Università degli Studi di Udine — Anno Accademico 2010/2011

Facoltà di Medicina e Chirurgia
Corso di Laurea in Tecniche di Neurofisiopatologia

Modulo di Analisi Matematica

Pre-appello del 17 dicembre 2010

N.B.: scrivere nome, cognome e numero di matricola su ogni foglio consegnato.
Tempo a disposizione: 1.5 ore

1 Data la funzione

$$g(x) = 2x^3 - x^2 - 4x$$

a) determinare il dominio $\mathcal{D}$

b) studiare il segno di g

c) calcolare i limiti agli estremi del dominio

d) determinare gli intervalli in cui la funzione è crescente, quelli in cui è decrescente, e gli eventuali punti di massimo/minimo relativo e/o assoluto

e) determinare gli intervalli in cui la funzione è convessa e quelli in cui è concava

f) determinare l'equazione della retta tangente al grafico nel punto di ascissa $x_0 = -1$

g) disegnare un grafico approssimativo di g

2 Calcolare la derivata della funzione $f(x) = \ln(x^2 + x + 1)$.

3 Calcolare i seguenti integrali

$$\int \frac{3^x \cos^2 x - 4}{\cos^2 x}\, dx, \qquad \int_0^1 (3x^7 - x^2 - 2)\, dx.$$

4 Scrivere la definizione di derivata di una funzione f in un punto x_0 e darne il significato geometrico.

Soluzioni dell'esame del 17 dicembre 2010

1a La funzione è polinomiale con dominio $\mathcal{D} = \mathbb{R}$ ed è ivi continua e derivabile.

1b Essendo $g(x) = x(2x^2 - x - 4)$, poiché $2x^2 - x - 4 \geq 0$ se e solo se $x \leq \frac{1-\sqrt{33}}{4}$ oppure $x \geq \frac{1+\sqrt{33}}{4}$ si ha

$$g(x) \begin{cases} < 0, & \text{se } x \in]-\infty, \frac{1-\sqrt{33}}{4}[\cup]0, \frac{1+\sqrt{33}}{4}[, \\ = 0, & \text{se } x = \frac{1-\sqrt{33}}{4} \text{ oppure } x = \frac{1+\sqrt{33}}{4}, \\ > 0, & \text{se } x \in]\frac{1-\sqrt{33}}{4}, 0[\cup]\frac{1+\sqrt{33}}{4}, +\infty[. \end{cases}$$

1c Ha senso andare a studiare i limiti a $\pm\infty$. Si ha

$$\lim_{x\to\pm\infty} g(x) = \lim_{x\to\pm\infty} x^3(2 - 1/x - 4/x^2) = [\pm\infty \cdot 2] = \pm\infty,$$

quindi la funzione non ammette massimo né minimo.

1d La derivata prima è

$$g'(x) = 6x^2 - 2x - 4 = 2(3x^2 - x - 2),$$

ed è ≥ 0 se e solo se $x \leq -2/3$ oppure $x \geq 1$, perciò g è crescente in $]-\infty, -2/3[$ e in $]1, +\infty[$, mentre è decrescente in $]-2/3, 1[$. In $x = -2/3$ e $x = 1$ ammette, rispettivamente, un massimo ed un minimo relativo.

1e La derivata seconda è

$$g''(x) = 12x - 2,$$

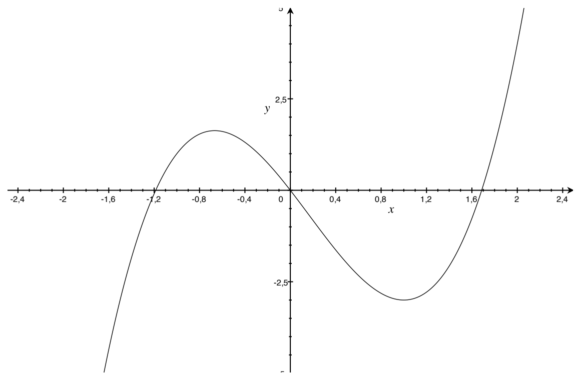
ed è ≥ 0 se e solo se $x \geq 1/6$, perciò g è convessa in $]1/6, +\infty[$, mentre è concava in $]-\infty, 1/6[$. In $x = 1/6$ ammette un punto di flesso.

1f L'equazione della retta tangente al grafico nel generico punto $(x_0, g(x_0))$ è

$$y = (x - x_0)g'(x_0) + g(x_0).$$

Poiché $g(-1) = 1$ e $g'(-1) = 4$, l'equazione della retta cercata è

$$y = 4(x+1) + 1, \quad \text{cioè} \quad y = 4x + 5.$$



2 Utilizzando la regola di derivazione delle funzioni composte si ha

$$f'(x) = \frac{2x+1}{x^2+x+1}.$$

$\boxed{3}$ Dalle tabelle si ottiene

$$\int \frac{3^x \cos^2 x - 4}{\cos^2 x}\, dx = \int 3^x\, dx - 4 \int \frac{1}{\cos^2 x}\, dx = \frac{3^x}{\ln 3} - 4 \operatorname{tg} x + c,$$

con c costante arbitraria, e dal teorema fondamentale del calcolo si ha

$$\int_0^1 (3x^7 - x^2 - 2)\, dx = \Big[3\frac{x^8}{8} - \frac{x^3}{3} - 2x\Big]_0^1 = \Big(\frac{3}{8} - \frac{1}{3} - 2\Big) - 0 = -\frac{47}{24}.$$

$\boxed{4}$ La derivata $f'(x_0)$ di una funzione f nel punto x_0 è il limite, se esiste finito, del rapporto incrementale nel punto, cioè

$$f'(x_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}.$$

Geometricamente rappresenta il coefficiente angolare della retta tangente al grafico della funzione nel punto $(x_0, f(x_0))$.