Università degli Studi di Udine — Anno Accademico 2010/2011

Facoltà di Medicina e Chirurgia
Corso di Laurea in Tecniche di Radiologia Medica
per Immagini e Radioterapia

Modulo di Analisi Matematica

Pre-appello del 20 dicembre 2010

N.B.: scrivere nome, cognome e numero di matricola su ogni foglio consegnato.
Tempo a disposizione: 1.5 ore

1 Data la funzione

$$g(x) = 2x^2 - x - x^3$$

a) determinare il dominio $\mathcal{D}$
b) studiare il segno di g
c) calcolare i limiti agli estremi del dominio
d) determinare gli intervalli in cui la funzione è crescente, quelli in cui è decrescente, e gli eventuali punti di massimo/minimo relativo e/o assoluto
e) determinare gli intervalli in cui la funzione è convessa e quelli in cui è concava
f) determinare l'equazione della retta tangente al grafico nel punto di ascissa $x_0 = -1$
g) disegnare un grafico approssimativo di g

2 Calcolare la derivata della funzione $f(x) = \dfrac{1}{\cos(x^2 - x + 2)}$.

3 Calcolare i seguenti integrali

$$\int \frac{3\sqrt{x} - 4\sqrt[3]{x}}{x\sqrt[3]{x}}\,dx, \qquad \int_{-1}^{0} (3x^4 - 3x^3 - x)\,dx.$$

4 Scrivere la definizione di primitiva di una funzione f in un intervallo $[a, b]$.

Soluzioni dell'esame del 20 dicembre 2010

1a La funzione è polinomiale con dominio $\mathcal{D} = \mathbb{R}$ ed è ivi continua e derivabile.

1b Essendo $g(x) = -x(x-1)^2$, si ha che g è positiva per $x < 0$, negativa per $x > 0$ e $x \neq 1$, e si annulla in $x = 0$ e $x = 1$.

1c Ha senso andare a studiare i limiti a $\pm\infty$. Si ha

$$\lim_{x\to\pm\infty} g(x) = \lim_{x\to\pm\infty} -x(x-1)^2 = [\mp\infty \cdot +\infty] = \mp\infty,$$

quindi la funzione non ammette massimo né minimo.

1d La derivata prima è

$$g'(x) = -3x^2 + 4x - 1$$

ed è ≥ 0 se e solo se $1/3 \leq x \leq 1$, perciò g è crescente in $]1/3, 1[$, mentre è decrescente in $]-\infty, 1/3[$ e in $]1, +\infty[$. In $x = 1/3$ e $x = 1$ ammette, rispettivamente, un minimo ed un massimo relativo.

1e La derivata seconda è

$$g''(x) = -6x + 4,$$

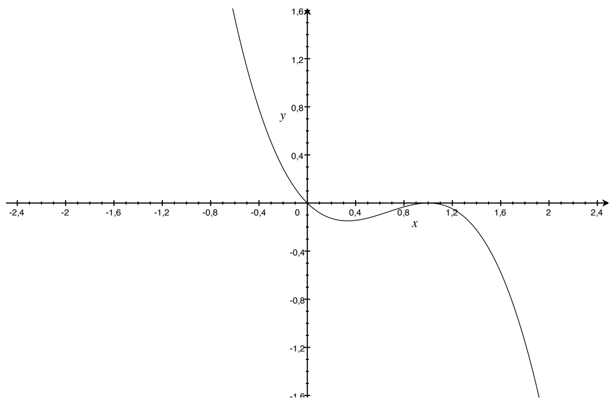
ed è ≥ 0 se e solo se $x \leq 2/3$, perciò g è concava in $]2/3, +\infty[$, mentre è convessa in $]-\infty, 2/3[$. In $x = 2/3$ ammette un punto di flesso.

1f L'equazione della retta tangente al grafico nel generico punto $(x_0, g(x_0))$ è

$$y = (x - x_0)g'(x_0) + g(x_0).$$

Poiché $g(-1) = 4$ e $g'(-1) = -8$, l'equazione della retta cercata è

$$y = -8(x+1) + 4, \quad \text{cioè} \quad y = -8x - 4.$$



2 Utilizzando la regola di derivazione delle funzioni composte si ha

$$f'(x) = -\frac{1}{\cos^2(x^2 - x + 2)}(-\operatorname{sen}(x^2 - x + 2))(2x - 1) = \frac{(2x-1)\operatorname{sen}(x^2 - x + 2)}{\cos^2(x^2 - x + 2)}.$$

3 Ricordando che $\sqrt[n]{x} = x^{1/n}$ e $1/x^\alpha = x^{-\alpha}$, dalle tabelle si ottiene

$$\int \frac{3\sqrt{x} - 4\sqrt[3]{x}}{x\sqrt[3]{x}}\,dx = \int \left(3x^{1/2-1-1/3} - \frac{4}{x}\right)dx = 3\int x^{-5/6}\,dx - 4\int \frac{1}{x}\,dx$$
$$= 3\frac{x^{1/6}}{1/6} - 4\ln|x| + c = 18\sqrt[6]{x} - 4\ln|x| + c,$$

con c costante arbitraria, e dal teorema fondamentale del calcolo si ha

$$\int_{-1}^{0}(3x^4 - 3x^3 - x)\,dx = \Big[3\frac{x^5}{5} - 3\frac{x^4}{4} - \frac{x^2}{2}\Big]_{-1}^{0} = 0 - \Big(-\frac{3}{5} - \frac{3}{4} - \frac{1}{2}\Big) = \frac{37}{20}.$$

$\boxed{\mathbf{4}}$ Una primitiva di f in $[a,b]$ è una funzione $F : [a,b] \to \mathbb{R}$ derivabile e tale che $F'(x) = f(x)$ per ogni $x \in [a,b]$.