



Facoltà di Scienze Matematiche, Fisiche e Naturali
Corso di Laurea in Matematica

EQUAZIONI DIFFERENZIALI

Appello del 24 gennaio 2012

N.B.: scrivere nome, cognome e numero di matricola su ogni foglio consegnato. È ammesso l'utilizzo degli appunti del corso. Tempo a disposizione: 3 ore

1 Dato il sistema di equazioni differenziali

$$\begin{cases} x' = 2yz \\ y' = -x(2z + 1) \\ z' = -2xy \end{cases}$$

- a) studiare l'esistenza e l'unicità locale delle soluzioni e individuare gli equilibri del sistema. Valgono anche le ipotesi dei teoremi di esistenza globale?
- b) Verificare che le due funzioni $E_1(x, y, z) = z - x^2 - y^2$ e $E_2(x, y, z) = x^2 + z^2$ sono integrali primi del sistema. Dare l'interpretazione geometrica degli insiemi di livello di E_1 e E_2 e dire se sono insiemi limitati oppure no;
- c) utilizzare il punto precedente per studiare l'intervallo massimale di esistenza delle soluzioni e la loro eventuale esistenza globale;
- d) dire se esistono soluzioni periodiche non banali. In caso affermativo, è vero che tutte le orbite sono equilibri oppure orbite periodiche? Giustificare analiticamente le proprie affermazioni.
- e) Determinare tutte le orbite piane del sistema e descrivere geometricamente il loro insieme.

2 Data la matrice

$$A := \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

- a) verificare che A si può decomporre nella somma di una matrice diagonale D e di una triangolare superiore nilpotente N . Sfruttare i risultati sui sistemi lineari di equazioni differenziali per dimostrare, *senza fare calcoli*, che D e N non possono commutare;
- b) calcolare la matrice fondamentale e^{tA} ;
- c) utilizzarla per trovare la soluzione y del problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' = Ay + b \\ y(0) = y_0 \end{cases}$$

con $y_0 = (1, 1, -1)$, $b = (2, 0, 2)$.

3 Sia data l'equazione $y' = f(y)$ dove $f \in C^1(\mathbb{R})$ è non negativa e crescente.

- a) Dimostrare che ogni soluzione dell'equazione è definita globalmente in passato. (Suggerimento: trovare un'opportuna funzione lineare/affine che sia sottosoluzione.)
- b) È ancora vero il punto a) nel caso in cui f è crescente ma di segno variabile? E se è non negativa e non crescente?