Università degli Studi di Udine — Anno Accademico 2011/2012

Facoltà di Scienze Matematiche, Fisiche e Naturali
Corso di Laurea in Matematica

Equazioni Differenziali

Appello del 24 gennaio 2012

N.B.: scrivere nome, cognome e numero di matricola su ogni foglio consegnato. È ammesso l'utilizzo degli appunti del corso. Tempo a disposizione: 3 ore

1 Dato il sistema di equazioni differenziali

$$\begin{cases} x' = 2yz \\ y' = -x(2z+1) \\ z' = -2xy \end{cases}$$

a) studiare l'esistenza e l'unicità locale delle soluzioni e individuare gli equilibri del sistema. Valgono anche le ipotesi dei teoremi di esistenza globale?

b) Verificare che le due funzioni $E_1(x,y,z) = z - x^2 - y^2$ e $E_2(x,y,z) = x^2 + z^2$ sono integrali primi del sistema. Dare l'interpretazione geometrica degli insiemi di livello di E_1 e E_2 e dire se sono insiemi limitati oppure no;

c) utilizzare il punto precedente per studiare l'intervallo massimale di esistenza delle soluzioni e la loro eventuale esistenza globale;

d) dire se esistono soluzioni periodiche non banali. In caso affermativo, è vero che tutte le orbite sono equilibri oppure orbite periodiche? Giustificare analiticamente le proprie affermazioni.

e) Determinare tutte le orbite piane del sistema e descrivere geometricamente il loro insieme.

2 Data la matrice

$$A := \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

a) verificare che A si può decomporre nella somma di una matrice diagonale D e di una triangolare superiore nilpotente N. Sfruttare i risultati sui sistemi lineari di equazioni differenziali per dimostrare, *senza fare calcoli*, che D e N non possono commutare;

b) calcolare la matrice fondamentale e^{tA};

c) utilizzarla per trovare la soluzione y del problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' = Ay + b \\ y(0) = y_0 \end{cases}$$

con $y_0 = (1, 1, -1)$, $b = (2, 0, 2)$.

3 Sia data l'equazione $y' = f(y)$ dove $f \in C^1(\mathbb{R})$ è non negativa e crescente.

a) Dimostrare che ogni soluzione dell'equazione è definita globalmente in passato. (Suggerimento: trovare un'opportuna funzione lineare/affine che sia sottosoluzione.)

b) È ancora vero il punto a) nel caso in cui f è crescente ma di segno variabile? E se è non negativa e non crescente?

Punteggi indicativi: 4+4+4+8+8, 3+6+2, 8+3

Appello del 22 febbraio 2012

$\boxed{\mathbf{1}}$ Dato l'equazione differenziale
$$y' = \ln(y^2 - t + 1)$$

a) determinare il dominio di definizione del campo vettoriale e studiare l'esistenza e l'unicità locale delle soluzioni. Valgono le ipotesi dei teoremi di esistenza globale?

b) Trovare gli eventuali equilibri, le regioni dove le soluzioni sono crescenti/decrescenti e rappresentarle nel piano $t - y$;

Sia ora $y(t)$ soluzione del problema di Cauchy con condizione iniziale $y(0) = y_0$.

c) Dimostrare che ogni $y(t)$ è globalmente definita in passato; studiare l'esistenza e l'eventuale valore del limite $\lim_{t\to-\infty} y(t)$.

d) Per $y_0 = 0$ dimostrare che la relativa soluzione verifica $|y(t)| \leq \sqrt{t}$ per ogni $t \geq 0$ di definizione. Si può concludere di conseguenza che $y(t)$ è globalmente definita in futuro?

e) Dimostrare che per y_0 sufficientemente grande le $y(t)$ sono globalmente definite su $\mathbb{R}$; studiare l'esistenza e l'eventuale valore del limite $\lim_{t\to+\infty} y(t)$.

f) Esistono soluzioni dell'equazione differenziale non globalmente definite in futuro? E in passato?

g) Esistono soluzioni dell'equazione che esplodono in futuro in tempo finito?

(Suggerimento: in alcuni punti potrebbe risultare utile applicare opportunamente il teorema del confronto);

$\boxed{\mathbf{2}}$ Data la matrice
$$A := \begin{pmatrix} 4 & 0 & 9 \\ 6 & -2 & 9 \\ -1 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

a) calcolare la matrice fondamentale e^{tA} e utilizzarla per trovare la generica soluzione del sistema di equazioni differenziali $y' = Ay$;

b) posto $b(t) = (t+2, t, -1)^T$ trovare la soluzione del problema di Cauchy
$$\begin{cases} y' = Ay + b(t) \\ y(1) = 0. \end{cases}$$

$\boxed{\mathbf{3}}$ Dimostrare la seguente generalizzazione del Lemma di Gronwall: sia $v : I \to \mathbb{R}$ continua per la quale esistono $\alpha \geq 0$, $t_0 \in I$ e una funzione continua $h = h(t, v) : I \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ localmente lipschitziana e crescente in v, tali che
$$v(t) \leq \alpha + \int_{t_0}^{t} h(s, v(s))\, ds \quad \text{per } t \geq t_0.$$

a) Dimostrare che $v(t) \leq y(t)$ per $t \geq t_0$, dove $y(t)$ è la soluzione del problema di Cauchy
$$\begin{cases} y' = h(t, y) \\ y(t_0) = \alpha. \end{cases} \tag{1}$$

b) Supposto che h non sia localmente lipschitziana, è ancora vero il punto a) prendendo come $y(t)$ una qualsiasi soluzione di (1)? In caso negativo fornire un controesempio e provare a suggerire qualche ipotesi da aggiungere affinché il risultato continui a essere vero.

Punteggi indicativi: 3+2+4+4+6+2+2, 8+4, 3+6

Appello del 9 luglio 2012

1 Data l'equazione differenziale $y'' + 2y^3 - 2y = 0$

a) dire di che tipo di equazione si tratta e se è lineare oppure non lineare. In seguito studiare l'esistenza e unicità locale per i relativi problemi di Cauchy. Si possono applicare i teoremi di esistenza globale?

b) Individuare gli eventuali equilibri;

c) trovare un integrale primo e utilizzarlo per studiare l'intervallo massimale di esistenza delle soluzioni;

d) rappresentare l'andamento globale delle orbite nel piano delle fasi e identificare tutte le eventuali orbite illimitate, quelle periodiche e quelle limitate ma non periodiche.

2 Data l'equazione differenziale $y' = \sqrt{|y+t|}$

a) studiare l'esistenza locale e globale delle soluzioni;

b) studiare l'unicità locale; in particolare determinare tutti e soli i dati iniziali (t_0, y_0) per i quali è possibile applicare il Teorema di Cauchy-Lipschitz;

c) dimostrare che il problema di Cauchy con dati iniziali $y(0) = 0$ ammette un'unica soluzione $y(t)$ globalmente definita; trovare una formula chiusa per tale soluzione;

d) studiare l'esistenza e l'eventuale valore dei limiti $\lim_{t\to+\infty} y(t)$, $\lim_{t\to+\infty} y(t)/t$ e dimostrare che $y(t)$ è asintotica a $t^2/4$ per $t \to +\infty$.

3 Data la matrice

$$A := \begin{pmatrix} 1 & 2a-1 & 4+a \\ 0 & 2a & 0 \\ -a & 2-a & -a^2 \end{pmatrix}$$

a) determinare i valori del parametro $a \in \mathbb{R}$ per i quali il sistema lineare $y' = Ay$ può ammettere soluzioni periodiche non banali;

b) in relazione ai valori a determinati, trovare l'integrale generale dell'equazione $y' = Ay$ e verificare che effettivamente esistono soluzioni periodiche;

c) alternativamente ad a)-b), trovare l'integrale generale dell'equazione $y' = Ay$ relativamente alla scelta $a = -1$.

Punteggi indicativi: 3+1+4+4, 3+3+8+6, 4+6+6

Appello del 6 settembre 2012

1 Data l'equazione differenziale

$$y' = t - t^3 e^y \tag{2}$$

a) studiare l'esistenza e l'unicità locale delle soluzioni. Valgono le ipotesi dei teoremi di esistenza globale?

b) Trovare le regioni dove le soluzioni sono crescenti/decrescenti e rappresentarle nel piano $t - y$;

c) supposto che $y(t)$ sia soluzione dimostrare che anche $x(t) := y(-t)$ è soluzione dell'equazione. Si può concludere che tutte le soluzioni massimali sono funzioni pari? In caso negativo, esistono soluzioni che sono funzioni pari?

Sia ora $y(t)$ soluzione massimale del problema di Cauchy con condizione iniziale $y(0) = y_0$.

d) Dimostrare che $y(t)$ è globalmente definita in futuro e passato (potrebbe risultare utile trovare delle opportune sopra/sotto soluzioni);

e) studiare l'esistenza e l'eventuale valore del limite $\lim_{t\to+\infty} y(t)$.

Definita infine $w(t) = \exp(y(t))$

f) trovare l'equazione differenziale in forma normale soddisfatta da w e dire di che tipo di equazione si tratta;

g) calcolare esplicitamente la soluzione generale e utilizzarla per risolvere l'equazione originale;

h) sfruttare g) per studiare l'intervallo di definizione delle soluzioni; in particolare dire se esistono soluzioni di (2) che non sono definite in futuro e/o passato;

i) utilizzare g) per dimostrare che, quando globalmente definita, $y(t)$ è asintotica a $u(t) = -2\ln|t|$ per $t \to \pm\infty$ (più precisamente si ha $\lim_{t\to\pm\infty}(y(t) - u(t)) = 0$).

2 Data la matrice

$$A := \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 4 & -2 & 9 \\ 2 & -2 & 6 \end{pmatrix}$$

a) calcolare la matrice fondamentale e^{tA};

b) risolvere il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' = Ay + b \\ y(1) = y_1, \end{cases}$$

dove $y_1 = (0, 0, -2)^t$ e $b = (2, 0, 2)^t$.

Punteggi indicativi: 2+2+3+6+2+3+6+4+2, 5+4

Appello del 17 settembre 2012

1 Data l'equazione differenziale

$$y' = \frac{y^2 - 1}{|ty| + 1}$$

a) studiare l'esistenza e unicità locale delle soluzioni;

b) dimostrare che il campo vettoriale non è globalmente lipschitziano né sublineare sul dominio;

c) individuare gli eventuali equilibri e le sottoregioni del piano dove le soluzioni sono crescenti/decrescenti. Esistono orbite limitate non banali?

d) supposto che $y(t)$ sia soluzione e posto $z(t) = y(-t)$, $w(t) = -y(-t)$, dire quale eventualmente tra $z(t)$ e $w(t)$ è ancora soluzione dell'equazione;

e) dimostrare che le soluzioni dei problemi di Cauchy con dati iniziali $y(t_0) = y_0$ con $t_0 > 0$ sono globalmente definite in futuro, mentre quelle con $t_0 < 0$ sono globalmente definite in passato;

f) dimostrare che le soluzioni $y(t)$ dei problemi di Cauchy con dati iniziali $y(0) = y_0$ sono globalmente definite in futuro e passato;

g) studiare, al variare di y_0, l'esistenza e l'eventuale valore dei limiti $\lim_{t\to+\infty} y(t)$ e $\lim_{t\to-\infty} y(t)$.

2 Data la matrice

$$A := \begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

a) trovare la matrice fondamentale e^{tA};

b) calcolare la soluzione del problema di Cauchy $y' = Ay$, $y(2) = (1, 0, 1)^T$.

Punteggi indicativi: 5+3+3+3+5+3+7, 6+3,