



Facoltà di Scienze Matematiche, Fisiche e Naturali
Corso di Laurea in Matematica

EQUAZIONI DIFFERENZIALI

Appello del 6 settembre 2012

N.B.: scrivere nome, cognome e numero di matricola su ogni foglio consegnato. È ammesso l'utilizzo degli appunti del corso. Tempo a disposizione: 3 ore

1 Data l'equazione differenziale

$$y' = t - t^3 e^y \quad (1)$$

- a) studiare l'esistenza e l'unicità locale delle soluzioni. Valgono le ipotesi dei teoremi di esistenza globale?
- b) Trovare le regioni dove le soluzioni sono crescenti/decrescenti e rappresentarle nel piano $t - y$;
- c) supposto che $y(t)$ sia soluzione dimostrare che anche $x(t) := y(-t)$ è soluzione dell'equazione. Si può concludere che tutte le soluzioni massimali sono funzioni pari? In caso negativo, esistono soluzioni che sono funzioni pari?

Sia ora $y(t)$ soluzione massimale del problema di Cauchy con condizione iniziale $y(0) = y_0$.

- d) Dimostrare che $y(t)$ è globalmente definita in futuro e passato (potrebbe risultare utile trovare delle opportune sopra/sotto soluzioni);
- e) studiare l'esistenza e l'eventuale valore del limite $\lim_{t \rightarrow +\infty} y(t)$.

Definita infine $w(t) = \exp(y(t))$

- f) trovare l'equazione differenziale in forma normale soddisfatta da w e dire di che tipo di equazione si tratta;
- g) calcolare esplicitamente la soluzione generale e utilizzarla per risolvere l'equazione originale;
- h) sfruttare g) per studiare l'intervallo di definizione delle soluzioni; in particolare dire se esistono soluzioni di (1) che non sono definite in futuro e/o passato;
- i) utilizzare g) per dimostrare che, quando globalmente definita, $y(t)$ è asintotica a $u(t) = -2 \ln |t|$ per $t \rightarrow \pm\infty$ (più precisamente si ha $\lim_{t \rightarrow \pm\infty} (y(t) - u(t)) = 0$).

2 Data la matrice

$$A := \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 4 & -2 & 9 \\ 2 & -2 & 6 \end{pmatrix}$$

- a) calcolare la matrice fondamentale e^{tA} ;
- b) risolvere il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' = Ay + b \\ y(1) = y_1, \end{cases}$$

dove $y_1 = (0, 0, -2)^t$ e $b = (2, 0, 2)^t$.

Punteggi indicativi: 2+2+3+6+2+3+6+4+2, 5+4