Università degli Studi di Udine | Anno Accademico 2010/2011

Facoltà di Medicina e Chirurgia
Corso di Laurea in Tecniche di Radiologia Medica per Immagini e Radioterapia e Tecniche di Neurofisiopatologia

Modulo di Analisi Matematica

Appello del 17 febbraio 2011

N.B.: scrivere nome, cognome e numero di matricola su ogni foglio consegnato.
Tempo a disposizione: 1.5 ore

1 Data la funzione

$$g(x) = 2x^2 - x^4$$

a) determinare il dominio $\mathcal{D}$
b) studiare il segno di g
c) calcolare i limiti agli estremi del dominio
d) determinare gli intervalli in cui la funzione è crescente, quelli in cui è decrescente, e gli eventuali punti di massimo/minimo relativo e/o assoluto
e) determinare gli intervalli in cui la funzione è convessa e quelli in cui è concava
f) determinare l'equazione della retta tangente al grafico nel punto di ascissa $x_0 = -1$
g) disegnare un grafico approssimativo di g

2 Calcolare la derivata della funzione $f(x) = \mathrm{tg}(x + \cos x)$.

3 Calcolare i seguenti integrali

$$\int \frac{2+3x}{1+x^2}\,dx, \qquad \int_0^1 (2x^5 + 6x^2 - 1)\,dx.$$

4 Scrivere la definizione di derivata di una funzione f in un punto x_0 e darne il significato geometrico.

Soluzioni dell'esame del 17 febbraio 2011

1a La funzione è polinomiale con dominio $\mathcal{D} = \mathbb{R}$ ed è ivi continua e derivabile.

1b Essendo $g(x) = x^2(2 - x^2)$, si ha che g è positiva se e solo se $2 - x^2 > 0$ cioè se $-\sqrt{2} < x < \sqrt{2}$. Inoltre si annulla in $x = -\sqrt{2}$, $x = 0$ e $x = \sqrt{2}$.

1c Ha senso andare a studiare i limiti a $\pm\infty$. Si ha

$$\lim_{x\to\pm\infty} g(x) = \lim_{x\to\pm\infty} x^2(2 - x^2) = [+\infty \cdot -\infty] = -\infty,$$

quindi la funzione non ammette minimo assoluto.

1d La derivata prima è

$$g'(x) = 4x - 4x^3 = 4x(1 - x^2)$$

ed è ≥ 0 se e solo se $x \leq -1$ oppure $0 \leq x \leq 1$, perciò g è crescente in $]-\infty, -1[$ e in $]0, 1[$, mentre è decrescente in $]-1, 0[$ e in $]1, +\infty[$. In $x = -1$ e $x = 1$ ammette due massimi relativi (e assoluti); in $x = 0$ ammette un minimo relativo.

1e La derivata seconda è

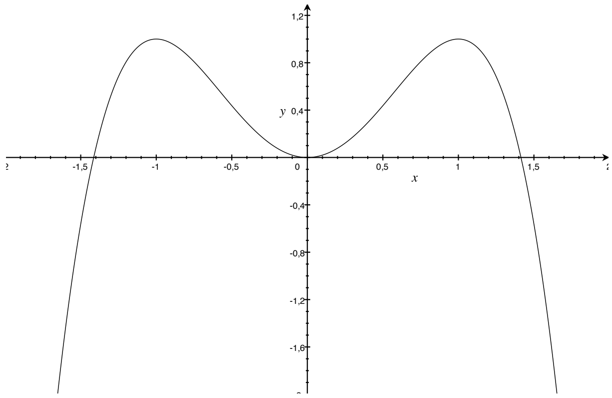
$$g''(x) = 4 - 12x^2 = 4(1 - 3x^2),$$

ed è ≥ 0 se e solo se $1 - 3x^2 \geq 0$ cioè se $-1/\sqrt{3} \leq x \leq 1/\sqrt{3}$, perciò g è convessa in $]-1/\sqrt{3}, 1/\sqrt{3}[$, mentre è concava in $]-\infty, -1/\sqrt{3}[$ e in $]1/\sqrt{3}, +\infty[$. In $x = \pm 1/\sqrt{3}$ ammette due punti di flesso.

1f L'equazione della retta tangente al grafico nel generico punto $(x_0, g(x_0))$ è

$$y = (x - x_0)g'(x_0) + g(x_0).$$

Poiché $g(-1) = 1$ e $g'(-1) = 0$, l'equazione della retta cercata è $y = 1$.



2 Utilizzando la regola di derivazione delle funzioni composte si ha

$$f'(x) = \frac{1}{\cos^2(x + \cos x)}(1 - \operatorname{sen} x).$$

3 Dalle tabelle si ottiene

$$\int \frac{2 + 3x}{1 + x^2}\,dx = 2\int \frac{1}{1 + x^2}\,dx + \frac{3}{2}\int \frac{2x}{1 + x^2}\,dx = 2\operatorname{arctg} x + \frac{3}{2}\log(1 + x^2) + c,$$

con c costante arbitraria, e dal teorema fondamentale del calcolo si ha

$$\int_0^1 (2x^5 + 6x^2 - 1)\,dx = \Big[2\frac{x^6}{6} + 6\frac{x^3}{3} - x\Big]_0^1 = \Big(\frac{1}{3} + 2 - 1\Big) - 0 = \frac{4}{3}.$$

$\boxed{\mathbf{4}}$ La derivata $f'(x_0)$ di una funzione f nel punto x_0 è il limite, se esiste finito, del rapporto incrementale nel punto, cioè

$$f'(x_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}.$$

Geometricamente rappresenta il coefficiente angolare della retta tangente al grafico della funzione nel punto $(x_0, f(x_0))$.