

Integrali

Motivazioni

Introduzione

Motivazioni

Integrale indefinito

Integrale definito

Proprietà dell'integrale

Il teorema fondamentale

Metodi di integrazione



Motivazioni principali

Introduzione

Motivazioni

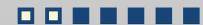
Integrale indefinito

Integrale definito

Proprietà dell'integrale

Il teorema fondamentale

Metodi di integrazione



Motivazioni principali

area di regioni del piano

Introduzione

Motivazioni

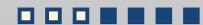
Integrale indefinito

Integrale definito

Proprietà dell'integrale

Il teorema fondamentale

Metodi di integrazione



Motivazioni principali

area di regioni del piano \longleftrightarrow integrale definito

Introduzione

Motivazioni

Integrale indefinito

Integrale definito

Proprietà dell'integrale

Il teorema fondamentale

Metodi di integrazione



Motivazioni principali

area di regioni del piano \longleftrightarrow **integrale definito**

ricerca delle primitive

Introduzione

Motivazioni

Integrale indefinito

Integrale definito

Proprietà dell'integrale

Il teorema fondamentale

Metodi di integrazione



Motivazioni principali

area di regioni del piano \longleftrightarrow **integrale definito**

ricerca delle primitive \longleftrightarrow **integrale indefinito**

Introduzione

Motivazioni

Integrale indefinito

Integrale definito

Proprietà dell'integrale

Il teorema fondamentale

Metodi di integrazione



Motivazioni principali

area di regioni del piano \longleftrightarrow integrale definito

ricerca delle primitive \longleftrightarrow integrale indefinito

Per certi aspetti, l'operazione di ricerca delle primitive può essere considerata come l'operazione inversa della derivazione

Introduzione

Motivazioni

Integrale indefinito

Integrale definito

Proprietà dell'integrale

Il teorema fondamentale

Metodi di integrazione



Integrale indefinito

Introduzione

Integrale indefinito

Primitive di una funzione

Esempi

Integrale indefinito

Tabelle di derivate e primitive

Tabelle di primitive 1

Tabelle di primitive 2

Proprietà delle primitive

Integrale definito

Proprietà dell'integrale

Il teorema fondamentale

Metodi di integrazione

Primitive di una funzione

Sia $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione, con I intervallo

Si dice che $F : I \rightarrow \mathbb{R}$ è una **primitiva** di f su I , se F è derivabile su I e

$$F'(x) = f(x) \quad \text{per ogni } x \in I$$

Osservazione: le primitive non sono uniche!

[Introduzione](#)

[Integrale indefinito](#)

[Primitive di una funzione](#)

[Esempi](#)

[Integrale indefinito](#)

[Tabelle di derivate e primitive](#)

[Tabelle di primitive 1](#)

[Tabelle di primitive 2](#)

[Proprietà delle primitive](#)

[Integrale definito](#)

[Proprietà dell'integrale](#)

[Il teorema fondamentale](#)

[Metodi di integrazione](#)

1 Per $f(x) = 1$, una primitiva su \mathbb{R} è

$$F(x) = x$$

[Introduzione](#)

[Integrale indefinito](#)

[Primitive di una funzione](#)

[Esempi](#)

[Integrale indefinito](#)

[Tabelle di derivate e primitive](#)

[Tabelle di primitive 1](#)

[Tabelle di primitive 2](#)

[Proprietà delle primitive](#)

[Integrale definito](#)

[Proprietà dell'integrale](#)

[Il teorema fondamentale](#)

[Metodi di integrazione](#)



1 Per $f(x) = 1$, una primitiva su \mathbb{R} è

$$F(x) = x \quad \text{infatti } F'(x) = 1 = f(x)$$

[Introduzione](#)

[Integrale indefinito](#)

[Primitive di una funzione](#)

[Esempi](#)

[Integrale indefinito](#)

[Tabelle di derivate e primitive](#)

[Tabelle di primitive 1](#)

[Tabelle di primitive 2](#)

[Proprietà delle primitive](#)

[Integrale definito](#)

[Proprietà dell'integrale](#)

[Il teorema fondamentale](#)

[Metodi di integrazione](#)



1 Per $f(x) = 1$, una primitiva su \mathbb{R} è

$$F(x) = x \quad \text{infatti } F'(x) = 1 = f(x)$$

ma è anche primitiva

$$F_2(x) = x + 2 \quad \text{infatti } F_2'(x) = 1 = f(x)$$

Introduzione

Integrale indefinito

Primitive di una funzione

Esempi

Integrale indefinito

Tabelle di derivate e primitive

Tabelle di primitive 1

Tabelle di primitive 2

Proprietà delle primitive

Integrale definito

Proprietà dell'integrale

Il teorema fondamentale

Metodi di integrazione



1 Per $f(x) = 1$, una primitiva su \mathbb{R} è

$$F(x) = x \quad \text{infatti } F'(x) = 1 = f(x)$$

ma è anche primitiva

$$F_2(x) = x + 2 \quad \text{infatti } F_2'(x) = 1 = f(x)$$

e in generale sono primitive le funzioni

$$F_c(x) = x + c \quad \text{infatti } F_c'(x) = 1 = f(x)$$

Introduzione

Integrale indefinito

Primitive di una funzione

Esempi

Integrale indefinito

Tablelle di derivate e primitive

Tablelle di primitive 1

Tablelle di primitive 2

Proprietà delle primitive

Integrale definito

Proprietà dell'integrale

Il teorema fondamentale

Metodi di integrazione



1 Per $f(x) = 1$, una primitiva su \mathbb{R} è

$$F(x) = x \quad \text{infatti } F'(x) = 1 = f(x)$$

ma è anche primitiva

$$F_2(x) = x + 2 \quad \text{infatti } F_2'(x) = 1 = f(x)$$

e in generale sono primitive le funzioni

$$F_c(x) = x + c \quad \text{infatti } F_c'(x) = 1 = f(x)$$

Ogni primitiva si ottiene da $F(x)$ addizionando un generico numero reale c

Al variare di c si ottengono infinite primitive!

Introduzione

Integrale indefinito

Primitive di una funzione

Esempi

Integrale indefinito

Tablelle di derivate e primitive

Tablelle di primitive 1

Tablelle di primitive 2

Proprietà delle primitive

Integrale definito

Proprietà dell'integrale

Il teorema fondamentale

Metodi di integrazione



2 una primitiva di $f(x) = x$ è

$$F(x) = x^2/2 \quad \text{infatti} \quad F'(x) = \frac{2x}{2} = f(x)$$

Introduzione

Integrale indefinito

Primitive di una funzione

Esempi

Integrale indefinito

Tabelle di derivate e primitive

Tabelle di primitive 1

Tabelle di primitive 2

Proprietà delle primitive

Integrale definito

Proprietà dell'integrale

Il teorema fondamentale

Metodi di integrazione



2 una primitiva di $f(x) = x$ è

$$F(x) = x^2/2 \quad \text{infatti} \quad F'(x) = \frac{2x}{2} = f(x)$$

ma anche $F_c(x) = \frac{x^2}{2} + c$ con $c \in \mathbb{R}$ è ancora primitiva

Introduzione

Integrale indefinito

Primitive di una funzione

Esempi

Integrale indefinito

Tablelle di derivate e primitive

Tablelle di primitive 1

Tablelle di primitive 2

Proprietà delle primitive

Integrale definito

Proprietà dell'integrale

Il teorema fondamentale

Metodi di integrazione



2 una primitiva di $f(x) = x$ è

$$F(x) = x^2/2 \quad \text{infatti } F'(x) = \frac{2x}{2} = f(x)$$

ma anche $F_c(x) = \frac{x^2}{2} + c$ con $c \in \mathbb{R}$ è ancora primitiva

3 una primitiva di $f(x) = e^x$ è

$$F(x) = e^x \quad \text{infatti } F'(x) = e^x = f(x)$$

Introduzione

Integrale indefinito

Primitive di una funzione

Esempi

Integrale indefinito

Tabelle di derivate e primitive

Tabelle di primitive 1

Tabelle di primitive 2

Proprietà delle primitive

Integrale definito

Proprietà dell'integrale

Il teorema fondamentale

Metodi di integrazione



2 una primitiva di $f(x) = x$ è

$$F(x) = x^2/2 \quad \text{infatti } F'(x) = \frac{2x}{2} = f(x)$$

ma anche $F_c(x) = \frac{x^2}{2} + c$ con $c \in \mathbb{R}$ è ancora primitiva

3 una primitiva di $f(x) = e^x$ è

$$F(x) = e^x \quad \text{infatti } F'(x) = e^x = f(x)$$

ma anche $F_c(x) = e^x + c$ con $c \in \mathbb{R}$ è ancora primitiva

Introduzione

Integrale indefinito

Primitive di una funzione

Esempi

Integrale indefinito

Tabelle di derivate e primitive

Tabelle di primitive 1

Tabelle di primitive 2

Proprietà delle primitive

Integrale definito

Proprietà dell'integrale

Il teorema fondamentale

Metodi di integrazione



Integrale indefinito

Data $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ indichiamo con

$$\int f dx$$

l'insieme, eventualmente vuoto, di tutte le primitive di f , detto **integrale indefinito** di f

[Introduzione](#)

[Integrale indefinito](#)

[Primitive di una funzione](#)

[Esempi](#)

[Integrale indefinito](#)

[Tabelle di derivate e primitive](#)

[Tabelle di primitive 1](#)

[Tabelle di primitive 2](#)

[Proprietà delle primitive](#)

[Integrale definito](#)

[Proprietà dell'integrale](#)

[Il teorema fondamentale](#)

[Metodi di integrazione](#)



Integrale indefinito

Data $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ indichiamo con

$$\int f dx$$

l'insieme, eventualmente vuoto, di tutte le primitive di f , detto **integrale indefinito** di f

Teorema. Sia $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione. Se F, G sono primitive di f allora $\exists c \in \mathbb{R}$:

$$F(x) - G(x) = c, \quad \text{per ogni } x \in [a, b]$$

Quindi, due primitive di f su un intervallo differiscono per una costante

Introduzione

Integrale indefinito

Primitive di una funzione

Esempi

Integrale indefinito

Tablelle di derivate e primitive

Tablelle di primitive 1

Tablelle di primitive 2

Proprietà delle primitive

Integrale definito

Proprietà dell'integrale

Il teorema fondamentale

Metodi di integrazione



Teorema. Se F è una primitiva di f su I intervallo, allora tutte le altre primitive di f si ottengono aggiungendo una costante:

$$\int f dx = \{F + c : c \in \mathbb{R}\}$$

Introduzione

Integrale indefinito

Primitive di una funzione

Esempi

Integrale indefinito

Tabelle di derivate e primitive

Tabelle di primitive 1

Tabelle di primitive 2

Proprietà delle primitive

Integrale definito

Proprietà dell'integrale

Il teorema fondamentale

Metodi di integrazione



Teorema. Se F è una primitiva di f su I intervallo, allora tutte le altre primitive di f si ottengono aggiungendo una costante:

$$\int f dx = \{F + c : c \in \mathbb{R}\}$$

Problema: come si calcolano le primitive?

Introduzione

Integrale indefinito

Primitive di una funzione

Esempi

Integrale indefinito

Tabelle di derivate e primitive

Tabelle di primitive 1

Tabelle di primitive 2

Proprietà delle primitive

Integrale definito

Proprietà dell'integrale

Il teorema fondamentale

Metodi di integrazione



Teorema. Se F è una primitiva di f su I intervallo, allora tutte le altre primitive di f si ottengono aggiungendo una costante:

$$\int f dx = \{F + c : c \in \mathbb{R}\}$$

Problema: come si calcolano le primitive?

Generalmente, una tabella di derivate letta al contrario fornisce una tabella di primitive

Introduzione

Integrale indefinito

Primitive di una funzione

Esempi

Integrale indefinito

Tabelle di derivate e primitive

Tabelle di primitive 1

Tabelle di primitive 2

Proprietà delle primitive

Integrale definito

Proprietà dell'integrale

Il teorema fondamentale

Metodi di integrazione



Tablelle di derivate e primitive

Funzione	Derivata
kx	k
x^β	$\beta x^{\beta-1}$
$\log x $	x^{-1}
$\cos x$	$-\text{sen } x$
$\text{sen } x$	$\cos x$
a^x	$a^x \log a$
$\text{arctg } x$	$\frac{1}{x^2 + 1}$
$\text{tg } x$	$\frac{1}{\cos^2 x}$
$\text{cotg } x$	$-\frac{1}{\text{sen}^2 x}$
$\text{arcsen } x$	$\frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$

Tabelle di derivate e primitive

Funzione	Derivata
kx	k
x^β	$\beta x^{\beta-1}$
$\log x $	x^{-1}
$\cos x$	$-\text{sen } x$
$\text{sen } x$	$\cos x$
a^x	$a^x \log a$
$\text{arctg } x$	$\frac{1}{x^2 + 1}$
$\text{tg } x$	$\frac{1}{\cos^2 x}$
$\text{cotg } x$	$-\frac{1}{\text{sen}^2 x}$
$\text{arcsen } x$	$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

Funzione	Primitiva
k (cost.)	kx
$\beta x^{\beta-1}$	x^β
x^{-1}	$\log x $
$-\text{sen } x$	$\cos x$
$\cos x$	$\text{sen } x$
$a^x \log a$	a^x
$\frac{1}{x^2 + 1}$	$\text{arctg } x$
$\frac{1}{\cos^2 x}$	$\text{tg } x$
$-\frac{1}{\text{sen}^2 x}$	$\text{cotg } x$
$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\text{arcsen } x$

Tablelle di derivate e primitive

Funzione	Derivata
kx	k
x^β	$\beta x^{\beta-1}$
$\log x $	x^{-1}
$\cos x$	$-\text{sen } x$
$\text{sen } x$	$\cos x$
a^x	$a^x \log a$
$\text{arctg } x$	$\frac{1}{x^2 + 1}$
$\text{tg } x$	$\frac{1}{\cos^2 x}$
$\text{cotg } x$	$-\frac{1}{\text{sen}^2 x}$
$\text{arcsen } x$	$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

Funzione	Primitiva
k (cost.)	kx
$\beta x^{\beta-1}$	x^β
x^{-1}	$\log x $
$-\text{sen } x$	$\cos x$
$\cos x$	$\text{sen } x$
$a^x \log a$	a^x
$\frac{1}{x^2 + 1}$	$\text{arctg } x$
$\frac{1}{\cos^2 x}$	$\text{tg } x$
$-\frac{1}{\text{sen}^2 x}$	$\text{cotg } x$
$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\text{arcsen } x$

Funzione	Primitiva
k (cost.)	kx
$x^\alpha, \alpha \neq -1$	$\frac{x^{\alpha+1}}{\alpha + 1}$
x^{-1}	$\log x $
$\text{sen } x$	$-\cos x$
$\cos x$	$\text{sen } x$
a^x	$\frac{a^x}{\log a}$
$\frac{1}{x^2 + 1}$	$\text{arctg } x$
$\frac{1}{\cos^2 x}$	$\text{tg } x$
$\frac{1}{\text{sen}^2 x}$	$-\text{cotg } x$
$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\text{arcsen } x$

Tabelle di primitive 1

Funzione	Primitiva
k (cost.)	kx
$x^\alpha, \alpha \neq -1$	$\frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}$
x^{-1}	$\log x $
$\text{sen } x$	$-\cos x$
$\cos x$	$\text{sen } x$
a^x	$\frac{a^x}{\log a}$
$\text{senh } x$	$\cosh x$
$\cosh x$	$\text{senh } x$

Funzione	Primitiva
$\frac{x}{x^2+k}$	$\frac{1}{2} \log x^2+k $
$\frac{1}{x^2+k^2}, k \neq 0$	$\frac{1}{k} \text{arctg} \frac{x}{k}$
$\frac{1}{x^2-k^2}, k \neq 0$	$\frac{1}{2k} \log \left \frac{x-k}{x+k} \right $
$\frac{1}{\cos^2 x} = 1 + \text{tg}^2 x$	$\text{tg } x$
$\frac{1}{\text{sen}^2 x} = 1 + \text{cotg}^2 x$	$-\text{cotg } x$
$\frac{1}{\cosh^2 x} = 1 - \text{tgh}^2 x$	$\text{tgh } x$
$\frac{1}{\sqrt{k+x^2}}, k \neq 0$	$\log x + \sqrt{x^2+k} $
$\frac{1}{\sqrt{k^2-x^2}}, k > 0$	$\arcsen\left(\frac{x}{k}\right)$

Tabella 1

Tabelle di primitive 2

Se f è una funzione derivabile con derivata continua:

Funzione	Primitiva	Funzione	Primitiva
$f(x)^\alpha f'(x), \alpha \neq -1$	$\frac{f(x)^{\alpha+1}}{\alpha+1}$	$f'(x)a^{f(x)}$	$\frac{a^{f(x)}}{\log a}$
$\frac{f'(x)}{f(x)}$	$\log f(x) $	$\frac{f'(x)}{\sqrt{1-f(x)^2}}$	$\arcsen f(x)$
$f'(x) \cos f(x)$	$\sen f(x)$	$\frac{f'(x)}{1+f(x)^2}$	$\arctg f(x)$
$f'(x) \sen f(x)$	$-\cos f(x)$	$\frac{f'(x)}{\sqrt{1+f(x)^2}}$	$\log f(x) + \sqrt{1+f(x)^2} $

Tabella 2

Proprietà delle primitive

Siano F e G primitive di f e g su I intervallo, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, allora

(i) αF è una primitiva di αf

(ii) $F + G$ è una primitiva di $f + g$

(iii) $F(x + \beta)$ è una primitiva di $f(x + \beta)$

(iv) se $\alpha \neq 0$ allora $\frac{F(\alpha x)}{\alpha}$ è una primitiva di $f(\alpha x)$

(v) se $\alpha \neq 0$ allora $\frac{F(\alpha x + \beta)}{\alpha}$ è primitiva di $f(\alpha x + \beta)$

Introduzione

Integrale indefinito

Primitive di una funzione

Esempi

Integrale indefinito

Tabelle di derivate e primitive

Tabelle di primitive 1

Tabelle di primitive 2

Proprietà delle primitive

Integrale definito

Proprietà dell'integrale

Il teorema fondamentale

Metodi di integrazione

Integrale definito

Introduzione

Integrale indefinito

Integrale definito

Sottografico di una funzione

Area del sottografico

Somma inferiore

Somma superiore

Interpretazione geometrica

Esempio

Integrale superiore e inferiore

Integrale definito di Riemann

Osservazione

Esistenza di funzioni integrabili

Funzioni di segno variabile

Proprietà dell'integrale

Il teorema fondamentale

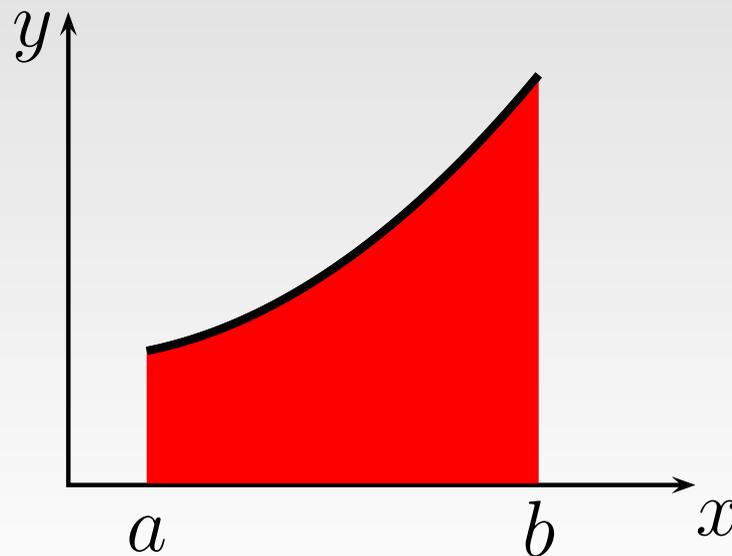
Metodi di integrazione

Sottografico di una funzione

Sia $f : [a, b] \rightarrow [0, +\infty[$ una funzione limitata

Il **sottografico** (o rettangoloide o trapezoide) di f è l'insieme

$$SG(f) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : a \leq x \leq b, 0 \leq y \leq f(x)\}$$



[Introduzione](#)

[Integrale indefinito](#)

[Integrale definito](#)

[Sottografico di una funzione](#)

[Area del sottografico](#)

[Somma inferiore](#)

[Somma superiore](#)

[Interpretazione geometrica](#)

[Esempio](#)

[Integrale superiore e inferiore](#)

[Integrale definito di Riemann](#)

[Osservazione](#)

[Esistenza di funzioni integrabili](#)

[Funzioni di segno variabile](#)

[Proprietà dell'integrale](#)

[Il teorema fondamentale](#)

[Metodi di integrazione](#)

Area del sottografico

Problema: vogliamo “definire” e calcolare l’area del sottografico $SG(f)$ di f

Introduzione

Integrale indefinito

Integrale definito

Sottografico di una funzione

Area del sottografico

Somma inferiore

Somma superiore

Interpretazione geometrica

Esempio

Integrale superiore e inferiore

Integrale definito di Riemann

Osservazione

Esistenza di funzioni integrabili

Funzioni di segno variabile

Proprietà dell’integrale

Il teorema fondamentale

Metodi di integrazione



Area del sottografico

Problema: vogliamo “definire” e calcolare l’area del sottografico $SG(f)$ di f

Idea fondamentale

Si inscrive e circoscrive il sottografico in regioni (rettangoli) la cui area sia calcolabile elementarmente ottenendo delle approssimazioni per difetto e per eccesso

L’area sarà l’elemento separatore tra le due classi d’approssimazioni

Introduzione

Integrale indefinito

Integrale definito

Sottografico di una funzione

Area del sottografico

Somma inferiore

Somma superiore

Interpretazione geometrica

Esempio

Integrale superiore e inferiore

Integrale definito di Riemann

Osservazione

Esistenza di funzioni integrabili

Funzioni di segno variabile

Proprietà dell’integrale

Il teorema fondamentale

Metodi di integrazione



Sia f una funzione limitata in $[a, b]$

Prendiamo una **partizione** \mathcal{P} di $[a, b]$ cioè un insieme finito di punti

$$\mathcal{P} = \{x_0, x_1, x_2, \dots, x_n\}$$

tali che

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_n = b$$



[Introduzione](#)

[Integrale indefinito](#)

[Integrale definito](#)

[Sottografico di una funzione](#)

[Area del sottografico](#)

[Somma inferiore](#)

[Somma superiore](#)

[Interpretazione geometrica](#)

[Esempio](#)

[Integrale superiore e inferiore](#)

[Integrale definito di Riemann](#)

[Osservazione](#)

[Esistenza di funzioni integrabili](#)

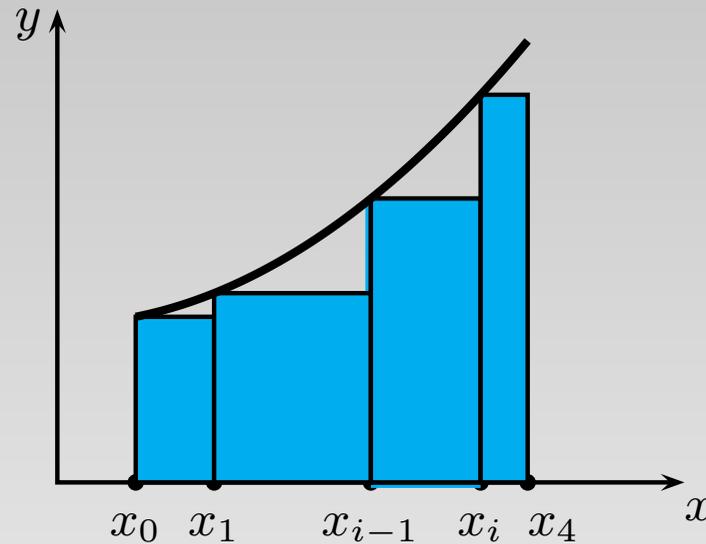
[Funzioni di segno variabile](#)

[Proprietà dell'integrale](#)

[Il teorema fondamentale](#)

[Metodi di integrazione](#)

Somma inferiore



$s(f, \mathcal{P}) =$ somma delle aree
dei rettangoli in figura

[Introduzione](#)

[Integrale indefinito](#)

[Integrale definito](#)

[Sottografico di una funzione](#)

[Area del sottografico](#)

[Somma inferiore](#)

[Somma superiore](#)

[Interpretazione geometrica](#)

[Esempio](#)

[Integrale superiore e inferiore](#)

[Integrale definito di Riemann](#)

[Osservazione](#)

[Esistenza di funzioni integrabili](#)

[Funzioni di segno variabile](#)

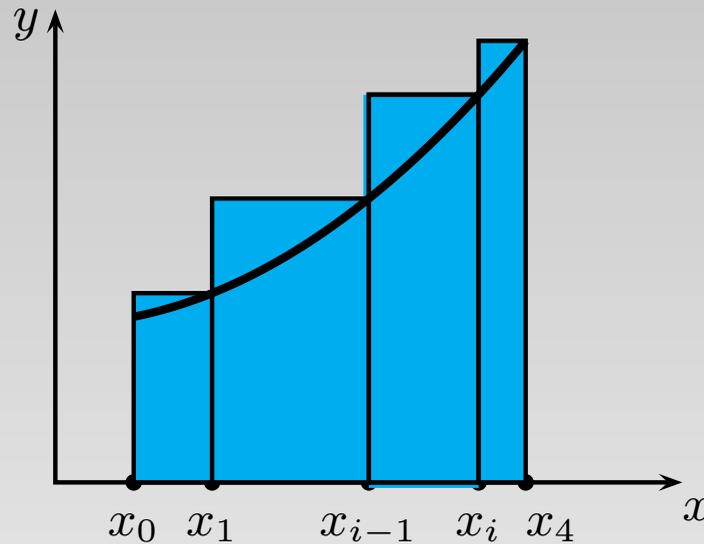
[Proprietà dell'integrale](#)

[Il teorema fondamentale](#)

[Metodi di integrazione](#)

□

Somma superiore



$S(f, \mathcal{P}) =$ somma delle aree
dei rettangoli in figura

[Introduzione](#)

[Integrale indefinito](#)

[Integrale definito](#)

[Sottografico di una funzione](#)

[Area del sottografico](#)

[Somma inferiore](#)

[Somma superiore](#)

[Interpretazione geometrica](#)

[Esempio](#)

[Integrale superiore e inferiore](#)

[Integrale definito di Riemann](#)

[Osservazione](#)

[Esistenza di funzioni integrabili](#)

[Funzioni di segno variabile](#)

[Proprietà dell'integrale](#)

[Il teorema fondamentale](#)

[Metodi di integrazione](#)

□

Interpretazione geometrica

Quindi $s(f, \mathcal{P})$ e $S(f, \mathcal{P})$ hanno l'evidente significato geometrico di somma delle aree di rettangoli inscritti e circoscritti, rispettivamente, al sottografico di f

[Introduzione](#)

[Integrale indefinito](#)

[Integrale definito](#)

[Sottografico di una funzione](#)

[Area del sottografico](#)

[Somma inferiore](#)

[Somma superiore](#)

[Interpretazione geometrica](#)

[Esempio](#)

[Integrale superiore e inferiore](#)

[Integrale definito di Riemann](#)

[Osservazione](#)

[Esistenza di funzioni integrabili](#)

[Funzioni di segno variabile](#)

[Proprietà dell'integrale](#)

[Il teorema fondamentale](#)

[Metodi di integrazione](#)



Interpretazione geometrica

Quindi $s(f, \mathcal{P})$ e $S(f, \mathcal{P})$ hanno l'evidente significato geometrico di somma delle aree di rettangoli inscritti e circoscritti, rispettivamente, al sottografico di f

Problema: come variano le somme superiori e inferiori al variare della partizione \mathcal{P} ?

[Introduzione](#)

[Integrale indefinito](#)

[Integrale definito](#)

[Sottografico di una funzione](#)

[Area del sottografico](#)

[Somma inferiore](#)

[Somma superiore](#)

[Interpretazione geometrica](#)

[Esempio](#)

[Integrale superiore e inferiore](#)

[Integrale definito di Riemann](#)

[Osservazione](#)

[Esistenza di funzioni integrabili](#)

[Funzioni di segno variabile](#)

[Proprietà dell'integrale](#)

[Il teorema fondamentale](#)

[Metodi di integrazione](#)



Interpretazione geometrica

Quindi $s(f, \mathcal{P})$ e $S(f, \mathcal{P})$ hanno l'evidente significato geometrico di somma delle aree di rettangoli inscritti e circoscritti, rispettivamente, al sottografico di f

Problema: come variano le somme superiori e inferiori al variare della partizione \mathcal{P} ?

Anzitutto si osserva che

$$s(f, \mathcal{P}) \leq S(f, \mathcal{Q})$$

per ogni coppia di partizioni \mathcal{P} e \mathcal{Q} di $[a, b]$

Introduzione

Integrale indefinito

Integrale definito

Sottografico di una funzione

Area del sottografico

Somma inferiore

Somma superiore

Interpretazione geometrica

Esempio

Integrale superiore e inferiore

Integrale definito di Riemann

Osservazione

Esistenza di funzioni integrabili

Funzioni di segno variabile

Proprietà dell'integrale

Il teorema fondamentale

Metodi di integrazione



Consideriamo la funzione

$$f(x) = x^2 - 5x + 7, \quad x \in [0, 2]$$

Compariamo $s(f, n)$ e $S(f, n)$ per partizioni in n intervallini di uguale ampiezza

[Introduzione](#)

[Integrale indefinito](#)

[Integrale definito](#)

[Sottografico di una funzione](#)

[Area del sottografico](#)

[Somma inferiore](#)

[Somma superiore](#)

[Interpretazione geometrica](#)

[Esempio](#)

[Integrale superiore e inferiore](#)

[Integrale definito di Riemann](#)

[Osservazione](#)

[Esistenza di funzioni integrabili](#)

[Funzioni di segno variabile](#)

[Proprietà dell'integrale](#)

[Il teorema fondamentale](#)

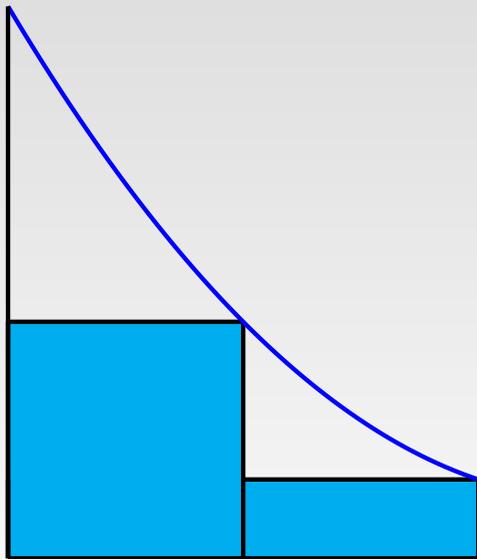
[Metodi di integrazione](#)



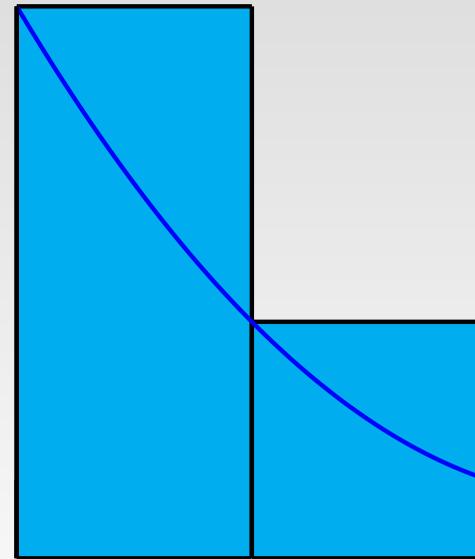
Consideriamo la funzione

$$f(x) = x^2 - 5x + 7, \quad x \in [0, 2]$$

Compariamo $s(f, n)$ e $S(f, n)$ per partizioni in n intervallini di uguale ampiezza



$$s(f, 2) = 4.0000$$



$$S(f, 2) = 10.0000$$

[Introduzione](#)

[Integrale indefinito](#)

[Integrale definito](#)

[Sottografico di una funzione](#)

[Area del sottografico](#)

[Somma inferiore](#)

[Somma superiore](#)

[Interpretazione geometrica](#)

Esempio

[Integrale superiore e inferiore](#)

[Integrale definito di Riemann](#)

[Osservazione](#)

[Esistenza di funzioni integrabili](#)

[Funzioni di segno variabile](#)

[Proprietà dell'integrale](#)

[Il teorema fondamentale](#)

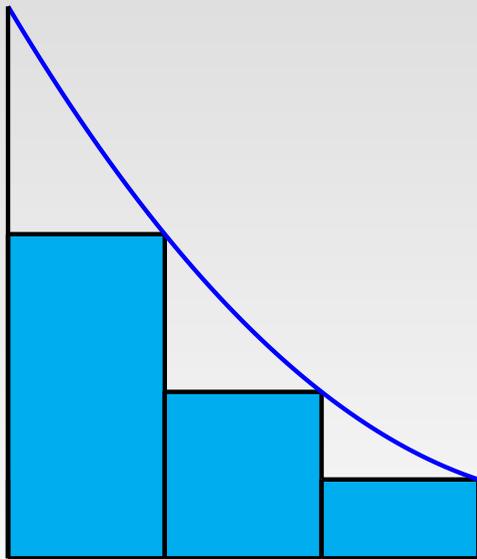
[Metodi di integrazione](#)



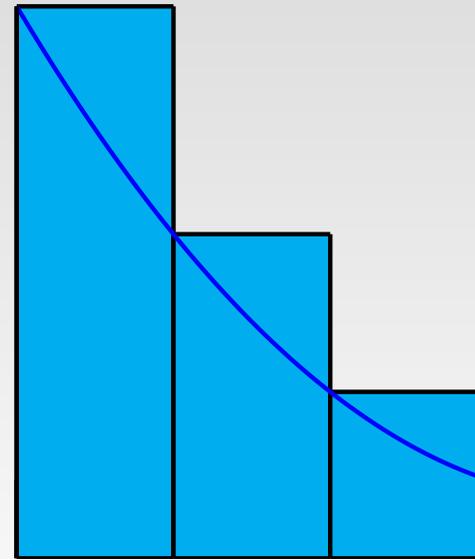
Consideriamo la funzione

$$f(x) = x^2 - 5x + 7, \quad x \in [0, 2]$$

Compariamo $s(f, n)$ e $S(f, n)$ per partizioni in n intervallini di uguale ampiezza



$$s(f, 3) = 4.8148$$



$$S(f, 3) = 8.8148$$

[Introduzione](#)

[Integrale indefinito](#)

[Integrale definito](#)

[Sottografico di una funzione](#)

[Area del sottografico](#)

[Somma inferiore](#)

[Somma superiore](#)

[Interpretazione geometrica](#)

Esempio

[Integrale superiore e inferiore](#)

[Integrale definito di Riemann](#)

[Osservazione](#)

[Esistenza di funzioni integrabili](#)

[Funzioni di segno variabile](#)

[Proprietà dell'integrale](#)

[Il teorema fondamentale](#)

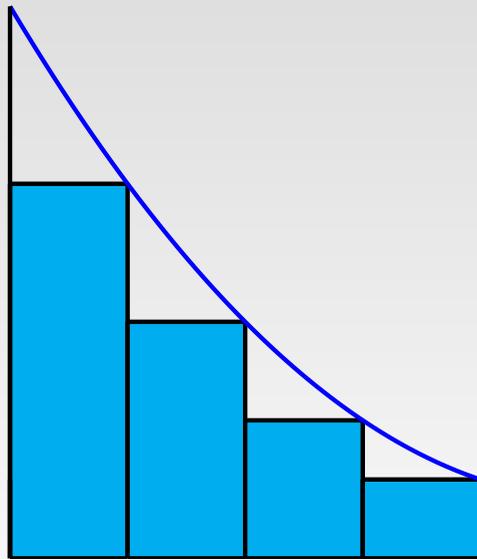
[Metodi di integrazione](#)



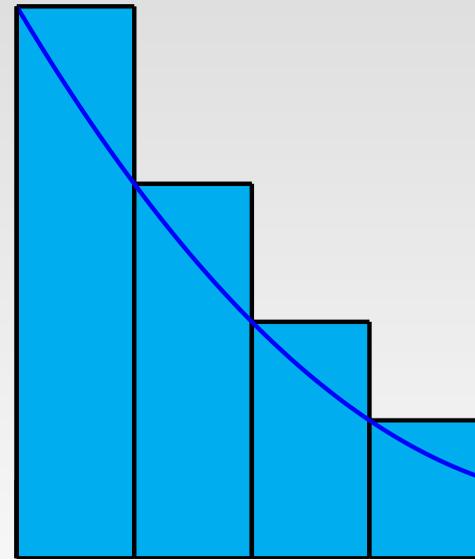
Consideriamo la funzione

$$f(x) = x^2 - 5x + 7, \quad x \in [0, 2]$$

Compariamo $s(f, n)$ e $S(f, n)$ per partizioni in n intervallini di uguale ampiezza



$$s(f, 4) = 5.2500$$



$$S(f, 4) = 8.2500$$

[Introduzione](#)

[Integrale indefinito](#)

[Integrale definito](#)

[Sottografico di una funzione](#)

[Area del sottografico](#)

[Somma inferiore](#)

[Somma superiore](#)

[Interpretazione geometrica](#)

Esempio

[Integrale superiore e inferiore](#)

[Integrale definito di Riemann](#)

[Osservazione](#)

[Esistenza di funzioni integrabili](#)

[Funzioni di segno variabile](#)

[Proprietà dell'integrale](#)

[Il teorema fondamentale](#)

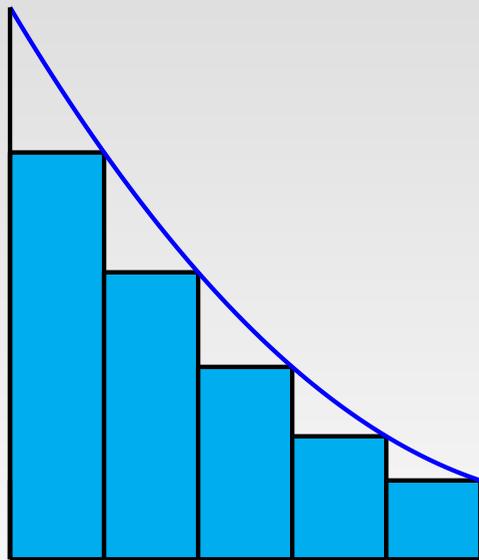
[Metodi di integrazione](#)



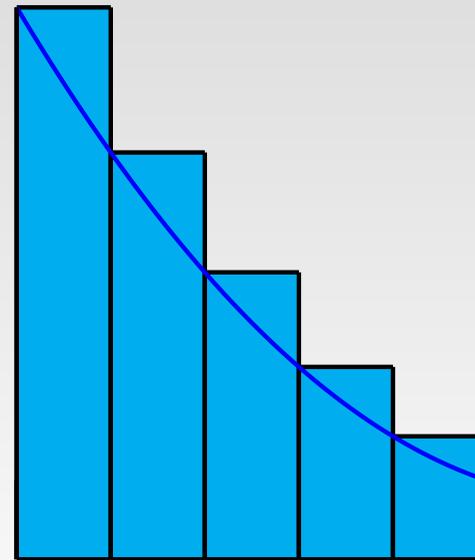
Consideriamo la funzione

$$f(x) = x^2 - 5x + 7, \quad x \in [0, 2]$$

Compariamo $s(f, n)$ e $S(f, n)$ per partizioni in n intervallini di uguale ampiezza



$$s(f, 5) = 5.5200$$



$$S(f, 5) = 7.9200$$

[Introduzione](#)

[Integrale indefinito](#)

[Integrale definito](#)

[Sottografico di una funzione](#)

[Area del sottografico](#)

[Somma inferiore](#)

[Somma superiore](#)

[Interpretazione geometrica](#)

Esempio

[Integrale superiore e inferiore](#)

[Integrale definito di Riemann](#)

[Osservazione](#)

[Esistenza di funzioni integrabili](#)

[Funzioni di segno variabile](#)

[Proprietà dell'integrale](#)

[Il teorema fondamentale](#)

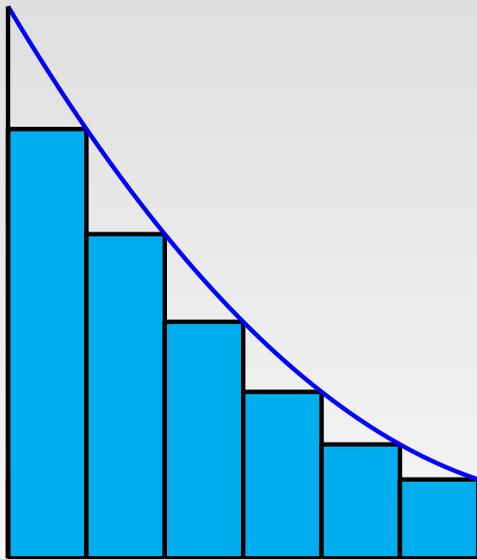
[Metodi di integrazione](#)



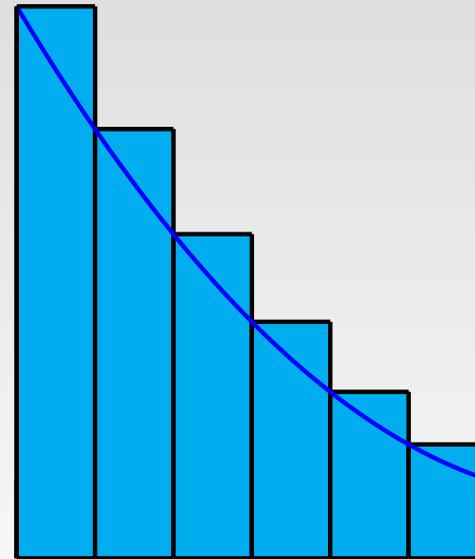
Consideriamo la funzione

$$f(x) = x^2 - 5x + 7, \quad x \in [0, 2]$$

Compariamo $s(f, n)$ e $S(f, n)$ per partizioni in n intervallini di uguale ampiezza



$$s(f, 6) = 5.7037$$



$$S(f, 6) = 7.7037$$

[Introduzione](#)

[Integrale indefinito](#)

[Integrale definito](#)

[Sottografico di una funzione](#)

[Area del sottografico](#)

[Somma inferiore](#)

[Somma superiore](#)

[Interpretazione geometrica](#)

[Esempio](#)

[Integrale superiore e inferiore](#)

[Integrale definito di Riemann](#)

[Osservazione](#)

[Esistenza di funzioni integrabili](#)

[Funzioni di segno variabile](#)

[Proprietà dell'integrale](#)

[Il teorema fondamentale](#)

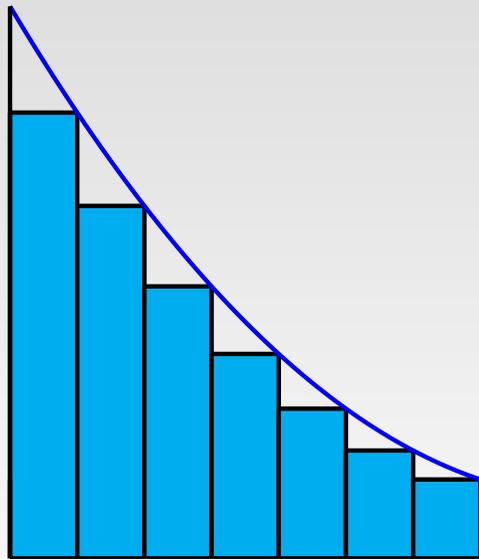
[Metodi di integrazione](#)



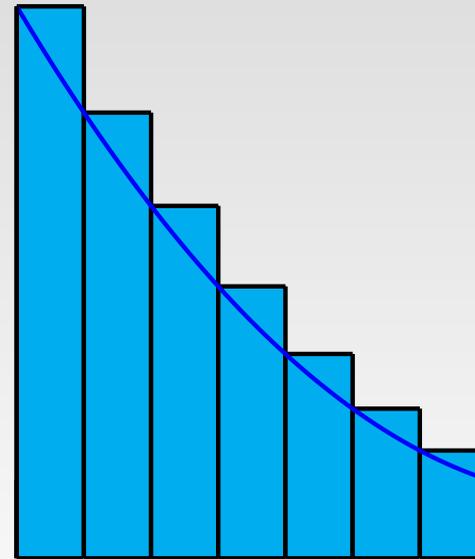
Consideriamo la funzione

$$f(x) = x^2 - 5x + 7, \quad x \in [0, 2]$$

Compariamo $s(f, n)$ e $S(f, n)$ per partizioni in n intervallini di uguale ampiezza



$$s(f, 7) = 5.8367$$



$$S(f, 7) = 7.5510$$

Introduzione

Integrale indefinito

Integrale definito

Sottografico di una funzione

Area del sottografico

Somma inferiore

Somma superiore

Interpretazione geometrica

Esempio

Integrale superiore e inferiore

Integrale definito di Riemann

Osservazione

Esistenza di funzioni integrabili

Funzioni di segno variabile

Proprietà dell'integrale

Il teorema fondamentale

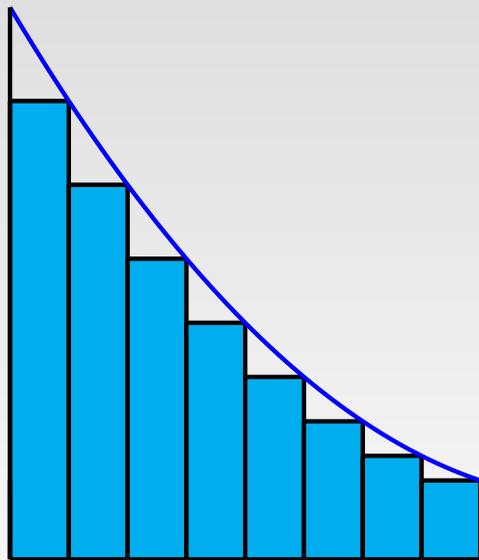
Metodi di integrazione



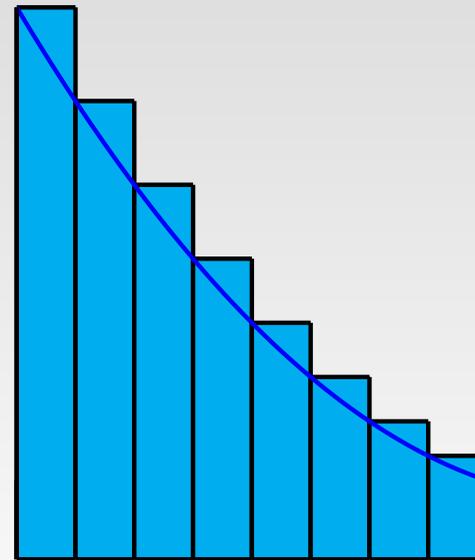
Consideriamo la funzione

$$f(x) = x^2 - 5x + 7, \quad x \in [0, 2]$$

Compariamo $s(f, n)$ e $S(f, n)$ per partizioni in n intervallini di uguale ampiezza



$$s(f, 8) = 5.9375$$



$$S(f, 8) = 7.4375$$

Introduzione

Integrale indefinito

Integrale definito

Sottografico di una funzione

Area del sottografico

Somma inferiore

Somma superiore

Interpretazione geometrica

Esempio

Integrale superiore e inferiore

Integrale definito di Riemann

Osservazione

Esistenza di funzioni integrabili

Funzioni di segno variabile

Proprietà dell'integrale

Il teorema fondamentale

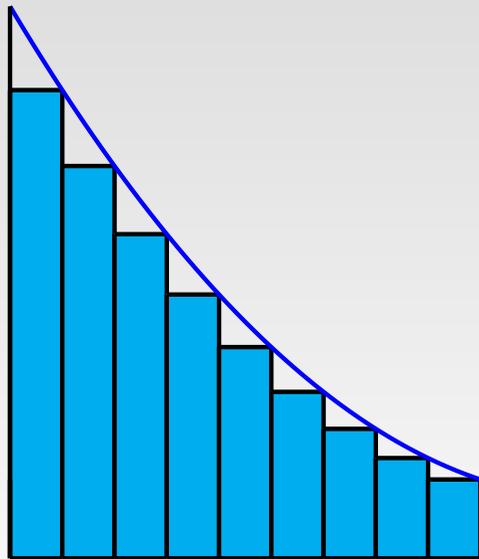
Metodi di integrazione



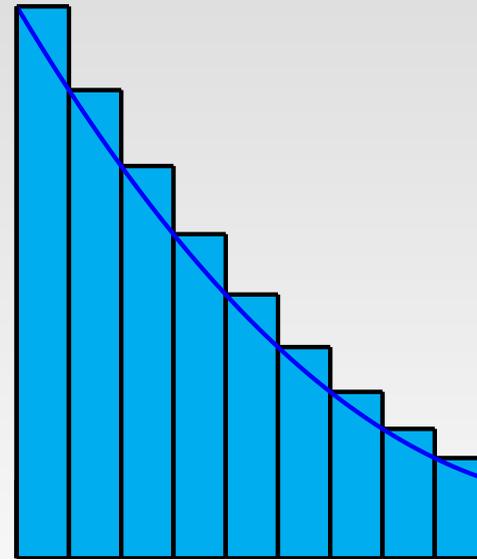
Consideriamo la funzione

$$f(x) = x^2 - 5x + 7, \quad x \in [0, 2]$$

Compariamo $s(f, n)$ e $S(f, n)$ per partizioni in n intervallini di uguale ampiezza



$$s(f, 9) = 6.0165$$



$$S(f, 9) = 7.3498$$

Introduzione

Integrale indefinito

Integrale definito

Sottografico di una funzione

Area del sottografico

Somma inferiore

Somma superiore

Interpretazione geometrica

Esempio

Integrale superiore e inferiore

Integrale definito di Riemann

Osservazione

Esistenza di funzioni integrabili

Funzioni di segno variabile

Proprietà dell'integrale

Il teorema fondamentale

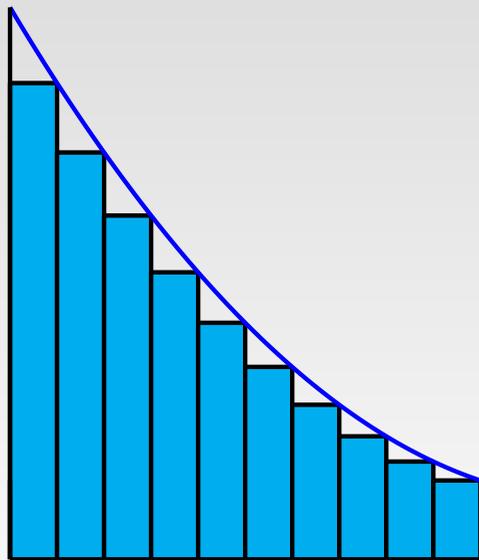
Metodi di integrazione



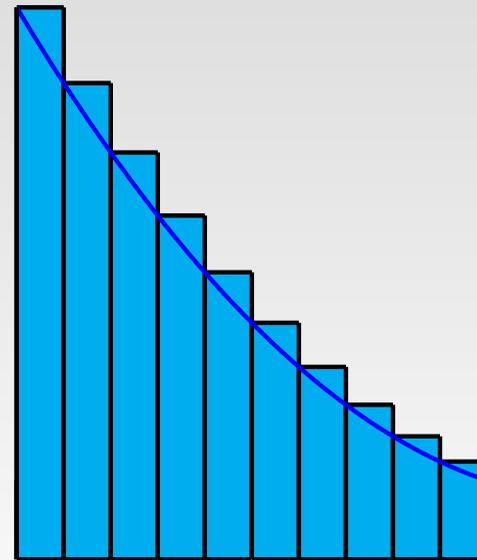
Consideriamo la funzione

$$f(x) = x^2 - 5x + 7, \quad x \in [0, 2]$$

Compariamo $s(f, n)$ e $S(f, n)$ per partizioni in n intervallini di uguale ampiezza



$$s(f, 10) = 6.0800$$



$$S(f, 10) = 7.2800$$

[Introduzione](#)

[Integrale indefinito](#)

[Integrale definito](#)

[Sottografico di una funzione](#)

[Area del sottografico](#)

[Somma inferiore](#)

[Somma superiore](#)

[Interpretazione geometrica](#)

Esempio

[Integrale superiore e inferiore](#)

[Integrale definito di Riemann](#)

[Osservazione](#)

[Esistenza di funzioni integrabili](#)

[Funzioni di segno variabile](#)

[Proprietà dell'integrale](#)

[Il teorema fondamentale](#)

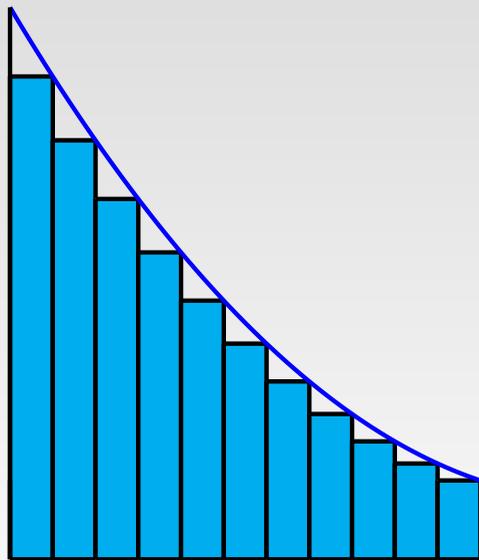
[Metodi di integrazione](#)



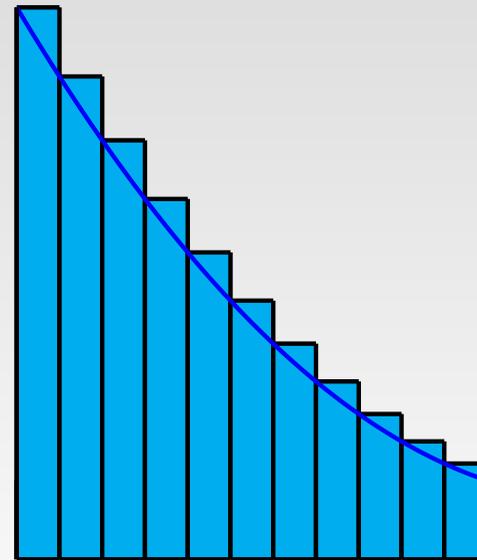
Consideriamo la funzione

$$f(x) = x^2 - 5x + 7, \quad x \in [0, 2]$$

Compariamo $s(f, n)$ e $S(f, n)$ per partizioni in n intervallini di uguale ampiezza



$$s(f, 11) = 6.1322$$



$$S(f, 11) = 7.2231$$

Introduzione

Integrale indefinito

Integrale definito

Sottografico di una funzione

Area del sottografico

Somma inferiore

Somma superiore

Interpretazione geometrica

Esempio

Integrale superiore e inferiore

Integrale definito di Riemann

Osservazione

Esistenza di funzioni integrabili

Funzioni di segno variabile

Proprietà dell'integrale

Il teorema fondamentale

Metodi di integrazione



In tabella sono riportati i valori delle somme inferiori e superiori per varie partizioni in n intervallini di uguale ampiezza

n	$s(f, n)$	$S(f, n)$
5	5.54	7.92
10	6.08	7.28
100	6.6068	6.7268
1000	6.6606	6.6726
10000	6.6660	6.6672
100000	6.6666	6.6667

Introduzione

Integrale indefinito

Integrale definito

Sottografico di una funzione

Area del sottografico

Somma inferiore

Somma superiore

Interpretazione geometrica

Esempio

Integrale superiore e inferiore

Integrale definito di Riemann

Osservazione

Esistenza di funzioni integrabili

Funzioni di segno variabile

Proprietà dell'integrale

Il teorema fondamentale

Metodi di integrazione



In tabella sono riportati i valori delle somme inferiori e superiori per varie partizioni in n intervallini di uguale ampiezza

n	$s(f, n)$	$S(f, n)$
5	5.54	7.92
10	6.08	7.28
100	6.6068	6.7268
1000	6.6606	6.6726
10000	6.6660	6.6672
100000	6.6666	6.6667

Dalla tabella si vede che la differenza tra le aree $S(f, n)$ e $s(f, n)$ diventa sempre più piccola

Introduzione

Integrale indefinito

Integrale definito

Sottografico di una funzione

Area del sottografico

Somma inferiore

Somma superiore

Interpretazione geometrica

Esempio

Integrale superiore e inferiore

Integrale definito di Riemann

Osservazione

Esistenza di funzioni integrabili

Funzioni di segno variabile

Proprietà dell'integrale

Il teorema fondamentale

Metodi di integrazione



In tabella sono riportati i valori delle somme inferiori e superiori per varie partizioni in n intervallini di uguale ampiezza

n	$s(f, n)$	$S(f, n)$
5	5.54	7.92
10	6.08	7.28
100	6.6068	6.7268
1000	6.6606	6.6726
10000	6.6660	6.6672
100000	6.6666	6.6667

Dalla tabella si vede che la differenza tra le aree $S(f, n)$ e $s(f, n)$ diventa sempre più piccola

In effetti, calcolando l'integrale si troverà che

$$\int_0^2 x^2 - 5x + 7 dx = \frac{20}{3} = 6.6666\dots$$

Introduzione

Integrale indefinito

Integrale definito

Sottografico di una funzione

Area del sottografico

Somma inferiore

Somma superiore

Interpretazione geometrica

Esempio

Integrale superiore e inferiore

Integrale definito di Riemann

Osservazione

Esistenza di funzioni integrabili

Funzioni di segno variabile

Proprietà dell'integrale

Il teorema fondamentale

Metodi di integrazione



Integrale superiore e inferiore

Rappresentiamo tutte le possibili somme superiori ed inferiori sull'asse reale.



Introduzione

Integrale indefinito

Integrale definito

Sottografico di una funzione

Area del sottografico

Somma inferiore

Somma superiore

Interpretazione geometrica

Esempio

Integrale superiore e inferiore

Integrale definito di Riemann

Osservazione

Esistenza di funzioni integrabili

Funzioni di segno variabile

Proprietà dell'integrale

Il teorema fondamentale

Metodi di integrazione



Integrale superiore e inferiore

Rappresentiamo tutte le possibili somme superiori ed inferiori sull'asse reale.



[Introduzione](#)

[Integrale indefinito](#)

[Integrale definito](#)

[Sottografico di una funzione](#)

[Area del sottografico](#)

[Somma inferiore](#)

[Somma superiore](#)

[Interpretazione geometrica](#)

[Esempio](#)

[Integrale superiore e inferiore](#)

[Integrale definito di Riemann](#)

[Osservazione](#)

[Esistenza di funzioni integrabili](#)

[Funzioni di segno variabile](#)

[Proprietà dell'integrale](#)

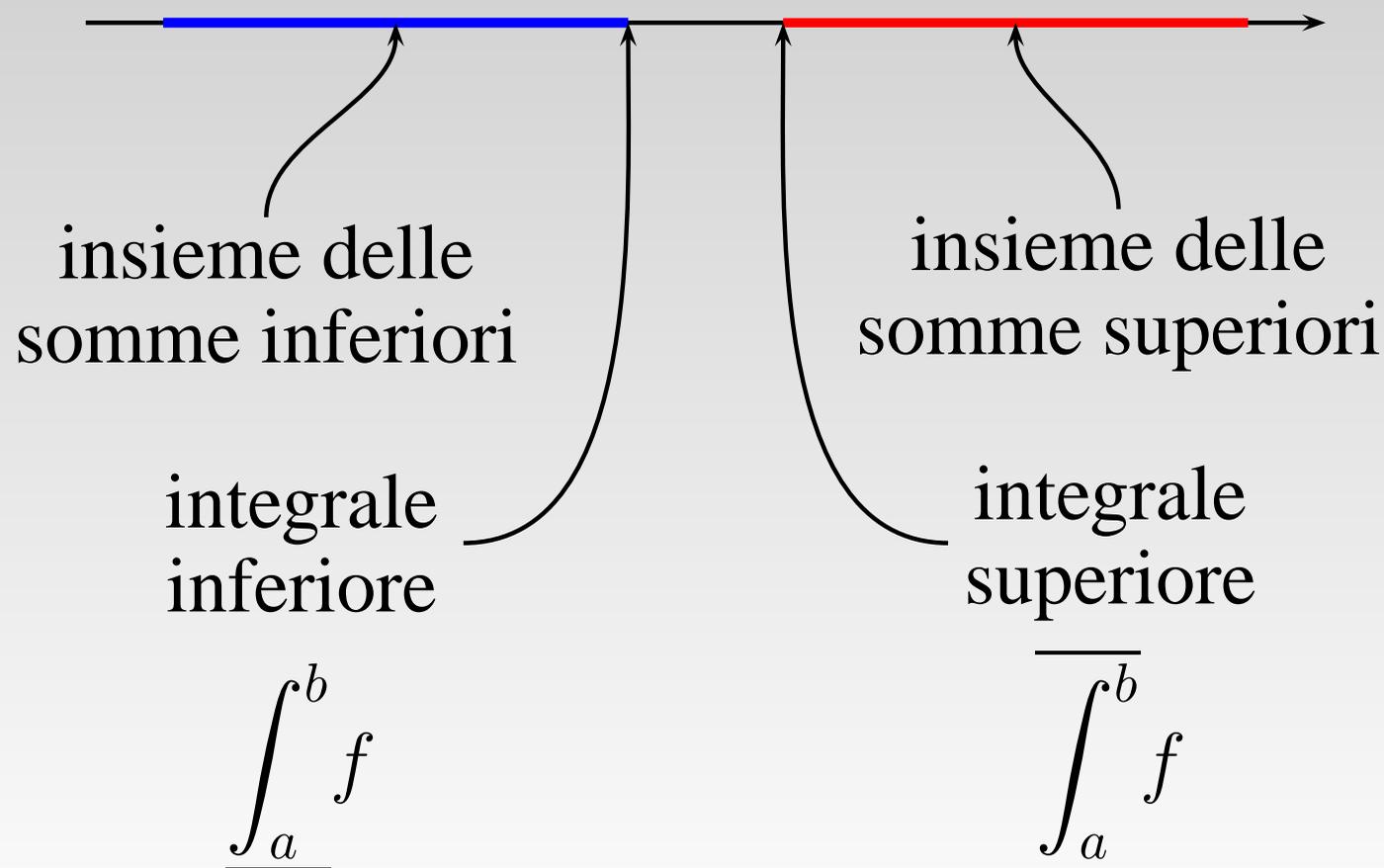
[Il teorema fondamentale](#)

[Metodi di integrazione](#)



Integrale superiore e inferiore

Rappresentiamo tutte le possibili somme superiori ed inferiori sull'asse reale.



Introduzione

Integrale indefinito

Integrale definito

Sottografico di una funzione

Area del sottografico

Somma inferiore

Somma superiore

Interpretazione geometrica

Esempio

Integrale superiore e inferiore

Integrale definito di Riemann

Osservazione

Esistenza di funzioni integrabili

Funzioni di segno variabile

Proprietà dell'integrale

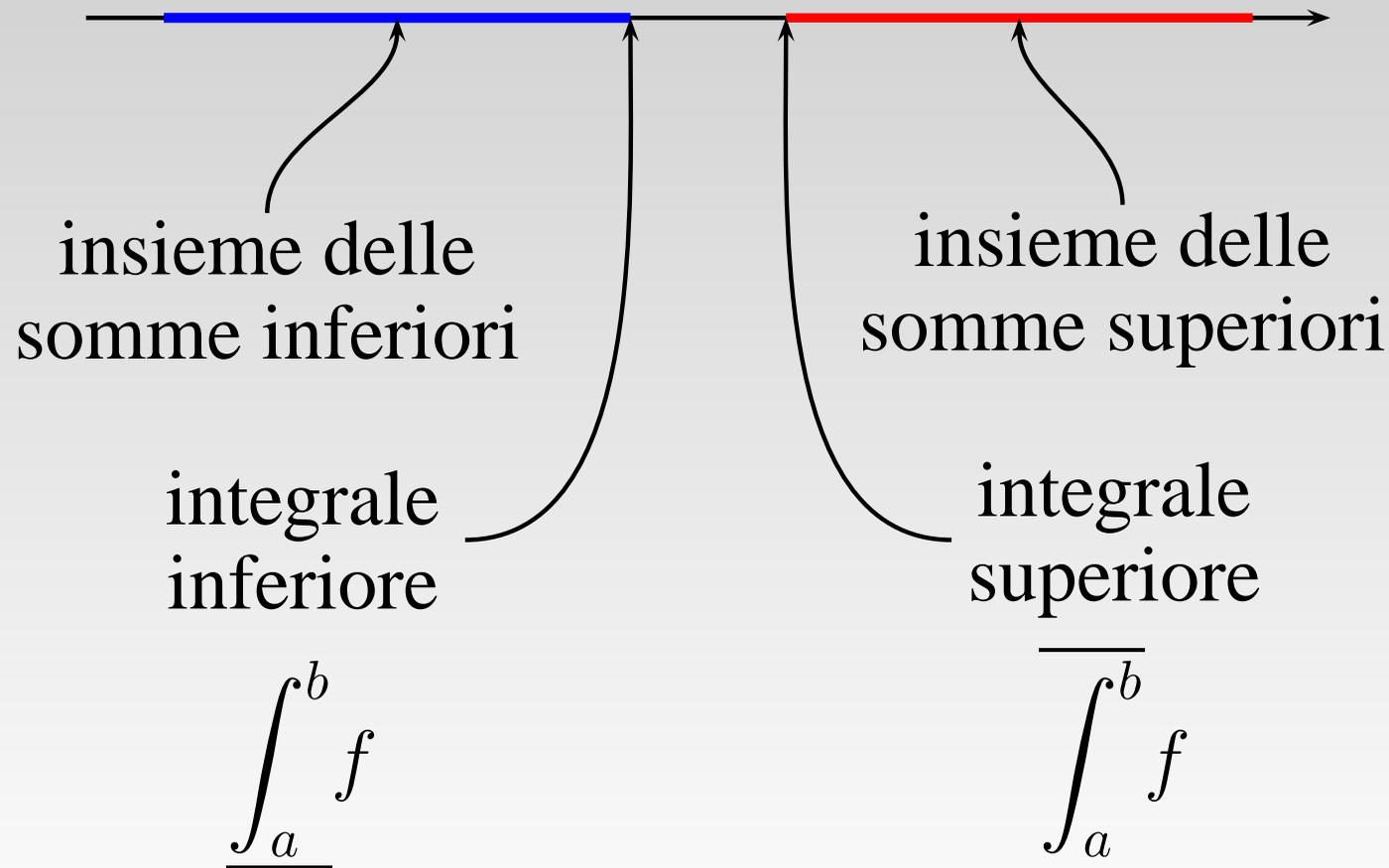
Il teorema fondamentale

Metodi di integrazione



Integrale superiore e inferiore

Rappresentiamo tutte le possibili somme superiori ed inferiori sull'asse reale.



In generale questi due numeri sono diversi

Introduzione

Integrale indefinito

Integrale definito

Sottografico di una funzione

Area del sottografico

Somma inferiore

Somma superiore

Interpretazione geometrica

Esempio

Integrale superiore e inferiore

Integrale definito di Riemann

Osservazione

Esistenza di funzioni integrabili

Funzioni di segno variabile

Proprietà dell'integrale

Il teorema fondamentale

Metodi di integrazione



Integrale definito di Riemann

Se risulta $\underline{\int_a^b f} = \overline{\int_a^b f}$ allora si dice che f è **integrabile secondo Riemann** in $[a, b]$

Il valore comune

$$\int_a^b f(x) dx := \underline{\int_a^b f} = \overline{\int_a^b f}$$

si chiama **integrale (definito)** di f in $[a, b]$

Introduzione

Integrale indefinito

Integrale definito

Sottografico di una funzione

Area del sottografico

Somma inferiore

Somma superiore

Interpretazione geometrica

Esempio

Integrale superiore e inferiore

Integrale definito di Riemann

Osservazione

Esistenza di funzioni integrabili

Funzioni di segno variabile

Proprietà dell'integrale

Il teorema fondamentale

Metodi di integrazione



Integrale definito di Riemann

Se risulta $\underline{\int_a^b} f = \overline{\int_a^b} f$ allora si dice che f è **integrabile secondo Riemann** in $[a, b]$

Il valore comune

$$\int_a^b f(x) dx := \underline{\int_a^b} f = \overline{\int_a^b} f$$

si chiama **integrale (definito)** di f in $[a, b]$

Geometricamente, l'integrale di Riemann rappresenta l'area del sottografico di f in $[a, b]$

Introduzione

Integrale indefinito

Integrale definito

Sottografico di una funzione

Area del sottografico

Somma inferiore

Somma superiore

Interpretazione geometrica

Esempio

Integrale superiore e inferiore

Integrale definito di Riemann

Osservazione

Esistenza di funzioni integrabili

Funzioni di segno variabile

Proprietà dell'integrale

Il teorema fondamentale

Metodi di integrazione



La x che compare nel simbolo d'integrale è una variabile “muta”. Ad esempio

$$\int_a^b f(t) dt, \quad \int_a^b f(u) du,$$

rappresentano ancora l'integrale di f su $[a, b]$

[Introduzione](#)

[Integrale indefinito](#)

[Integrale definito](#)

[Sottografico di una funzione](#)

[Area del sottografico](#)

[Somma inferiore](#)

[Somma superiore](#)

[Interpretazione geometrica](#)

[Esempio](#)

[Integrale superiore e inferiore](#)

[Integrale definito di Riemann](#)

[Osservazione](#)

[Esistenza di funzioni integrabili](#)

[Funzioni di segno variabile](#)

[Proprietà dell'integrale](#)

[Il teorema fondamentale](#)

[Metodi di integrazione](#)

Esistenza di funzioni integrabili

Esempio. La funzione **di Dirichlet**

$$D(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x \in [0, 1] \cap \mathbb{Q} \\ 0 & \text{se } x \in [0, 1] \setminus \mathbb{Q} \end{cases}$$

non è integrabile in $[0, 1]$. Infatti

$$\underline{\int_0^1 D} = 0 \qquad \overline{\int_0^1 D} = 1$$

Introduzione

Integrale indefinito

Integrale definito

Sottografico di una funzione

Area del sottografico

Somma inferiore

Somma superiore

Interpretazione geometrica

Esempio

Integrale superiore e inferiore

Integrale definito di Riemann

Osservazione

Esistenza di funzioni integrabili

Funzioni di segno variabile

Proprietà dell'integrale

Il teorema fondamentale

Metodi di integrazione



Esistenza di funzioni integrabili

Esempio. La funzione **di Dirichlet**

$$D(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x \in [0, 1] \cap \mathbb{Q} \\ 0 & \text{se } x \in [0, 1] \setminus \mathbb{Q} \end{cases}$$

non è integrabile in $[0, 1]$. Infatti

$$\underline{\int_0^1} D = 0 \qquad \overline{\int_0^1} D = 1$$

Ma

Teorema. Se $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ è continua allora f è integrabile

[Introduzione](#)

[Integrale indefinito](#)

[Integrale definito](#)

[Sottografico di una funzione](#)

[Area del sottografico](#)

[Somma inferiore](#)

[Somma superiore](#)

[Interpretazione geometrica](#)

[Esempio](#)

[Integrale superiore e inferiore](#)

[Integrale definito di Riemann](#)

[Osservazione](#)

[Esistenza di funzioni integrabili](#)

[Funzioni di segno variabile](#)

[Proprietà dell'integrale](#)

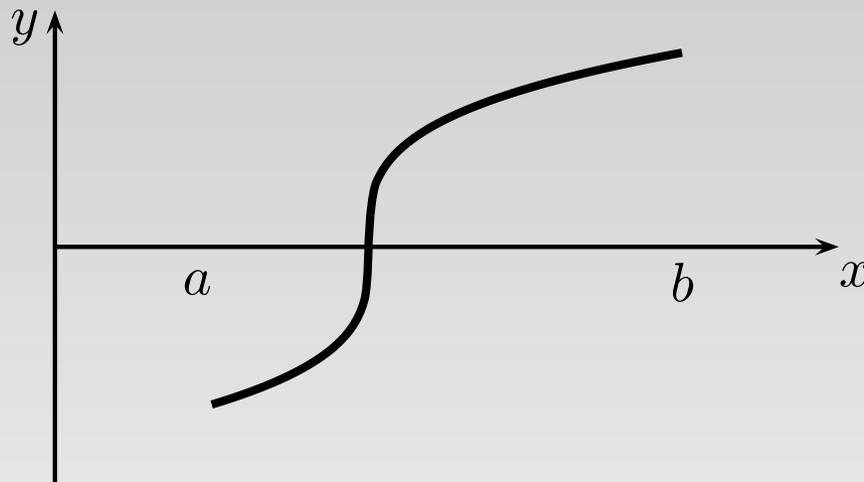
[Il teorema fondamentale](#)

[Metodi di integrazione](#)



Funzioni di segno variabile

Se f cambia segno



[Introduzione](#)

[Integrale indefinito](#)

[Integrale definito](#)

[Sottografico di una funzione](#)

[Area del sottografico](#)

[Somma inferiore](#)

[Somma superiore](#)

[Interpretazione geometrica](#)

[Esempio](#)

[Integrale superiore e inferiore](#)

[Integrale definito di Riemann](#)

[Osservazione](#)

[Esistenza di funzioni integrabili](#)

[Funzioni di segno variabile](#)

[Proprietà dell'integrale](#)

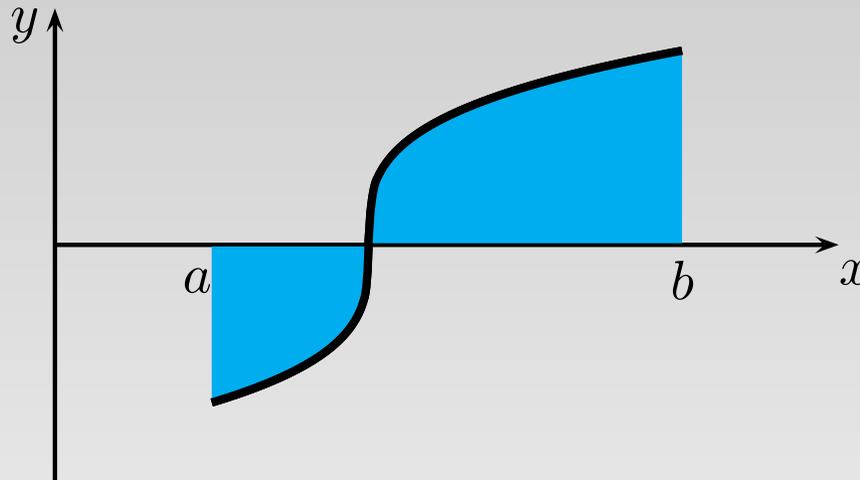
[Il teorema fondamentale](#)

[Metodi di integrazione](#)



Funzioni di segno variabile

Se f cambia segno



l'integrale rappresenta l'area “con segno”

$$\int_a^b f(x) dx$$

[Introduzione](#)

[Integrale indefinito](#)

[Integrale definito](#)

[Sottografico di una funzione](#)

[Area del sottografico](#)

[Somma inferiore](#)

[Somma superiore](#)

[Interpretazione geometrica](#)

[Esempio](#)

[Integrale superiore e inferiore](#)

[Integrale definito di Riemann](#)

[Osservazione](#)

[Esistenza di funzioni integrabili](#)

[Funzioni di segno variabile](#)

[Proprietà dell'integrale](#)

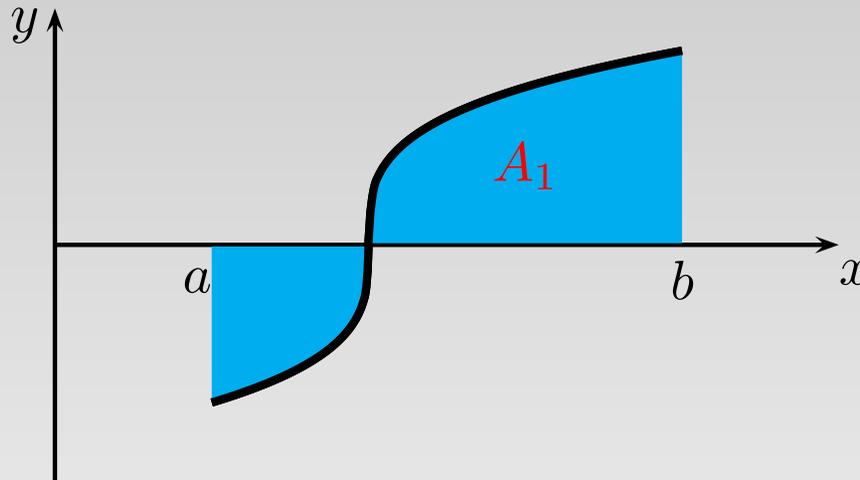
[Il teorema fondamentale](#)

[Metodi di integrazione](#)



Funzioni di segno variabile

Se f cambia segno



l'integrale rappresenta l'area “con segno”

$$\int_a^b f(x) dx = A_1$$

[Introduzione](#)

[Integrale indefinito](#)

[Integrale definito](#)

[Sottografico di una funzione](#)

[Area del sottografico](#)

[Somma inferiore](#)

[Somma superiore](#)

[Interpretazione geometrica](#)

[Esempio](#)

[Integrale superiore e inferiore](#)

[Integrale definito di Riemann](#)

[Osservazione](#)

[Esistenza di funzioni integrabili](#)

[Funzioni di segno variabile](#)

[Proprietà dell'integrale](#)

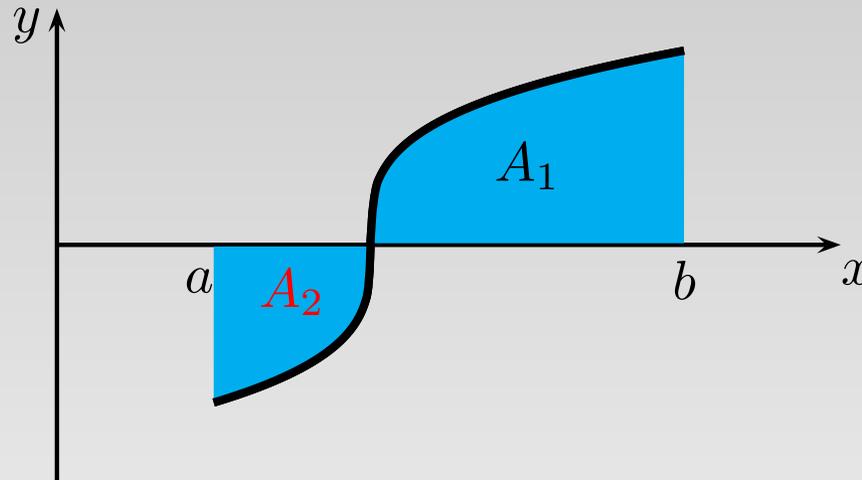
[Il teorema fondamentale](#)

[Metodi di integrazione](#)



Funzioni di segno variabile

Se f cambia segno



l'integrale rappresenta l'area “con segno”

$$\int_a^b f(x) dx = A_1 - A_2$$

[Introduzione](#)

[Integrale indefinito](#)

[Integrale definito](#)

[Sottografico di una funzione](#)

[Area del sottografico](#)

[Somma inferiore](#)

[Somma superiore](#)

[Interpretazione geometrica](#)

[Esempio](#)

[Integrale superiore e inferiore](#)

[Integrale definito di Riemann](#)

[Osservazione](#)

[Esistenza di funzioni integrabili](#)

[Funzioni di segno variabile](#)

[Proprietà dell'integrale](#)

[Il teorema fondamentale](#)

[Metodi di integrazione](#)



Proprietà dell'integrale

Introduzione

Integrale indefinito

Integrale definito

Proprietà dell'integrale

Proprietà fondamentali

Altre proprietà

Il teorema fondamentale

Metodi di integrazione

Proprietà fondamentali

Convenzione: se f è integrabile in $[a, b]$, si pone

$$\int_b^a f(x) dx := - \int_a^b f(x) dx$$

e

$$\int_a^a f(x) dx := 0$$

Introduzione

Integrale indefinito

Integrale definito

Proprietà dell'integrale

Proprietà fondamentali

Altre proprietà

Il teorema fondamentale

Metodi di integrazione



Proprietà fondamentali

Convenzione: se f è integrabile in $[a, b]$, si pone

$$\int_b^a f(x) dx := - \int_a^b f(x) dx$$

e

$$\int_a^a f(x) dx := 0$$

Linearità: se $f, g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ sono integrabili e $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ allora anche $\alpha f + \beta g$ è integrabile e si ha

$$\int_a^b [\alpha f(x) + \beta g(x)] dx = \alpha \int_a^b f(x) dx + \beta \int_a^b g(x) dx$$

Introduzione

Integrale indefinito

Integrale definito

Proprietà dell'integrale

Proprietà fondamentali

Altre proprietà

Il teorema fondamentale

Metodi di integrazione



Additività: se a, b, c sono tre punti di un intervallo in cui f è integrabile allora si ha

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx$$

Introduzione

Integrale indefinito

Integrale definito

Proprietà dell'integrale

Proprietà fondamentali

Altre proprietà

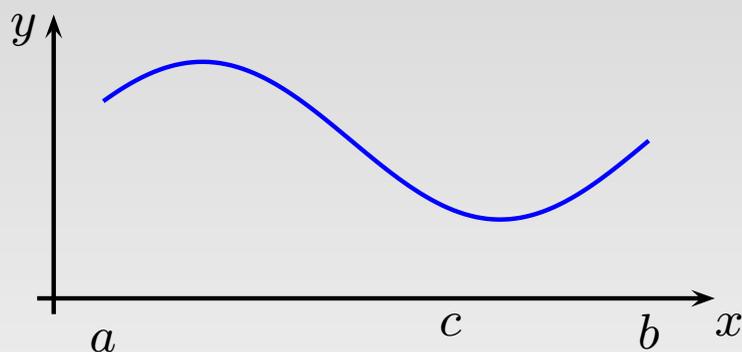
Il teorema fondamentale

Metodi di integrazione



Additività: se a, b, c sono tre punti di un intervallo in cui f è integrabile allora si ha

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx$$



Introduzione

Integrale indefinito

Integrale definito

Proprietà dell'integrale

Proprietà fondamentali

Altre proprietà

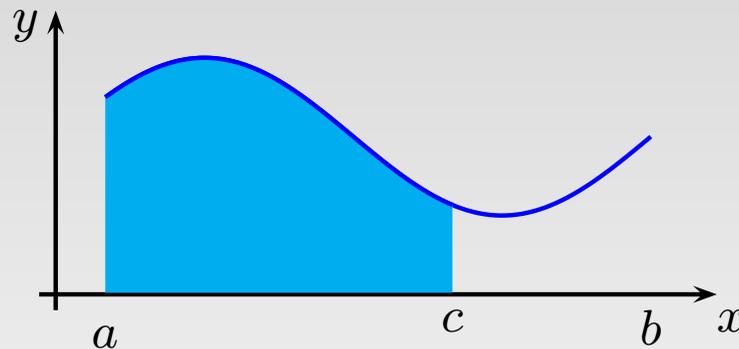
Il teorema fondamentale

Metodi di integrazione



Additività: se a, b, c sono tre punti di un intervallo in cui f è integrabile allora si ha

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx$$



Introduzione

Integrale indefinito

Integrale definito

Proprietà dell'integrale

Proprietà fondamentali

Altre proprietà

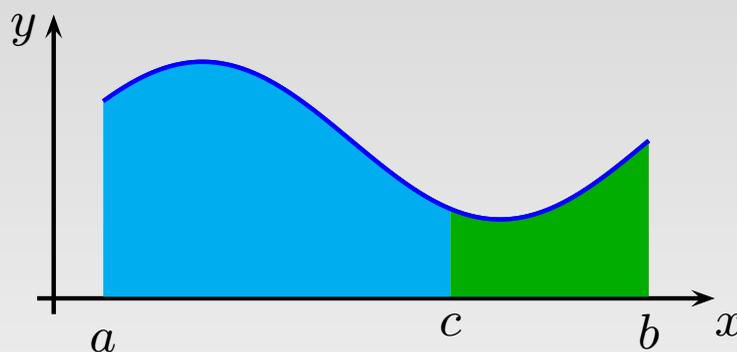
Il teorema fondamentale

Metodi di integrazione



Additività: se a, b, c sono tre punti di un intervallo in cui f è integrabile allora si ha

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx$$



Introduzione

Integrale indefinito

Integrale definito

Proprietà dell'integrale

Proprietà fondamentali

Altre proprietà

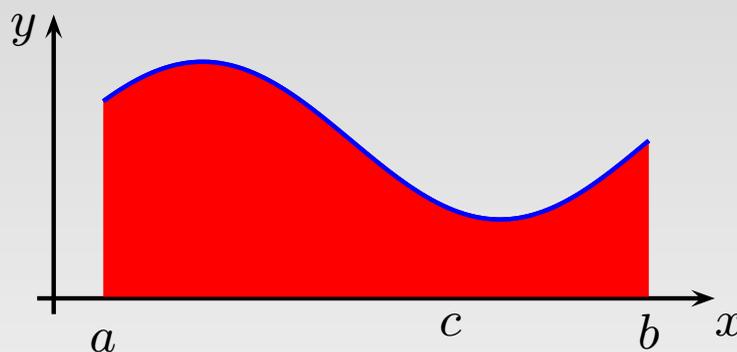
Il teorema fondamentale

Metodi di integrazione



Additività: se a, b, c sono tre punti di un intervallo in cui f è integrabile allora si ha

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx$$



Introduzione

Integrale indefinito

Integrale definito

Proprietà dell'integrale

Proprietà fondamentali

Altre proprietà

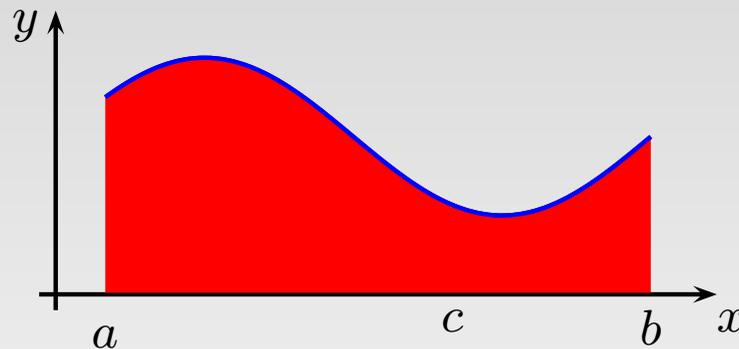
Il teorema fondamentale

Metodi di integrazione



Additività: se a, b, c sono tre punti di un intervallo in cui f è integrabile allora si ha

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx$$



Monotonia: se $f, g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ sono integrabili e se $f(x) \leq g(x)$ per ogni $x \in [a, b]$ allora

$$\int_a^b f(x) dx \leq \int_a^b g(x) dx$$

Introduzione

Integrale indefinito

Integrale definito

Proprietà dell'integrale

Proprietà fondamentali

Altre proprietà

Il teorema fondamentale

Metodi di integrazione



Altre proprietà

Media integrale: sia $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ è continua, esiste $c \in [a, b]$ tale che

$$\frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx = f(c)$$

Introduzione

Integrale indefinito

Integrale definito

Proprietà dell'integrale

Proprietà fondamentali

Altre proprietà

Il teorema fondamentale

Metodi di integrazione



Altre proprietà

Media integrale: sia $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ è continua, esiste $c \in [a, b]$ tale che

$$\frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx = f(c)$$

o anche

$$\int_a^b f(x) dx = f(c)(b-a)$$

Introduzione

Integrale indefinito

Integrale definito

Proprietà dell'integrale

Proprietà fondamentali

Altre proprietà

Il teorema fondamentale

Metodi di integrazione



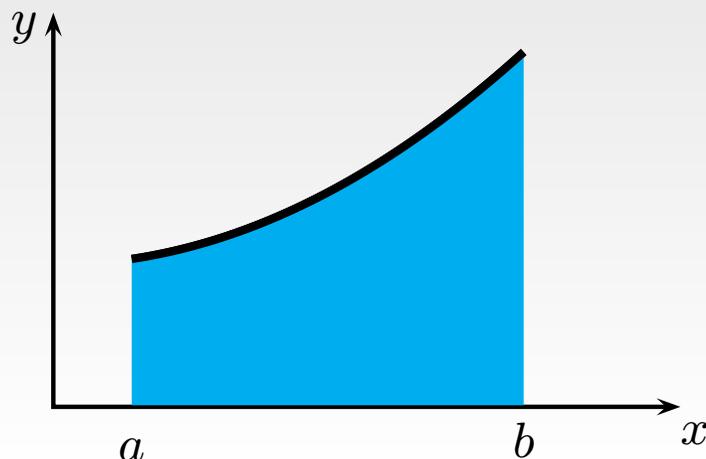
Altre proprietà

Media integrale: sia $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ è continua, esiste $c \in [a, b]$ tale che

$$\frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx = f(c)$$

o anche

$$\int_a^b f(x) dx = f(c)(b-a)$$



Introduzione

Integrale indefinito

Integrale definito

Proprietà dell'integrale

Proprietà fondamentali

Altre proprietà

Il teorema fondamentale

Metodi di integrazione



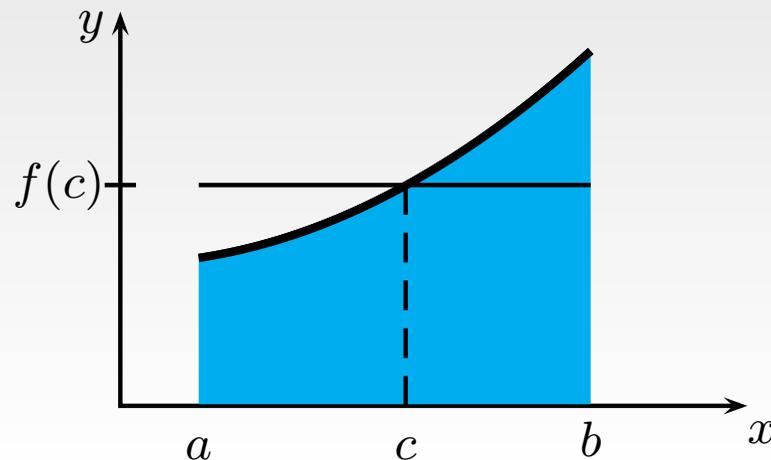
Altre proprietà

Media integrale: sia $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ è continua, esiste $c \in [a, b]$ tale che

$$\frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx = f(c)$$

o anche

$$\int_a^b f(x) dx = f(c)(b-a)$$



Introduzione

Integrale indefinito

Integrale definito

Proprietà dell'integrale

Proprietà fondamentali

Altre proprietà

Il teorema fondamentale

Metodi di integrazione



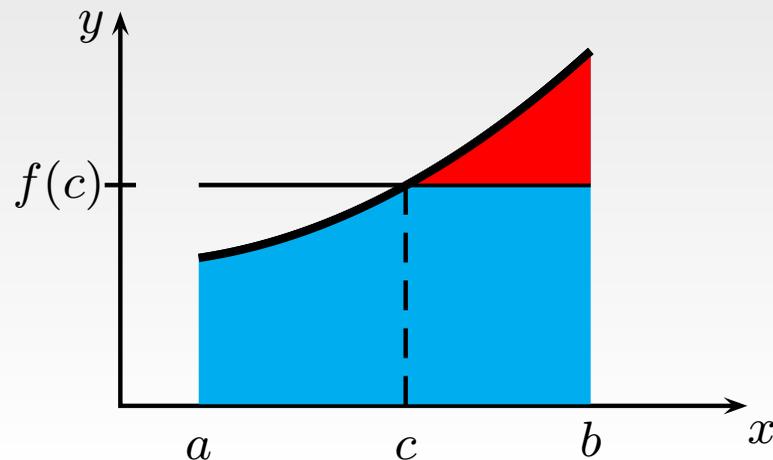
Altre proprietà

Media integrale: sia $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ è continua, esiste $c \in [a, b]$ tale che

$$\frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx = f(c)$$

o anche

$$\int_a^b f(x) dx = f(c)(b-a)$$



Introduzione

Integrale indefinito

Integrale definito

Proprietà dell'integrale

Proprietà fondamentali

Altre proprietà

Il teorema fondamentale

Metodi di integrazione



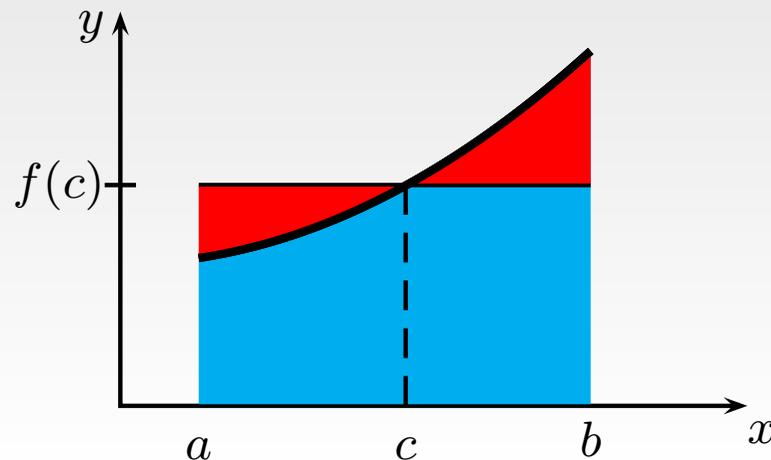
Altre proprietà

Media integrale: sia $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ è continua, esiste $c \in [a, b]$ tale che

$$\frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx = f(c)$$

o anche

$$\int_a^b f(x) dx = f(c)(b-a)$$



Introduzione

Integrale indefinito

Integrale definito

Proprietà dell'integrale

Proprietà fondamentali

Altre proprietà

Il teorema fondamentale

Metodi di integrazione



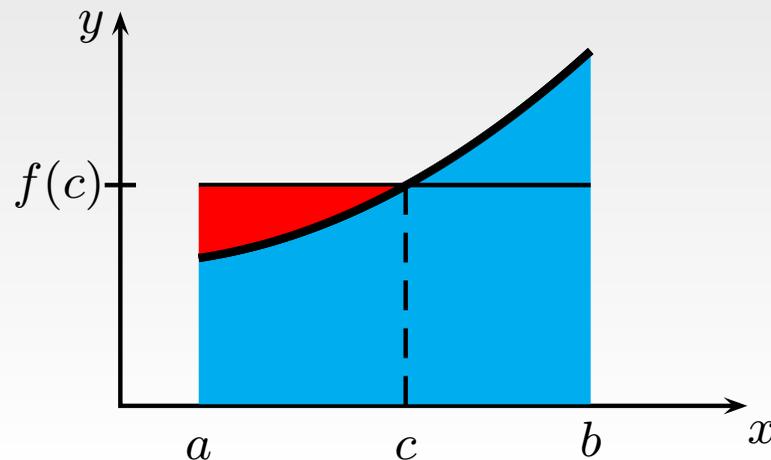
Altre proprietà

Media integrale: sia $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ è continua, esiste $c \in [a, b]$ tale che

$$\frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx = f(c)$$

o anche

$$\int_a^b f(x) dx = f(c)(b-a)$$



Introduzione

Integrale indefinito

Integrale definito

Proprietà dell'integrale

Proprietà fondamentali

Altre proprietà

Il teorema fondamentale

Metodi di integrazione



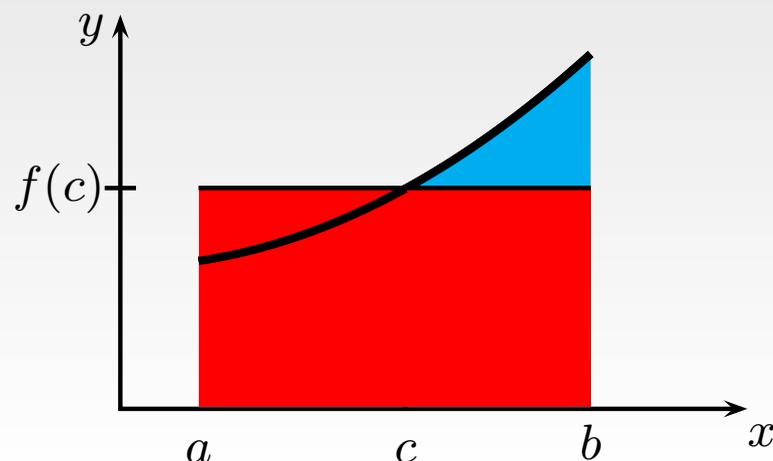
Altre proprietà

Media integrale: sia $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ è continua, esiste $c \in [a, b]$ tale che

$$\frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx = f(c)$$

o anche

$$\int_a^b f(x) dx = f(c)(b-a)$$



Introduzione

Integrale indefinito

Integrale definito

Proprietà dell'integrale

Proprietà fondamentali

Altre proprietà

Il teorema fondamentale

Metodi di integrazione



Il teorema fondamentale del calcolo integrale

Introduzione

Integrale indefinito

Integrale definito

Proprietà dell'integrale

Il teorema fondamentale

Il teorema fondamentale

Conseguenza

La formula fondamentale

Metodi di integrazione

Il teorema fondamentale

Data una funzione continua, fornisce una sua primitiva in forma integrale

Teorema. Sia $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione continua su I e sia $x_0 \in I$. La cosiddetta **funzione integrale**

$$\int_{x_0}^x f(t) dt$$

è una primitiva di f , ovvero è derivabile per ogni $x \in I$ e si ha

$$\frac{d}{dx} \int_{x_0}^x f(t) dt = f(x)$$

[Introduzione](#)

[Integrale indefinito](#)

[Integrale definito](#)

[Proprietà dell'integrale](#)

[Il teorema fondamentale](#)

[Il teorema fondamentale](#)

[Conseguenza](#)

[La formula fondamentale](#)

[Metodi di integrazione](#)

Dal Teorema fondamentale si ottiene che se f è continua sull'intervallo I allora tutte le sue primitive sono del tipo

$$F(x) = \int_{x_0}^x f(t) dt + c,$$

al variare di $c \in \mathbb{R}$

Precisamente F è quella primitiva di f che nel punto x_0 assume il valore c

[Introduzione](#)

[Integrale indefinito](#)

[Integrale definito](#)

[Proprietà dell'integrale](#)

[Il teorema fondamentale](#)

[Il teorema fondamentale](#)

[Conseguenza](#)

[La formula fondamentale](#)

[Metodi di integrazione](#)

La formula fondamentale

Stabilisce una relazione gli integrali definiti e indefiniti

[Introduzione](#)

[Integrale indefinito](#)

[Integrale definito](#)

[Proprietà dell'integrale](#)

[Il teorema fondamentale](#)

[Il teorema fondamentale](#)

[Conseguenza](#)

[La formula fondamentale](#)

[Metodi di integrazione](#)



La formula fondamentale

Stabilisce una relazione gli integrali definiti e indefiniti

Se f è una funzione continua su $[a, b]$ si ha la **formula fondamentale del calcolo integrale**

$$\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a) =: \left[F(x) \right]_a^b$$

dove F è una qualsiasi primitiva di f su $[a, b]$

[Introduzione](#)

[Integrale indefinito](#)

[Integrale definito](#)

[Proprietà dell'integrale](#)

[Il teorema fondamentale](#)

[Il teorema fondamentale](#)

[Conseguenza](#)

[La formula fondamentale](#)

[Metodi di integrazione](#)



La formula fondamentale

Stabilisce una relazione gli integrali definiti e indefiniti

Se f è una funzione continua su $[a, b]$ si ha la **formula fondamentale del calcolo integrale**

$$\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a) =: \left[F(x) \right]_a^b$$

dove F è una qualsiasi primitiva di f su $[a, b]$

Conclusione: per calcolare un integrale definito di f , è sufficiente conoscerne una primitiva F

Introduzione

Integrale indefinito

Integrale definito

Proprietà dell'integrale

Il teorema fondamentale

Il teorema fondamentale

Conseguenza

La formula fondamentale

Metodi di integrazione



Metodi di integrazione

Introduzione

Integrale indefinito

Integrale definito

Proprietà dell'integrale

Il teorema fondamentale

Metodi di integrazione

Integrazione per parti

Integrazione per sostituzione

Integrazione per parti

Se f e g sono due funzioni derivabili allora

$$(fg)'(x) = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$$

[Introduzione](#)

[Integrale indefinito](#)

[Integrale definito](#)

[Proprietà dell'integrale](#)

[Il teorema fondamentale](#)

[Metodi di integrazione](#)

[Integrazione per parti](#)

[Integrazione per sostituzione](#)



Integrazione per parti

Se f e g sono due funzioni derivabili allora

$$(fg)'(x) = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$$

Se f' e g' sono funzioni continue, integrando si ha

$$f(x)g(x) = \int f'(x)g(x) dx + \int f(x)g'(x) dx$$

[Introduzione](#)

[Integrale indefinito](#)

[Integrale definito](#)

[Proprietà dell'integrale](#)

[Il teorema fondamentale](#)

[Metodi di integrazione](#)

[Integrazione per parti](#)

[Integrazione per sostituzione](#)



Integrazione per parti

Se f e g sono due funzioni derivabili allora

$$(fg)'(x) = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$$

Se f' e g' sono funzioni continue, integrando si ha

$$f(x)g(x) = \int f'(x)g(x) dx + \int f(x)g'(x) dx$$

Riordinando i termini si ottiene la **formula di integrazione per parti**

$$\int f(x)g'(x) dx = f(x)g(x) - \int f'(x)g(x) dx$$

che sposta la ricerca di una primitiva del prodotto fg' alla ricerca di una primitiva del prodotto $f'g$

Introduzione

Integrale indefinito

Integrale definito

Proprietà dell'integrale

Il teorema fondamentale

Metodi di integrazione

Integrazione per parti

Integrazione per sostituzione



Di questa formula vale anche la versione per l'integrale definito: se f e g sono derivabili su $[a, b]$ con derivate continue allora

$$\int_a^b f(x)g'(x) dx = \left[f(x)g(x) \right]_a^b - \int_a^b f'(x)g(x) dx$$

Introduzione

Integrale indefinito

Integrale definito

Proprietà dell'integrale

Il teorema fondamentale

Metodi di integrazione

Integrazione per parti

Integrazione per sostituzione



Di questa formula vale anche la versione per l'integrale definito: se f e g sono derivabili su $[a, b]$ con derivate continue allora

$$\int_a^b f(x)g'(x) dx = \left[f(x)g(x) \right]_a^b - \int_a^b f'(x)g(x) dx$$

L'integrazione per parti è molto utile per calcolare integrali delle seguenti classi di funzioni:

$$\begin{array}{lll} x^n e^{\alpha x}, & x^n \operatorname{sen} \beta x, & x^n \operatorname{cos} \beta x, \\ e^{\alpha x} \operatorname{sen} \beta x, & e^{\alpha x} \operatorname{cos} \beta x, & x^n \operatorname{arctg} x, \\ x^n \operatorname{arcsen} x, & x^\alpha \log x, & \end{array}$$

dove $n \in \mathbb{N}$ e $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$

Introduzione

Integrale indefinito

Integrale definito

Proprietà dell'integrale

Il teorema fondamentale

Metodi di integrazione

Integrazione per parti

Integrazione per sostituzione



Integrazione per sostituzione

Sia $g : [c, d] \rightarrow [a, b]$ invertibile e derivabile con derivata continua. Se F è primitiva di f , per la formula di derivazione delle funzioni composte si ottiene

$$\frac{d}{dx} [F(g(x))] = f(g(x))g'(x) \quad (1)$$

Introduzione

Integrale indefinito

Integrale definito

Proprietà dell'integrale

Il teorema fondamentale

Metodi di integrazione

Integrazione per parti

Integrazione per sostituzione



Integrazione per sostituzione

Sia $g : [c, d] \rightarrow [a, b]$ invertibile e derivabile con derivata continua. Se F è primitiva di f , per la formula di derivazione delle funzioni composte si ottiene

$$\frac{d}{dx} [F(g(x))] = f(g(x))g'(x) \quad (1)$$

Integrando a primo membro in $[g^{-1}(a), g^{-1}(b)]$ si ha

$$\int_{g^{-1}(a)}^{g^{-1}(b)} \frac{d}{dx} [F(g(x))] dx = \left[F(g(x)) \right]_{g^{-1}(a)}^{g^{-1}(b)} = F(b) - F(a)$$

Introduzione

Integrale indefinito

Integrale definito

Proprietà dell'integrale

Il teorema fondamentale

Metodi di integrazione

Integrazione per parti

Integrazione per sostituzione



Integrazione per sostituzione

Sia $g : [c, d] \rightarrow [a, b]$ invertibile e derivabile con derivata continua. Se F è primitiva di f , per la formula di derivazione delle funzioni composte si ottiene

$$\frac{d}{dx} [F(g(x))] = f(g(x))g'(x) \quad (1)$$

Integrando a primo membro in $[g^{-1}(a), g^{-1}(b)]$ si ha

$$\int_{g^{-1}(a)}^{g^{-1}(b)} \frac{d}{dx} [F(g(x))] dx = \left[F(g(x)) \right]_{g^{-1}(a)}^{g^{-1}(b)} = F(b) - F(a)$$

e, se f è continua in $[a, b]$, si ha

$$F(b) - F(a) = \int_a^b f(t) dt$$

Introduzione

Integrale indefinito

Integrale definito

Proprietà dell'integrale

Il teorema fondamentale

Metodi di integrazione

Integrazione per parti

Integrazione per sostituzione



Integrando in $[g^{-1}(a), g^{-1}(b)]$ ambo i membri della (1) e utilizzando le due uguaglianze precedenti si ha la **formula di integrazione per sostituzione**

$$\int_a^b f(t) dt = \int_{g^{-1}(a)}^{g^{-1}(b)} f(g(x)) g'(x) dx$$

Introduzione

Integrale indefinito

Integrale definito

Proprietà dell'integrale

Il teorema fondamentale

Metodi di integrazione

Integrazione per parti

Integrazione per sostituzione



Integrando in $[g^{-1}(a), g^{-1}(b)]$ ambo i membri della (1) e utilizzando le due uguaglianze precedenti si ha la **formula di integrazione per sostituzione**

$$\int_a^b f(t) dt = \int_{g^{-1}(a)}^{g^{-1}(b)} f(g(x)) g'(x) dx$$

La stessa si può applicare al calcolo degli integrali indefiniti: se f è una funzione continua e g una funzione invertibile e derivabile con derivata continua, allora

$$\int f(t) dt = \left[\int f(g(x)) g'(x) dx \right]_{x=g^{-1}(t)}$$

dove le parentesi quadre significano che la funzione entro parentesi va calcolata in $x = g^{-1}(t)$

Introduzione

Integrale indefinito

Integrale definito

Proprietà dell'integrale

Il teorema fondamentale

Metodi di integrazione

Integrazione per parti

Integrazione per sostituzione

□ □

Regola mnemonica

Come regola mnemonica per il calcolo di

$$\int_a^b f(t) dt$$

mediante un cambiamento di variabile $t = g(x)$ si può tenere a mente questo schema:

[Introduzione](#)

[Integrale indefinito](#)

[Integrale definito](#)

[Proprietà dell'integrale](#)

[Il teorema fondamentale](#)

[Metodi di integrazione](#)

[Integrazione per parti](#)

[Integrazione per sostituzione](#)



Regola mnemonica

Come regola mnemonica per il calcolo di

$$\int_a^b f(t) dt = \int f(\quad)$$

mediante un cambiamento di variabile $t = g(x)$ si può tenere a mente questo schema:

[Introduzione](#)

[Integrale indefinito](#)

[Integrale definito](#)

[Proprietà dell'integrale](#)

[Il teorema fondamentale](#)

[Metodi di integrazione](#)

[Integrazione per parti](#)

[Integrazione per sostituzione](#)



Regola mnemonica

Come regola mnemonica per il calcolo di

$$\int_a^b f(t) dt = \int f(g(x))$$

mediante un cambiamento di variabile $t = g(x)$ si può tenere a mente questo schema:

- t viene sostituito da $g(x)$

Introduzione

Integrale indefinito

Integrale definito

Proprietà dell'integrale

Il teorema fondamentale

Metodi di integrazione

Integrazione per parti

Integrazione per sostituzione



Regola mnemonica

Come regola mnemonica per il calcolo di

$$\int_a^b f(t) dt = \int f(g(x)) g'(x) dx$$

mediante un cambiamento di variabile $t = g(x)$ si può tenere a mente questo schema:

- t viene sostituito da $g(x)$
- dt viene sostituito da $g'(x)dx$

Introduzione

Integrale indefinito

Integrale definito

Proprietà dell'integrale

Il teorema fondamentale

Metodi di integrazione

Integrazione per parti

Integrazione per sostituzione



Regola mnemonica

Come regola mnemonica per il calcolo di

$$\int_a^b f(t) dt = \int_{g^{-1}(a)}^{g^{-1}(b)} f(g(x)) g'(x) dx$$

mediante un cambiamento di variabile $t = g(x)$ si può tenere a mente questo schema:

- t viene sostituito da $g(x)$
- dt viene sostituito da $g'(x)dx$
- gli estremi di integrazione a e b vengono sostituiti da numeri reali u, v tali che $g(u) = a, g(v) = b$ (infatti essendo g invertibile si ha $u = g^{-1}(a)$ e $v = g^{-1}(b)$)

Introduzione

Integrale indefinito

Integrale definito

Proprietà dell'integrale

Il teorema fondamentale

Metodi di integrazione

Integrazione per parti

Integrazione per sostituzione

