



Facoltà di Scienze Matematiche, Fisiche e Naturali
Corso di Laurea in Matematica

EQUAZIONI DIFFERENZIALI

Appello del 22 febbraio 2012

N.B.: scrivere nome, cognome e numero di matricola su ogni foglio consegnato. È ammesso l'utilizzo degli appunti del corso. Tempo a disposizione: 3 ore

1 Dato l'equazione differenziale $y' = \ln(y^2 - t + 1)$

- determinare il dominio di definizione del campo vettoriale e studiare l'esistenza e l'unicità locale delle soluzioni. Valgono le ipotesi dei teoremi di esistenza globale?
- Trovare gli eventuali equilibri, le regioni dove le soluzioni sono crescenti/decrescenti e rappresentarle nel piano $t - y$;

Sia ora $y(t)$ soluzione del problema di Cauchy con condizione iniziale $y(0) = y_0$.

- Dimostrare che ogni $y(t)$ è globalmente definita in passato; studiare l'esistenza e l'eventuale valore del limite $\lim_{t \rightarrow -\infty} y(t)$.
- Per $y_0 = 0$ dimostrare che la relativa soluzione verifica $|y(t)| \leq \sqrt{t}$ per ogni $t \geq 0$ di definizione. Si può concludere di conseguenza che $y(t)$ è globalmente definita in futuro?
- Dimostrare che per y_0 sufficientemente grande le $y(t)$ sono globalmente definite su $\mathbb{R}$; studiare l'esistenza e l'eventuale valore del limite $\lim_{t \rightarrow +\infty} y(t)$.
- Esistono soluzioni dell'equazione differenziale non globalmente definite in futuro? E in passato?
- Esistono soluzioni dell'equazione che esplodono in futuro in tempo finito?

2 Data la matrice

$$A := \begin{pmatrix} 4 & 0 & 9 \\ 6 & -2 & 9 \\ -1 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

- calcolare la matrice fondamentale e^{tA} e utilizzarla per trovare la generica soluzione del sistema di equazioni differenziali $y' = Ay$;
- posto $b(t) = (t + 2, t, -1)^T$ trovare la soluzione del problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' = Ay + b(t) \\ y(1) = 0. \end{cases}$$

3 Dimostrare la seguente generalizzazione del Lemma di Gronwall: sia $v : I \rightarrow \mathbb{R}$ continua per la quale esistono $\alpha \geq 0$, $t_0 \in I$ e una funzione continua $h = h(t, v) : I \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ localmente lipschitziana e crescente in v , tali che

$$v(t) \leq \alpha + \int_{t_0}^t h(s, v(s)) ds \quad \text{per } t \geq t_0.$$

- Dimostrare che $v(t) \leq y(t)$ per $t \geq t_0$, dove $y(t)$ è la soluzione del problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' = h(t, y) \\ y(t_0) = \alpha. \end{cases} \quad (1)$$

- Supposto che h non sia localmente lipschitziana, è ancora vero il punto a) prendendo come $y(t)$ una qualsiasi soluzione di (1)? In caso negativo fornire un controesempio e provare a suggerire qualche ipotesi da aggiungere affinché il risultato continui a essere vero.