqrt[4]{\frac{4t^3}{3} - 2 \cos(2t) + 4c},$$

e dovendo essere $y(0) = e$ si avrà $\ln y(t) > 0$ per t vicino a 0, per cui $|\ln y| = \ln y$ da cui

$$y = \exp \sqrt[4]{\frac{4t^3}{3} - 2 \cos(2t) + 4c}.$$

Imponendo la condizione $y(0) = e$ (nella prima delle tre equazioni qui sopra) si ricava $1^4 = -2 + 4c$ che risolta nell'incognita c fornisce $c = 3/4$. La soluzione è quindi

$$y(t) = \exp \sqrt[4]{\frac{4t^3}{3} - 2 \cos(2t) + 3}.$$

Alternativamente, si poteva utilizzare direttamente la formula risolutiva per le equazioni a variabili separabili (insieme alla formula fondamentale del calcolo integrale)

$$\begin{aligned} \int_e^y \frac{\ln^2 z}{z} dz &= \int_0^t (s^2 + \text{sen}(2s)) ds \implies \left[\frac{\ln^4 z}{4} \right]_e^y = \left[\frac{s^3}{3} - \frac{\cos(2s)}{2} \right]_0^t \\ &\implies \frac{\ln^4 y}{4} - \frac{1}{4} = \frac{t^3}{3} - \frac{\cos(2t)}{2} + \frac{1}{2} \end{aligned}$$

che risolvendo rispetto a y fornisce la soluzione cercata.

b') Dalla prima tabella si ottiene

$$\begin{aligned} \int \left(\frac{x^2 - 2}{\sqrt{x}} + 5 \cos x \right) dx &= \int x^{3/2} dx - 2 \int x^{-1/2} dx + 5 \int \cos x dx \\ &= \frac{x^{5/2}}{5/2} - 2 \frac{x^{1/2}}{1/2} + 5 \sin x + c = \frac{2}{5} x^2 \sqrt{x} - 4\sqrt{x} + 5 \sin x + c, \end{aligned}$$

con c costante arbitraria. Utilizzando la seconda tabella e il Teorema fondamentale del calcolo si ha

$$\int_1^e \frac{\ln^4 x}{x} dx = \frac{1}{2} \int_1^e \ln^4 x (\ln x)' dx = \frac{1}{2} \left[\frac{\ln^5 x}{5} \right]_1^e = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{5} - 0 \right) = \frac{1}{10}.$$

- 10** Si ha $f'(x) = 3 \cos(3x)$ e $f''(x) = -9 \sin(3x)$ da cui $f(\pi/2) = -1$, $f'(\pi/2) = 0$, $f''(\pi/2) = 9$ perciò il polinomio di Taylor cercato è

$$P(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2}(x - x_0)^2 = -1 + \frac{9}{2}(x - \pi/2)^2.$$

Appello del 19 febbraio 2013

N.B.: scrivere nome, cognome e numero di matricola su ogni foglio consegnato.

- 1** Se $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = -3$ e $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = 0$, allora $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)}$ è

- A $-\infty$
 B $+\infty$
 C 0
 D non ci sono elementi sufficienti per rispondere

- 2** Se f è una funzione derivabile due volte in $]a, b[$ e tale che $f'(x_0) = 0$ e $f''(x_0) < 0$ con $x_0 \in]a, b[$, allora

- A x_0 è punto di minimo relativo per f in $[a, b]$
 B x_0 è punto di massimo relativo per f in $[a, b]$
 C x_0 è punto di minimo assoluto per f in $[a, b]$
 D x_0 è punto di massimo assoluto per f in $[a, b]$

- 3** L'equazione differenziale $y' = 3t^2 - e^t y$ è

- A un'equazione lineare del primo ordine
 B un'equazione lineare del secondo ordine
 C un'equazione non lineare del primo ordine
 D un'equazione non lineare del secondo ordine

4 La funzione $f(x) = \sqrt[3]{x}$

- A è decrescente per $x < 0$ e crescente per $x > 0$
- B è una funzione dispari
- C è una funzione pari
- D è crescente per $x < 0$ e decrescente per $x > 0$

5 a) Scrivere la definizione di derivata di una funzione f in un punto x_0 .

6 Rappresentare il grafico di una funzione g che verifichi contemporaneamente le seguenti proprietà:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = -2 \quad \lim_{x \rightarrow 0^-} g(x) = 1 \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} g(x) = +\infty \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = +\infty$$

7 a) Enunciare il teorema fondamentale del calcolo integrale;
 b) per quali delle tre funzioni

$$f(x) = |x^2 - 2|, \quad g(x) = \begin{cases} x \operatorname{sgn} x & \text{se } x \neq 0 \\ 0 & \text{se } x = 0, \end{cases} \quad h(x) = \begin{cases} \frac{1 - \cos(2x)}{x^2} & \text{se } x \neq 0 \\ 1/2 & \text{se } x = 0 \end{cases}$$

è possibile applicare il teorema nell'intervallo $[-1, 3]$? (sgn è la funzione segno.)

8 Data la funzione

$$g(x) = \frac{x^3}{1-x}$$

- a) determinare il dominio \mathcal{D} ;
- b) studiare il segno di g ;
- c) calcolare i limiti agli estremi del dominio e determinare gli eventuali asintoti;
- d) determinare gli intervalli in cui la funzione è crescente, quelli in cui è decrescente, e gli eventuali punti di massimo/minimo relativo e/o assoluto;
- e) determinare gli intervalli in cui la funzione è convessa e quelli in cui è concava;
- f) disegnare un grafico approssimativo di g .

9 Dato il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' = y^4(3t - 1)e^t \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

- a) dire se la funzione $y(t) = (1-t)e^{2t}$ è soluzione del problema;
- b) determinare una soluzione del problema nel caso in cui non lo sia la funzione di cui al punto precedente; oppure, alternativamente
- b') calcolare i seguenti integrali

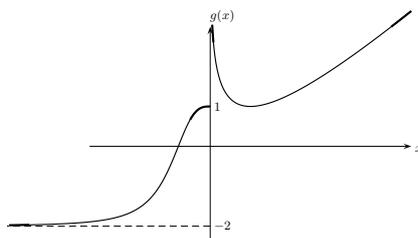
$$\int \left(\frac{\sin^2 x - 3x^2}{(x \sin x)^2} - \frac{3}{2+x^2} \right) dx \quad \int_0^2 (3x - 2x^2)e^{-2x} dx.$$

10 Calcolare il polinomio di Taylor di grado 2 di $f(x) = x \operatorname{sen} x$ nel punto $x_0 = \pi/2$.

Soluzioni dei quesiti dell'esame del 19 febbraio 2013

1 D; **2** B; **3** A; **4** B; **5** consultare il libro di testo.

6 In neretto si evidenziano le informazioni date dai limiti. Il grafico della funzione è quindi completato a piacere (linea sottile), per esempio:



7 a) consultare il libro di testo; b) anzitutto tutte le funzioni sono definite in $[-1, 3]$. f è continua dunque si può applicare il teorema; g è banalmente continua per $x \neq 0$ e inoltre si ha

$$\lim_{x \rightarrow 0} g(x) = \lim_{x \rightarrow 0} x \operatorname{sgn} x = [0 \cdot (\text{limitata})] = 0 = g(0),$$

dunque g è continua anche in 0 e si può applicare il teorema. Per ultimo, h è continua per $x \neq 0$ e si ha

$$\lim_{x \rightarrow 0} h(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos(2x)}{x^2} = 4 \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos(2x)}{(2x)^2} = 4 \cdot \frac{1}{2} = 2 \neq h(0),$$

quindi h non è continua in 0 e non si può applicare il teorema.

8 a) Il dominio è $\mathcal{D} = \mathbb{R} \setminus \{1\}$ e la funzione è ivi continua e derivabile.

b) Il numeratore è positivo se $x \geq 0$ il denominatore se $x < 1$ quindi la funzione è positiva se $0 < x < 1$, negativa se $x < 0$ oppure $x > 1$ e si annulla in $x = 0$.

c) Ha senso andare a studiare i limiti in 1 e a $\pm\infty$. Si ha

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x^2}{1/x - 1} = \left[\frac{+\infty}{-1} \right] = -\infty, \quad \lim_{x \rightarrow 1^\pm} g(x) = \left[\frac{1}{0^\mp} \right] = \mp\infty,$$

quindi il limite in $x_0 = 1$ non esiste ed inoltre la funzione non ammette massimo né minimo. La retta di equazione $x = 1$ è un asintoto verticale mentre, essendo $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} g(x)/x = \mp\infty$, non esistono asintoti obliqui.

d) La derivata prima è

$$g'(x) = \frac{3x^2(1-x) - x^3(-1)}{(1-x)^2} = \frac{3x^2 - 2x^3}{(1-x)^2} = \frac{x^2(3-2x)}{(1-x)^2}.$$

La derivata prima è dunque positiva se $3 - 2x > 0$ cioè $x < 3/2$ e si annulla in $x = 0$ oppure $x = 3/2$. Più precisamente

$$g'(x) \begin{cases} > 0, & \text{se } x \in]-\infty, 0[\cup]0, 1[\cup]1, 3/2[, \\ = 0, & \text{se } x = 0 \text{ oppure } x = 3/2, \\ < 0, & \text{se } x \in]3/2, +\infty[, \end{cases}$$

perciò la funzione è crescente in $] -\infty, 1[$ e in $]1, 3/2[$, mentre è decrescente in $]3/2, +\infty[$. In $x = 3/2$ ammette un massimo relativo.

e) Calcoliamo la derivata seconda:

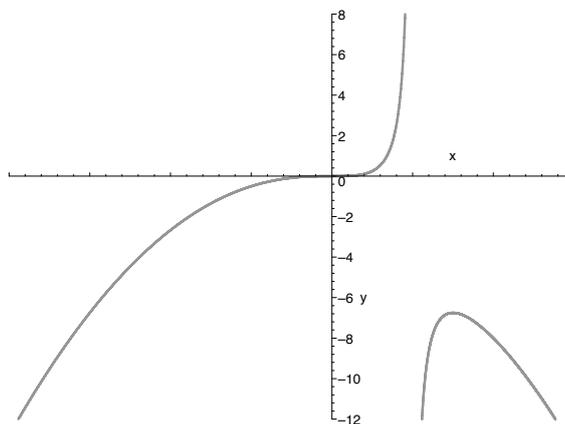
$$g''(x) = \frac{(6x - 6x^2)(1-x)^2 - (3x^2 - 2x^3)2(1-x)(-1)}{(1-x)^4} = \frac{(6x - 6x^2)(1-x) + (3x^2 - 2x^3)2}{(1-x)^3}$$

$$= \frac{2x^3 - 6x^2 + 6x}{(1-x)^3} = \frac{2x(x^2 - 3x + 3)}{(1-x)^3}.$$

Poiché $x^2 - 3x + 3$ è sempre positivo, il numeratore è positivo quando $x \geq 0$. Il denominatore è invece positivo quando $x < 1$, quindi

$$g''(x) \begin{cases} > 0, & \text{se } x \in]0, 1[, \\ = 0, & \text{se } x = 0, \\ < 0, & \text{se } x \in]-\infty, 0[\cup]1, +\infty[. \end{cases}$$

In definitiva la funzione è concava in $] -\infty, 0[$ e in $]1, +\infty[$, convessa in $]0, 1[$. Il $x = 0$ ammette un punto di flesso.



9 a) Si ha $y'(t) = -e^{2t} + 2(1-t)e^{2t} = (1-2t)e^{2t}$ e sostituendo si ottiene l'equazione

$$(1-2t)e^{2t} = (1-t)^4 e^{8t} (3t-1)e^t$$

che non è identicamente soddisfatta per $t \in \mathbb{R}$ (ad esempio, per $t = 0$ si ottiene $1 \neq -1$). La funzione non è dunque soluzione. Si osservi che la funzione soddisfa invece la seconda condizione, essendo $y(0) = 1$.

b) Scrivendo $y' = \frac{dy}{dt}$ e utilizzando il metodo di separazione delle variabili si ha

$$\frac{1}{y^4} dy = (3t-1)e^t dt,$$

e integrando si ottiene

$$\int y^{-4} dy = \int (3t-1)e^t dt \implies \frac{y^{-3}}{-3} = (3t-4)e^t + c,$$

dove c è la generica costante d'integrazione. Infatti, utilizzando il metodo d'integrazione per parti

$$\int (3t-1)e^t dt = (3t-1)e^t - \int 3e^t dt = (3t-1)e^t - 3e^t + c = (3t-4)e^t + c.$$

L'equazione sopra è equivalente a

$$-\frac{1}{3y^3} = (3t - 4)e^t + c \iff y = \frac{1}{\sqrt[3]{3(4 - 3t)e^t - 3c}}$$

con c costante arbitraria. Imponendo la condizione $y(0) = 1$ (nella prima delle due equazioni qui sopra) si ricava

$$-\frac{1}{3} = -4 + c$$

che risolta nell'incognita c fornisce $c = 11/3$. La soluzione è quindi

$$y(t) = \frac{1}{\sqrt[3]{3(4 - 3t)e^t - 11}}.$$

Alternativamente, si poteva utilizzare direttamente la formula risolutiva per le equazioni a variabili separabili (insieme alla formula fondamentale del calcolo integrale)

$$\begin{aligned} \int_1^y z^{-4} dz &= \int_0^t (3s - 1)e^s ds \implies \left[-\frac{1}{3z^3}\right]_1^y = \left[(3s - 4)e^s\right]_0^t \\ &\implies \frac{1}{3} - \frac{1}{3y^3} = (3t - 4)e^t + 4 \end{aligned}$$

che risolvendo rispetto a y fornisce la soluzione cercata.

b') Dalla prima tabella si ottiene

$$\begin{aligned} \int \left(\frac{\sin^2 x - 3x^2}{(x \sin x)^2} - \frac{3}{2 + x^2} \right) dx &= \int \frac{1}{x^2} dx - 3 \int \frac{1}{\sin^2 x} dx - 3 \int \frac{1}{2 + x^2} dx \\ &= -\frac{1}{x} + 3 \operatorname{ctg} x - \frac{3}{\sqrt{2}} \operatorname{arctg} \frac{x}{\sqrt{2}} + c, \end{aligned}$$

con c costante arbitraria. Utilizzando il metodo di integrazione per parti si ha

$$\begin{aligned} \int_0^2 (3x - 2x^2)e^{-2x} dx &= \left[(3x - 2x^2) \frac{e^{-2x}}{-2} \right]_0^2 - \int_0^2 (3 - 4x) \frac{e^{-2x}}{-2} dx \\ &= e^{-4} + \frac{1}{2} \left(\left[(3 - 4x) \frac{e^{-2x}}{-2} \right]_0^2 - \int_0^2 -4 \frac{e^{-2x}}{-2} dx \right) \\ &= e^{-4} + \frac{1}{2} \left(\frac{5}{2} e^{-4} + \frac{3}{2} \right) - \left[\frac{e^{-2x}}{-2} \right]_0^2 = \frac{9}{4} e^{-4} + \frac{3}{4} + \frac{1}{2} (e^{-4} - 1) = \frac{11}{4} e^{-4} + \frac{1}{4}. \end{aligned}$$

- 10** Si ha $f'(x) = \sin x + x \cos x$ e $f''(x) = 2 \cos x - x \sin x$ da cui $f(\pi/2) = \pi/2$, $f'(\pi/2) = 1$, $f''(\pi/2) = -\pi/2$ perciò il polinomio di Taylor cercato è

$$P(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2}(x - x_0)^2 = \frac{\pi}{2} + \left(x - \frac{\pi}{2}\right) - \frac{\pi}{4} \left(x - \frac{\pi}{2}\right)^2.$$

Appello del 19 febbraio 2013 - Tema B

N.B.: scrivere nome, cognome e numero di matricola su ogni foglio consegnato.
Tempo a disposizione: 2.5 ore

1 Se $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = -3$ e $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = +\infty$, allora $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)}$ è

- A $-\infty$
 - B $+\infty$
 - C 0
 - D non ci sono elementi sufficienti per rispondere
-

2 Se f è una funzione derivabile due volte in $]a, b[$ e tale che $f'(x_0) = 0$ e $f''(x_0) > 0$ con $x_0 \in]a, b[$, allora

- A x_0 è punto di minimo relativo per f in $[a, b]$
 - B x_0 è punto di massimo relativo per f in $[a, b]$
 - C x_0 è punto di minimo assoluto per f in $[a, b]$
 - D x_0 è punto di massimo assoluto per f in $[a, b]$
-

3 L'equazione differenziale $y'' = y \ln(t^2 + y')$ è

- A un'equazione lineare del primo ordine
 - B un'equazione lineare del secondo ordine
 - C un'equazione non lineare del primo ordine
 - D un'equazione non lineare del secondo ordine
-

4 La funzione $f(x) = \operatorname{arctg} x$

- A è decrescente per $x < 0$ e crescente per $x > 0$
 - B è crescente per $x < 0$ e decrescente per $x > 0$
 - C è una funzione pari
 - D è una funzione limitata
-

5 a) Scrivere la definizione di primitiva di una funzione f in un insieme I .

6 Rappresentare il grafico di una funzione g che verifichi contemporaneamente le seguenti proprietà:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = -2 \quad \lim_{x \rightarrow 0^-} g(x) = 1 \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} g(x) = +\infty \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = +\infty$$

- 7** a) Enunciare il teorema fondamentale del calcolo integrale;
 b) per quali delle tre funzioni

$$f(x) = |3 - x^2|, \quad g(x) = \begin{cases} 1 - \operatorname{sgn} x & \text{se } x \neq 0 \\ 0 & \text{se } x = 0, \end{cases} \quad h(x) = \begin{cases} \frac{1 - \cos(2x)}{x^2} & \text{se } x \neq 0 \\ 2 & \text{se } x = 0 \end{cases}$$

è possibile applicare il teorema nell'intervallo $[-1, 2]$? (sgn è la funzione segno.)

- 8** Data la funzione

$$g(x) = \frac{x^3}{x + 2}$$

- a) determinare il dominio \mathcal{D} ;
 b) studiare il segno di g ;
 c) calcolare i limiti agli estremi del dominio e determinare gli eventuali asintoti;
 d) determinare gli intervalli in cui la funzione è crescente, quelli in cui è decrescente, e gli eventuali punti di massimo/minimo relativo e/o assoluto;
 e) determinare gli intervalli in cui la funzione è convessa e quelli in cui è concava;
 f) disegnare un grafico approssimativo di g .

- 9** Dato il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' = y^6(1 + 2t)e^t \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

- a) dire se la funzione $y(t) = (t + 1)e^{3t}$ è soluzione del problema;
 b) determinare una soluzione del problema nel caso in cui non lo sia la funzione di cui al punto precedente; oppure, alternativamente
 b') calcolare i seguenti integrali

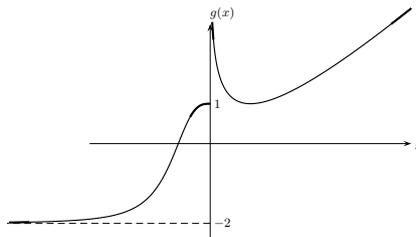
$$\int \left(\frac{4x^2 + \cos^2 x}{(x \cos x)^2} - \frac{3}{\sqrt{3 - x^2}} \right) dx \quad \int_0^1 (2x^2 + 5x)e^{-3x} dx.$$

- 10** Calcolare il polinomio di Taylor di grado 2 di $f(x) = x \cos x$ nel punto $x_0 = \pi/2$.

Soluzioni dei quesiti dell'esame del 19 febbraio 2013

- 1** C; **2** A; **3** D; **4** D; **5** consultare il libro di testo.

- 6** In neretto si evidenziano le informazioni date dai limiti. Il grafico della funzione è quindi completato a piacere (linea sottile), per esempio:



- 7) a) consultare il libro di testo; b) anzitutto tutte le funzioni sono definite in $[-1, 2]$. f è continua dunque si può applicare il teorema; g è banalmente continua per $x \neq 0$ e si ha

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} g(x) = 0 \neq 2 = \lim_{x \rightarrow 0^-} g(x),$$

dunque g non è continua in 0 e non si può applicare il teorema. Per ultimo, h è continua per $x \neq 0$ e si ha

$$\lim_{x \rightarrow 0} h(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos(2x)}{x^2} = 4 \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos(2x)}{(2x)^2} = 4 \cdot \frac{1}{2} = 2 = h(0),$$

quindi h è continua anche in 0 e si può applicare il teorema.

- 8) a) Il dominio è $\mathcal{D} = \mathbb{R} \setminus \{-2\}$ e la funzione è ivi continua e derivabile.
 b) Il numeratore è positivo se $x \geq 0$ il denominatore se $x > -2$ quindi la funzione è negativa se $-2 < x < 0$, positiva se $x < -2$ oppure $x > 0$ e si annulla in $x = 0$.
 c) Ha senso andare a studiare i limiti in -2 e a $\pm\infty$. Si ha

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x^2}{1 + 2/x} = \left[\frac{+\infty}{1} \right] = +\infty, \quad \lim_{x \rightarrow -2^\pm} g(x) = \left[\frac{1}{0^\pm} \right] = \pm\infty,$$

quindi il limite in $x_0 = -2$ non esiste ed inoltre la funzione non ammette massimo né minimo. La retta di equazione $x = -2$ è un asintoto verticale mentre, essendo $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} g(x)/x = \pm\infty$, non esistono asintoti obliqui.

d) La derivata prima è

$$g'(x) = \frac{3x^2(x+2) - x^3 \cdot 1}{(x+2)^2} = \frac{2x^3 + 6x^2}{(x+2)^2} = \frac{2x^2(x+3)}{(x+2)^2}.$$

La derivata prima è dunque positiva se $x + 3 > 0$ cioè $x > -3$, mentre si annulla in $x = 0$ e in $x = -3$. Più precisamente

$$g'(x) \begin{cases} > 0, & \text{se } x \in]-3, -2[\cup]-2, 0[\cup]0, +\infty[, \\ = 0, & \text{se } x = -3 \text{ oppure } x = 0, \\ < 0, & \text{se } x \in]-\infty, -3[, \end{cases}$$

perciò la funzione è crescente in $] - 3, -2[$ e in $] - 2, +\infty[$, mentre è decrescente in $] - \infty, -3[$. In $x = -3$ ammette un minimo relativo.

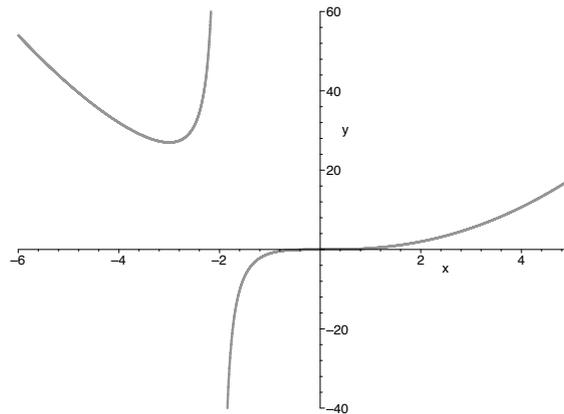
e) Calcoliamo la derivata seconda:

$$\begin{aligned} g''(x) &= \frac{(6x^2 + 12x)(x+2)^2 - (2x^3 + 6x^2)2(x+2)}{(x+2)^4} = \frac{(6x^2 + 12x)(x+2) - (2x^3 + 6x^2)2}{(x+2)^3} \\ &= \frac{2x^3 + 12x^2 + 24x}{(x+2)^3} = \frac{2x(x^2 + 6x + 12)}{(x+2)^3}. \end{aligned}$$

Poiché $x^2 + 6x + 12$ è sempre positivo, il numeratore è positivo quando $x \geq 0$. Il denominatore è invece positivo quando $x > -2$, quindi

$$g''(x) \begin{cases} > 0, & \text{se } x \in]-\infty, -2[\cup]0, +\infty[, \\ = 0, & \text{se } x = 0, \\ < 0, & \text{se } x \in]-2, 0[. \end{cases}$$

In definitiva la funzione è convessa in $] - \infty, -2[$ e in $]0, +\infty[$, concava in $] - 2, 0[$. Il $x = 0$ ammette un punto di flesso.



9 a) Si ha $y'(t) = e^{3t} + 3(t + 1)e^{3t} = (3t + 4)e^{3t}$ e sostituendo si ottiene l'equazione

$$(3t + 4)e^{3t} = (t + 1)^6 e^{18t} (1 + 2t)e^t$$

che non è identicamente soddisfatta per $t \in \mathbb{R}$ (ad esempio, per $t = 0$ si ottiene $4 \neq 1$). La funzione non è dunque soluzione. Si osservi che la funzione soddisfa invece la seconda condizione, essendo $y(0) = 1$.

b) Scrivendo $y' = \frac{dy}{dt}$ e utilizzando il metodo di separazione delle variabili si ha

$$\frac{1}{y^6} dy = (1 + 2t)e^t dt,$$

e integrando si ottiene

$$\int y^{-6} dy = \int (1 + 2t)e^t dt \implies \frac{y^{-7}}{-7} = (2t - 1)e^t + c,$$

dove c è la generica costante d'integrazione. Infatti, utilizzando il metodo d'integrazione per parti

$$\int (1 + 2t)e^t dt = (1 + 2t)e^t - \int 2e^t dt = (1 + 2t)e^t - 2e^t + c = (2t - 1)e^t + c.$$

L'equazione sopra è equivalente a

$$-\frac{1}{7y^7} = (2t - 1)e^t + c \iff y = \frac{1}{\sqrt[7]{7(1 - 2t)e^t - 7c}}$$

con c costante arbitraria. Imponendo la condizione $y(0) = 1$ (nella prima delle due equazioni qui sopra) si ricava

$$-\frac{1}{7} = -1 + c$$

che risolta nell'incognita c fornisce $c = 6/7$. La soluzione è quindi

$$y(t) = \frac{1}{\sqrt[7]{7(1 - 2t)e^t - 6}}.$$

Alternativamente, si poteva utilizzare direttamente la formula risolutiva per le equazioni a variabili separabili (insieme alla formula fondamentale del calcolo integrale)

$$\begin{aligned} \int_1^y z^{-6} dz &= \int_0^t (1 + 2s)e^s ds \implies \left[-\frac{1}{7z^7} \right]_1^y = \left[(2s - 1)e^s \right]_0^t \\ &\implies \frac{1}{7} - \frac{1}{7y^7} = (2t - 1)e^t + 1 \end{aligned}$$

che risolvendo rispetto a y fornisce la soluzione cercata.

b') Dalla prima tabella si ottiene

$$\int \left(\frac{4x^2 + \cos^2 x}{(x \cos x)^2} - \frac{3}{\sqrt{3-x^2}} \right) dx = 4 \int \frac{1}{\cos^2 x} dx + \int \frac{1}{x^2} dx - 3 \int \frac{1}{\sqrt{3-x^2}} dx$$

$$= 4 \operatorname{tg} x - \frac{1}{x} - 3 \operatorname{arcsen} \frac{x}{\sqrt{3}} + c,$$

con c costante arbitraria. Utilizzando il metodo di integrazione per parti si ha

$$\int_0^1 (2x^2 + 5x)e^{-3x} dx = \left[(2x^2 + 5x) \frac{e^{-3x}}{-3} \right]_0^1 - \int_0^1 (4x + 5) \frac{e^{-3x}}{-3} dx$$

$$= -\frac{7}{3}e^{-3} + \frac{1}{3} \left(\left[(4x + 5) \frac{e^{-3x}}{-3} \right]_0^1 - \int_0^1 4 \frac{e^{-3x}}{-3} dx \right) = -\frac{7}{3}e^{-3} + \frac{1}{3} \left(-3e^{-3} + \frac{5}{3} \right) + \frac{4}{9} \left[\frac{e^{-3x}}{-3} \right]_0^1$$

$$= -\frac{10}{3}e^{-3} + \frac{5}{9} + \frac{4}{27}(1 - e^{-3}) = -\frac{94}{27}e^{-3} + \frac{19}{27}.$$

- 10** Si ha $f'(x) = \cos x - x \operatorname{sen} x$, $f''(x) = -2 \operatorname{sen} x - x \cos x$ da cui $f(\pi/2) = 0$, $f'(\pi/2) = -\pi/2$, $f''(\pi/2) = -2$ perciò il polinomio di Taylor cercato è

$$P(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2}(x - x_0)^2 = -\frac{\pi}{2} \left(x - \frac{\pi}{2} \right) - \left(x - \frac{\pi}{2} \right)^2.$$

Appello del 8 luglio 2013

N.B.: scrivere nome, cognome e numero di matricola su ogni foglio consegnato.

Tempo a disposizione: 2.5 ore

- 1** Se $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = -\infty$ e $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = 0^+$, allora $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)}$ è

- A $-\infty$
- B $+\infty$
- C 0
- D non ci sono elementi sufficienti per rispondere

- 2** Se f è una funzione derivabile due volte in $]a, b[$ e tale che $f'(x_0) > 0$ e $f''(x_0) = 0$ con $x_0 \in]a, b[$, allora

- A x_0 è punto di minimo relativo per f in $[a, b]$
- B x_0 è punto di massimo relativo per f in $[a, b]$
- C x_0 è punto di flesso per f in $[a, b]$
- D nessuna delle precedenti

- 3** L'equazione differenziale $y'' = te^y - \text{sen } t$ è
- A** un'equazione lineare del primo ordine
 - B** un'equazione lineare del secondo ordine
 - C** un'equazione non lineare del primo ordine
 - D** un'equazione non lineare del secondo ordine

- 4** La funzione $f(x) = \log_{1/2} x$
- A** è definita in \mathbb{R}
 - B** è una funzione decrescente
 - C** è una funzione dispari
 - D** ha limite $-\infty$ per $x \rightarrow 0^+$

- 5** a) Scrivere la definizione di primitiva di una funzione f in un intervallo I .

- 6** Rappresentare il grafico di una funzione g che verifichi contemporaneamente le seguenti proprietà:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = +\infty \quad \lim_{x \rightarrow 2^-} g(x) = 1 \quad \lim_{x \rightarrow 2^+} g(x) = -\infty \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = -2$$

- 7** a) Enunciare il Teorema di de L'Hôpital;
 b) per ciascuno dei seguenti tre limiti

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\text{sen}(x^2) - \arccos x}{x^2 + \ln(1 + 2x)}, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3x^2 + \ln x}{7 - 5x}, \quad \lim_{x \rightarrow \pi} \frac{e^{x-\pi} - \cos x}{x \text{sen } x},$$

determinare se è possibile applicare il teorema ed eventualmente calcolarne il valore.

- 8** Data la funzione

$$g(x) = \frac{2 - \ln(x^5)}{x}$$

- a) determinarne il dominio \mathcal{D} ;
- b) studiare il segno di g ;
- c) calcolare i limiti agli estremi del dominio e determinare gli eventuali asintoti;
- d) determinare gli intervalli in cui la funzione è crescente, quelli in cui è decrescente, e gli eventuali punti di massimo/minimo relativo e/o assoluto;
- e) determinare gli intervalli in cui la funzione è concava e quelli in cui è convessa;
- f) disegnare un grafico approssimativo di g .

- 9** Dato il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' = \frac{t^2 y^4}{\sqrt{t^3 + 1}} \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

- a) dire se la funzione $y(t) = \cos(t^3)$ è soluzione del problema in $] -1, +\infty[$;

- b) determinare una soluzione del problema nel caso in cui non lo sia la funzione di cui al punto precedente; oppure, alternativamente
 b') calcolare i seguenti integrali

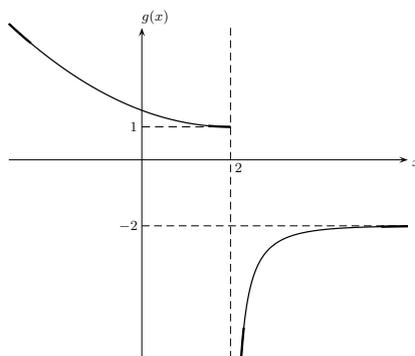
$$\int \left(\frac{3 \cos^2 x - 4}{\cos^2 x} - \frac{5}{x\sqrt{x}} \right) dx, \quad \int_0^\pi \frac{\sin t}{\sqrt[3]{3-2 \cos t}} dt.$$

10 Calcolare il polinomio di Taylor di grado 2 di $f(x) = x \operatorname{tg} x$ nel punto $x_0 = \pi/4$.

Soluzioni dei quesiti dell'esame del 8 luglio 2013

1 A; **2** D; **3** D; **4** B; **5** consultare il libro di testo.

6 In neretto si evidenziano le informazioni date dai limiti. Il grafico della funzione è quindi completato a piacere (linea sottile), per esempio:



7 a) consultare il libro di testo; b) il primo limite è della forma $-(\pi/2)/0$, il secondo $+\infty/-\infty$, il terzo $2/0$. Il teorema si può applicare solamente al secondo limite, per il quale si ha

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3x^2 + \ln x}{7 - 5x} \stackrel{H}{=} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{6x + 1/x}{-5} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(-\frac{6}{5}x - \frac{1}{5x} \right) = -\infty.$$

8 a) Il dominio è individuato dagli x per cui $x^5 > 0$ quindi $\mathcal{D} =]0, +\infty[$ e la funzione è ivi continua e derivabile. Osserviamo inoltre che la funzione può essere scritta nella seguente forma

$$f(x) = \frac{2 - 5 \ln x}{x}.$$

b) Poiché il denominatore è sempre positivo nel dominio \mathcal{D} , si ha che $f(x) \geq 0$ se e solo se $2 - 5 \ln x \geq 0$ ovvero $\ln x \leq 2/5$ cioè $x \leq e^{2/5}$. In definitiva

$$g(x) \begin{cases} > 0, & \text{se } x \in]0, e^{2/5}[, \\ = 0, & \text{se } x = e^{2/5}, \\ < 0, & \text{se } x \in]e^{2/5}, +\infty[. \end{cases}$$

c) Ha senso andare a studiare i limiti a $+\infty$ e in 0 da destra. Si ha

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} g(x) = \left[\frac{2 + \infty}{0^+} \right] = +\infty,$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2 - 5 \ln x}{x} = \left[\frac{-\infty}{+\infty} \right] \stackrel{H}{=} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-5/x}{1} = 0.$$

Da questa analisi segue che la retta $y = 0$ è asintoto orizzontale a $+\infty$, mentre $x = 0$ è asintoto verticale.

d) Calcoliamo la derivata prima:

$$g'(x) = \frac{-\frac{5}{x}x - (2 - 5 \ln x) \cdot 1}{x^2} = \frac{5 \ln x - 7}{x^2}.$$

La derivata è positiva quando $5 \ln x - 7 \geq 0$ ovvero $\ln x \geq 7/5$ cioè $x \geq e^{7/5}$. Quindi

$$g'(x) \begin{cases} < 0, & \text{se } x \in]0, e^{7/5}[, \\ = 0, & \text{se } x = e^{7/5}, \\ > 0, & \text{se } x \in]e^{7/5}, +\infty[, \end{cases}$$

perciò la funzione è crescente in $]e^{7/5}, +\infty[$, mentre è decrescente in $]0, e^{7/5}[$. In $x = e^{7/5}$ ammette un minimo relativo e assoluto. Dal punto c) si vede subito che la funzione non possiede massimo.

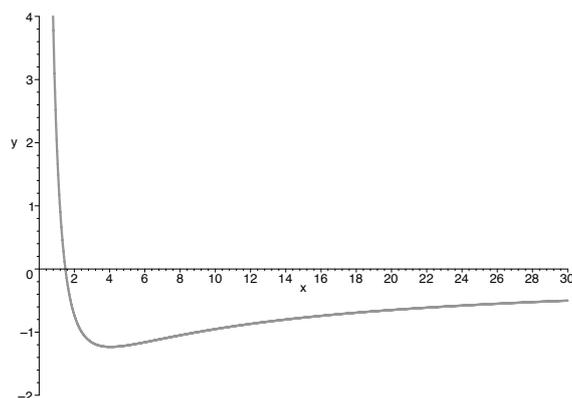
e) Calcoliamo la derivata seconda:

$$g''(x) = \frac{\frac{5}{x}x^2 - (5 \ln x - 7)2x}{x^4} = \frac{19 - 10 \ln x}{x^3}.$$

Il denominatore è positivo quando $x > 0$, il numeratore quando $19 - 10 \ln x \geq 0$ ovvero $\ln x \leq 19/10$ cioè $x \leq e^{19/10}$. Quindi

$$g''(x) \begin{cases} > 0, & \text{se } x \in]0, e^{19/10}[, \\ = 0, & \text{se } x = e^{19/10}, \\ < 0, & \text{se } x \in]e^{19/10}, +\infty[, \end{cases}$$

perciò la funzione è convessa in $]0, e^{19/10}[$, mentre è concava in $]e^{19/10}, +\infty[$.



9 a) Si ha $y'(t) = -3t^2 \text{sen}(t^3)$. Sostituendo si ottiene l'equazione

$$-3t^2 \text{sen}(t^3) = \frac{t^2 (\cos(t^3))^4}{\sqrt{t^3 + 1}},$$

che non è identicamente soddisfatta per $t > -1$ (ad esempio, per $t = \sqrt[3]{\pi}$ si ottiene $0 \neq \frac{\sqrt[3]{\pi^2}}{\sqrt{\pi+1}}$). La funzione non è dunque soluzione. Si osservi che la funzione soddisfa la seconda condizione $y(0) = 1$.

b) Scrivendo $y' = \frac{dy}{dt}$ e utilizzando il metodo di separazione delle variabili si ha

$$\frac{1}{y^4} dy = \frac{t^2}{\sqrt{t^3+1}} dt \implies \int y^{-4} dy = \int \frac{t^2}{\sqrt{t^3+1}} dt,$$

e utilizzando le tabelle

$$\frac{y^{-3}}{-3} = \frac{1}{3} \int (3t^2)(t^3+1)^{-1/2} dt \implies -\frac{1}{3y^3} = \frac{1}{3} \frac{(t^3+1)^{1/2}}{1/2} + c = \frac{2}{3} \sqrt{t^3+1} + c,$$

dove c è la generica costante d'integrazione. Risolvendo in y si ottiene

$$y^3 = \frac{1}{-3c - 2\sqrt{t^3+1}} \iff y = \frac{1}{\sqrt[3]{-3c - 2\sqrt{t^3+1}}}.$$

Imponendo la condizione $y(0) = 1$ si ottiene $1 = \frac{1}{-3c-2}$, da cui si ricava $c = -1$. La soluzione è quindi

$$y(t) = \frac{1}{\sqrt[3]{3 - 2\sqrt{t^3+1}}}.$$

Alternativamente, si poteva utilizzare direttamente la formula risolutiva per le equazioni a variabili separabili (insieme alla formula fondamentale del calcolo integrale)

$$\begin{aligned} \int_1^y z^{-4} dz &= \int_0^t \frac{s^2}{\sqrt{s^3+1}} ds \implies \left[\frac{z^{-3}}{-3} \right]_1^y = \left[\frac{2}{3} \sqrt{s^3+1} \right]_0^t \\ &\implies \frac{1}{3} - \frac{1}{3y^3} = \frac{2}{3} \sqrt{t^3+1} - \frac{2}{3}, \end{aligned}$$

che risolta rispetto a y fornisce la soluzione cercata.

b') Dalle tabelle si ottiene

$$\begin{aligned} \int \left(\frac{3 \cos^2 x - 4}{\cos^2 x} - \frac{5}{x\sqrt{x}} \right) dx &= \int 3 dx - 4 \int \frac{1}{\cos^2 x} dx - 5 \int x^{-3/2} dx \\ &= 3x - 4 \operatorname{tg} x - 5 \frac{x^{-1/2}}{-1/2} + c = 3x - 4 \operatorname{tg} x + \frac{10}{\sqrt{x}} + c, \end{aligned}$$

con c costante arbitraria. Per il teorema fondamentale del calcolo si ha

$$\begin{aligned} \int_0^\pi \frac{\operatorname{sen} t}{\sqrt[3]{3-2\cos t}} dx &= \frac{1}{2} \int_0^\pi (2 \operatorname{sen} t)(3-2\cos t)^{-1/3} dx = \frac{1}{2} \int_0^\pi (3-2\cos t)'(3-2\cos t)^{-1/3} dx \\ &= \frac{1}{2} \left[\frac{(3-2\cos t)^{2/3}}{2/3} \right]_0^\pi = \frac{3}{4} (5^{2/3} - 1). \end{aligned}$$

10 Si ha $f'(x) = \operatorname{tg} x + \frac{x}{\cos^2 x}$ e $f''(x) = \frac{2}{\cos^2 x} + \frac{2x \operatorname{sen} x}{\cos^3 x}$ da cui $f(\pi/4) = \pi/4$, $f'(\pi/4) = 1 + \pi/2$, $f''(\pi/4) = 4 + \pi$ perciò il polinomio di Taylor cercato è

$$P(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + \frac{f''(x_0)}{2}(x-x_0)^2 = \frac{\pi}{4} + \frac{2+\pi}{2} \left(x - \frac{\pi}{4}\right) + \frac{4+\pi}{2} \left(x - \frac{\pi}{4}\right)^2.$$

Appello del 24 settembre 2013

1 Se $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = 0^+$ e $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = -\infty$, allora $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)}$ è

- A $-\infty$
 - B $+\infty$
 - C 0
 - D non ci sono elementi sufficienti per rispondere
-

2 Se f è una funzione derivabile due volte in $]a, b[$ e tale che $f''(x) < 0$ per $x \in]a, b[$, allora

- A f è crescente in $[a, b]$
 - B f è convessa in $[a, b]$
 - C f è concava in $[a, b]$
 - D f è decrescente in $[a, b]$
-

3 L'equazione differenziale $y' = \log t - e^t y \sin t$ è

- A un'equazione lineare del primo ordine
 - B un'equazione lineare del secondo ordine
 - C un'equazione non lineare del primo ordine
 - D un'equazione non lineare del secondo ordine
-

4 La funzione $f(x) = \arccos x$

- A è definita in \mathbb{R}
 - B è una funzione decrescente
 - C è definita in $[0, \pi]$
 - D è derivabile nel suo dominio
-

5 a) Scrivere la definizione di derivata di una funzione f in un punto x_0 .

6 Rappresentare il grafico di una funzione g che verifichi contemporaneamente le seguenti proprietà:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = +\infty \quad \lim_{x \rightarrow 1^-} g(x) = -\infty \quad \lim_{x \rightarrow 1^+} g(x) = -2 \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = 1$$

- 7** a) Enunciare il Teorema di de L'Hôpital;
 b) per ciascuno dei seguenti tre limiti

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arcsen x - \sen(2x - x^2)}{e^{2x} - \cos x}, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(1/2)^x - 5}{3^x + 4x + 1}, \quad \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sen x + (x - 1)^2}{x^2 - 3x + 2},$$

determinare se è possibile applicare il teorema ed eventualmente calcolarne il valore.

- 8** Data la funzione

$$g(x) = \frac{x^3}{x^2 - 1}$$

- a) determinarne il dominio \mathcal{D} ;
 b) studiare il segno di g ;
 c) calcolare i limiti agli estremi del dominio e determinare gli eventuali asintoti;
 d) determinare gli intervalli in cui la funzione è crescente, quelli in cui è decrescente, e gli eventuali punti di massimo/minimo relativo;
 e) determinare gli intervalli in cui la funzione è concava e quelli in cui è convessa;
 f) disegnare un grafico approssimativo di g
-

- 9** Dato il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' = y(3 + \ln y) \cos t \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

- a) dire se la funzione $y(t) = e^{3t}$ è soluzione del problema;
 b) determinare una soluzione del problema nel caso in cui non lo sia la funzione di cui al punto precedente; oppure, alternativamente
 b') calcolare i seguenti integrali

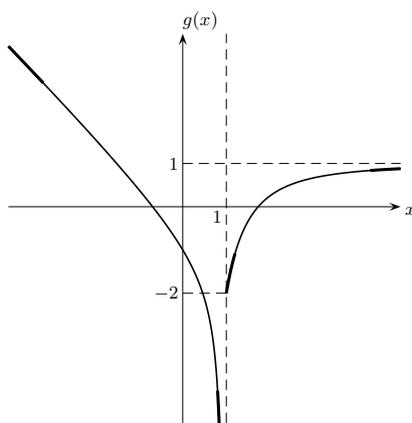
$$\int \left(\frac{4 - \sqrt{x}}{3x} + \frac{3}{4^x} \right) dx, \quad \int_1^3 \frac{e^{3x}}{2 + e^{3x}} dx.$$

- 10** Calcolare il polinomio di Taylor di grado 2 di $f(x) = e^{2x} \cos x$ nel punto $x_0 = 0$.
-

Soluzioni dei quesiti dell'esame del 24 settembre 2013

- 1** C; **2** C; **3** A; **4** B; **5** consultare il libro di testo.

- 6** In neretto si evidenziano le informazioni date dai limiti. Il grafico della funzione è quindi completato a piacere (linea sottile), per esempio:



- 7 a) consultare il libro di testo; b) il primo limite è della forma $0/0$, il secondo $-5/ + \infty$, il terzo $\text{sen } 1/0$. Il teorema si può applicare solamente al primo limite, per il quale si ha

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arcsen x - \text{sen}(2x - x^2)}{e^{2x} - \cos x} \stackrel{H}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} - (2-2x)\cos(2x-x^2)}{2e^{2x} + \text{sen } x} = \frac{1-2}{2+0} = -\frac{1}{2}.$$

- 8 a) La funzione è definita per $x^2 - 1 \neq 0$, perciò il dominio è $\mathcal{D} = \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$ e la funzione (razionale) è ivi continua e derivabile. Osserviamo che g è funzione dispari, dunque potremmo limitarci a studiarne il grafico per gli $x \geq 0$ ottenendo il grafico relativo agli $x < 0$ per simmetria rispetto all'origine.

b) Il numeratore è positivo se $x \geq 0$, il denominatore è positivo se $x^2 - 1 > 0$ ovvero $x < -1$ oppure $x > 1$. In definitiva la funzione è positiva per $-1 < x < 0$ e $x > 1$, negativa per $x < -1$ e $0 < x < 1$. Si annulla in $x = 0$.

c) Ha senso andare a studiare i limiti in 1, in -1 ed a $\pm\infty$. Si ha

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x}{1 - 1/x^2} = \left[\frac{\pm\infty}{1} \right] = \pm\infty,$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^\pm} g(x) = \left[\frac{1}{0^\pm} \right] = \pm\infty, \quad \lim_{x \rightarrow -1^\pm} g(x) = \left[\frac{-1}{0^\mp} \right] = \pm\infty,$$

quindi la funzione non ammette massimo né minimo. Asintoti: le rette di equazione $x = -1$ e $x = 1$ sono asintoti verticali. Per quanto riguarda quelli obliqui si ha

$$m = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{g(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x^3}{x^3 - x} = 1, \quad q = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} [g(x) - x] = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x}{x^2 - 1} = 0,$$

dunque la retta di equazione $y = x$ è asintoto a $-\infty$ e a $+\infty$.

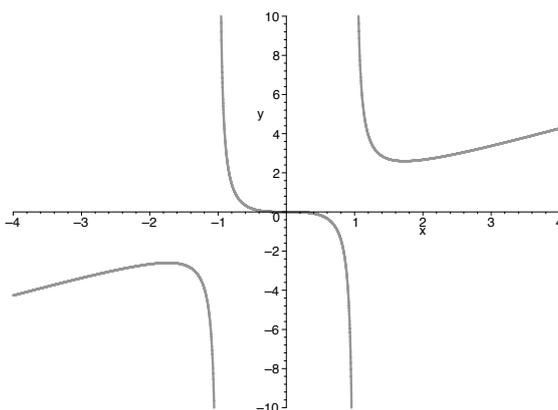
d) La derivata prima è

$$g'(x) = \frac{3x^2(x^2 - 1) - x^3 \cdot 2x}{(x^2 - 1)^2} = \frac{x^4 - 3x^2}{(x^2 - 1)^2} = \frac{x^2(x^2 - 3)}{(x^2 - 1)^2}.$$

Il numeratore è positivo quando $x^2 - 3 > 0$ cioè se e solo se $x < -\sqrt{3}$ oppure $x > \sqrt{3}$, il denominatore è sempre positivo nel dominio. Inoltre la derivata si annulla in $x = 0$, $x = \pm\sqrt{3}$, quindi

$$g'(x) \begin{cases} < 0, & \text{se } x \in]-\sqrt{3}, -1[\cup]-1, 0[\cup]0, 1[\cup]1, \sqrt{3}[, \\ = 0, & \text{se } x = 0 \text{ oppure } x = -\sqrt{3} \text{ oppure } x = \sqrt{3}, \\ > 0, & \text{se } x \in]-\infty, -\sqrt{3}[\cup]\sqrt{3}, +\infty[, \end{cases}$$

perciò la funzione è crescente in $]-\infty, -\sqrt{3}[$ e in $]\sqrt{3}, +\infty[$, mentre è decrescente in $]-\sqrt{3}, -1[$, in $]-1, 1[$ e in $]1, \sqrt{3}[$. In $x = -\sqrt{3}$ e $x = \sqrt{3}$ ammette, rispettivamente, un massimo e un minimo relativo. In $x = 0$ la funzione ha un punto di flesso a tangente orizzontale.



e) La derivata seconda è

$$g''(x) = \frac{(4x^3 - 6x)(x^2 - 1)^2 - (x^4 - 3x^2)2(x^2 - 1)2x}{(x^2 - 1)^4}$$

$$= \frac{(4x^3 - 6x)(x^2 - 1) - (x^4 - 3x^2)4x}{(x^2 - 1)^3} = \frac{2x(x^2 + 3)}{(x^2 - 1)^3}.$$

Il numeratore è positivo quando $x \geq 0$, il denominatore è positivo se $(x^2 - 1)^3 > 0$ cioè se e solo se $x^2 - 1 > 0$ ovvero se $x < -1$ oppure $x > 1$. In definitiva

$$g''(x) \begin{cases} < 0, & \text{se } x \in] - \infty, -1[\cup] 0, 1[, \\ = 0, & \text{se } x = 0, \\ > 0, & \text{se } x \in] - 1, 0[\cup] 1, +\infty[, \end{cases}$$

perciò la funzione è concava in $] - \infty, -1[$ e in $] 0, 1[$, mentre è convessa in $] - 1, 0[$ e in $] 1, +\infty[$. Come già osservato in precedenza, in $x = 0$ la funzione ha un punto di flesso a tangente orizzontale.

9 a) Si ha $y'(t) = 3e^{3t}$. Sostituendo si ottiene l'equazione

$$3e^{3t} = e^{3t}(3 + \ln e^{3t}) \cos t,$$

che non è identicamente soddisfatta per $t \in \mathbb{R}$ (ad esempio, per $t = \pi/2$ si ottiene $3e^{3\pi/2} \neq 0$). La funzione non è dunque soluzione. Si osservi che la funzione soddisfa la seconda condizione $y(0) = 1$.

b) Scrivendo $y' = \frac{dy}{dt}$ e utilizzando il metodo di separazione delle variabili si ha

$$\frac{1}{y(3 + \ln y)} dy = \cos t dt \quad \implies \quad \int \frac{1}{y(3 + \ln y)} dy = \int \cos t dt.$$

Ricordando che una primitiva del coseno è il seno e utilizzando le tabelle si ottiene

$$\int \frac{1}{y(3 + \ln y)} dy = \int \frac{(\ln y)'}{3 + \ln y} dy = \ln |3 + \ln y| \quad \implies \quad \ln |3 + \ln y| = \sin t + c,$$

dove c è la generica costante d'integrazione. Osservando che dovrà essere $y(0) = 1$, si può supporre (almeno per t vicini a 0) che $3 + \ln y(t) > 0$, perciò risolvendo in y si ottiene

$$3 + \ln y = e^{\sin t + c} \quad \iff \quad y = \exp(e^{\sin t + c} - 3).$$

Imponendo la condizione $y(0) = 1$ si ottiene $3 = e^c$, da cui si ricava $c = \ln 3$. La soluzione è quindi

$$y(t) = \exp(3e^{\sin t} - 3).$$

Alternativamente, si poteva utilizzare direttamente la formula risolutiva per le equazioni a variabili separabili (insieme alla formula fondamentale del calcolo integrale)

$$\int_1^y \frac{1}{z(3 + \ln z)} dz = \int_0^t \cos s ds \implies \left[\ln |3 + \ln z| \right]_1^y = \left[\sin s \right]_0^t$$

$$\implies \ln |3 + \ln y| - \ln 3 = \sin t,$$

che risolta rispetto a y fornisce la soluzione cercata.

c) Dalle tabelle si ottiene

$$\int \left(\frac{4 - \sqrt{x}}{3x} + \frac{3}{4x} \right) dx = \frac{4}{3} \int \frac{1}{x} dx - \frac{1}{3} \int x^{-1/2} dx + 3 \int (1/4)^x dx$$

$$= \frac{4}{3} \ln |x| - \frac{1}{3} \frac{x^{1/2}}{1/2} + 3 \frac{(1/4)^x}{\ln(1/4)} + c = \frac{4}{3} \ln |x| - \frac{2}{3} \sqrt{x} - \frac{3}{4x \ln 4} + c,$$

con c costante arbitraria. Per il teorema fondamentale del calcolo si ha

$$\int_1^3 \frac{e^{3x}}{2 + e^{3x}} dx = \frac{1}{3} \int_1^3 \frac{(e^{3x})'}{2 + e^{3x}} dx = \frac{1}{3} \left[\ln(2 + e^{3x}) \right]_1^3 = \frac{1}{3} \ln \frac{2 + e^9}{2 + e^3}.$$

- 10** Si ha $f'(x) = 2e^{2x} \cos x - e^{2x} \sin x$ e $f''(x) = 3e^{2x} \cos x - 4e^x \sin x$ da cui $f(0) = 1$, $f'(0) = 2$, $f''(0) = 3$ perciò il polinomio di Taylor cercato è

$$P(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2}(x - x_0)^2 = 1 + 2x + \frac{3}{2}x^2.$$
