Calcolo Differenziale

Velocità istantanea

Percorriamo il tratto di strada tra Udine e Trieste

Velocità istantanea

Percorriamo il tratto di strada tra Udine e Trieste

Udine   Trieste

75km

Tempo impiegato: 1h

Velocità istantanea

Percorriamo il tratto di strada tra Udine e Trieste

Udine Trieste

75km

Tempo impiegato: 1h

$$\text{velocità media} = \frac{\text{spazio percorso}}{\text{tempo impiegato}} = 75 \text{ km/h}$$

Velocità istantanea

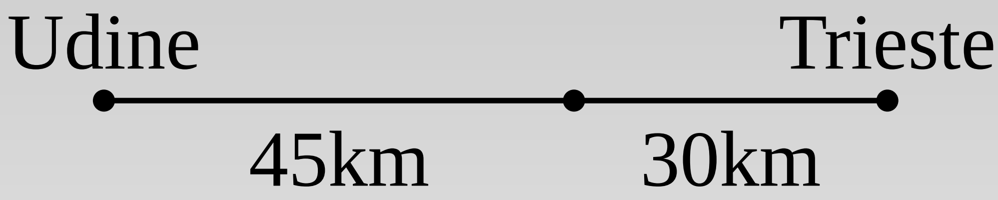
Percorriamo il tratto di strada tra Udine e Trieste

Tempo impiegato: 1h

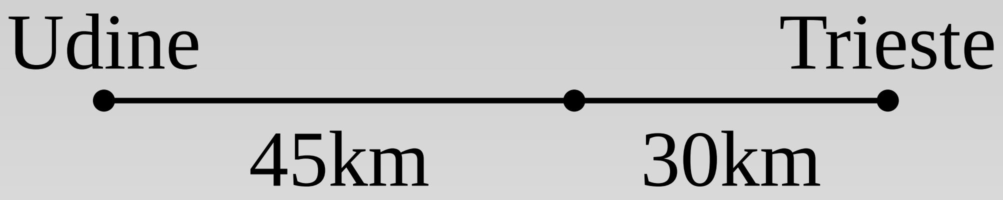
$$\text{velocità media} = \frac{\text{spazio percorso}}{\text{tempo impiegato}} = 75 \text{ km/h}$$

Questo non vuol dire che abbiamo avuto una velocità costante!

Dividendo il tratto di strada in due parti

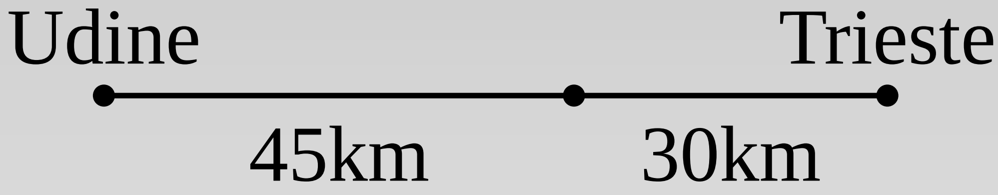


Dividendo il tratto di strada in due parti



Tempo impiegato primo tratto: 0.7h
Tempo impiegato secondo tratto: 0.3h

Dividendo il tratto di strada in due parti

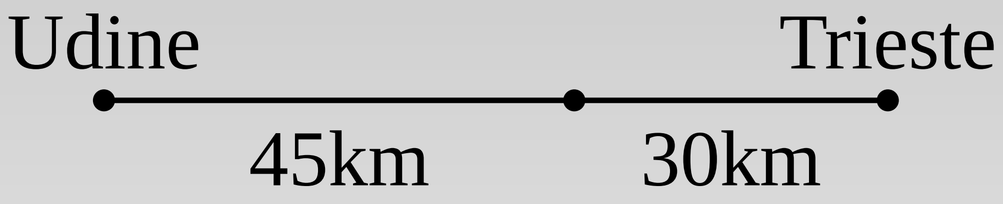


Tempo impiegato primo tratto: 0.7h
Tempo impiegato secondo tratto: 0.3h

velocità media primo tratto $= 64.28$ km/h

velocità media secondo tratto $= 100$ km/h

Dividendo il tratto di strada in due parti



Tempo impiegato primo tratto: $0.7\mathrm{h}$
Tempo impiegato secondo tratto: $0.3\mathrm{h}$

velocità media primo tratto $= 64.28$ km/h

velocità media secondo tratto $= 100$ km/h

Si può dividere la strada in intervalli sempre più piccoli su cui calcolare la velocità media

$$s(t) = \text{la distanza percorsa al tempo } t$$

$$s(t) = \text{la distanza percorsa al tempo } t$$

La velocità media nell'intervallo di tempo $[t_0, t_0 + h]$ è

$$\frac{s(t_0 + h) - s(t_0)}{h}$$

$$s(t) = \text{la distanza percorsa al tempo } t$$

La velocità media nell'intervallo di tempo $[t_0, t_0 + h]$ è

$$\frac{s(t_0 + h) - s(t_0)}{h}$$

Più h è vicino a 0, più è precisa l'informazione sull'andamento della velocità.

$$s(t) = \text{la distanza percorsa al tempo } t$$

La velocità media nell'intervallo di tempo $[t_0, t_0 + h]$ è

$$\frac{s(t_0 + h) - s(t_0)}{h}$$

Più h è vicino a 0, più è precisa l'informazione sull'andamento della velocità. Il limite

$$\lim_{h \to 0} \frac{s(t_0 + h) - s(t_0)}{h}$$

rappresenta la velocità istantanea al tempo t_0

Definizione di derivata

Derivabilità e derivata

Sia $f\ :]a,b[\to\mathbb{R}$ una funzione e $x_0\in]a,b[$

f è derivabile nel punto x_0 se esiste finito

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$$

detto derivata di f nel punto x_0, indicato usualmente con uno dei simboli

$$f'(x_0) \qquad \frac{df}{dx}(x_0) \qquad Df(x_0)$$

Derivabilità e derivata

Sia $f\ :]a,b[\to\mathbb{R}$ una funzione e $x_0\in]a,b[$

f è derivabile nel punto x_0 se esiste finito

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$$

rapporto incrementale

detto derivata di f nel punto x_0, indicato usualmente con uno dei simboli

$$f'(x_0) \qquad \frac{df}{dx}(x_0) \qquad Df(x_0)$$

Si dice che f è derivabile in un sottoinsieme A del suo dominio se è derivabile in ogni punto di A

Si dice che f è derivabile in un sottoinsieme A del suo dominio se è derivabile in ogni punto di A

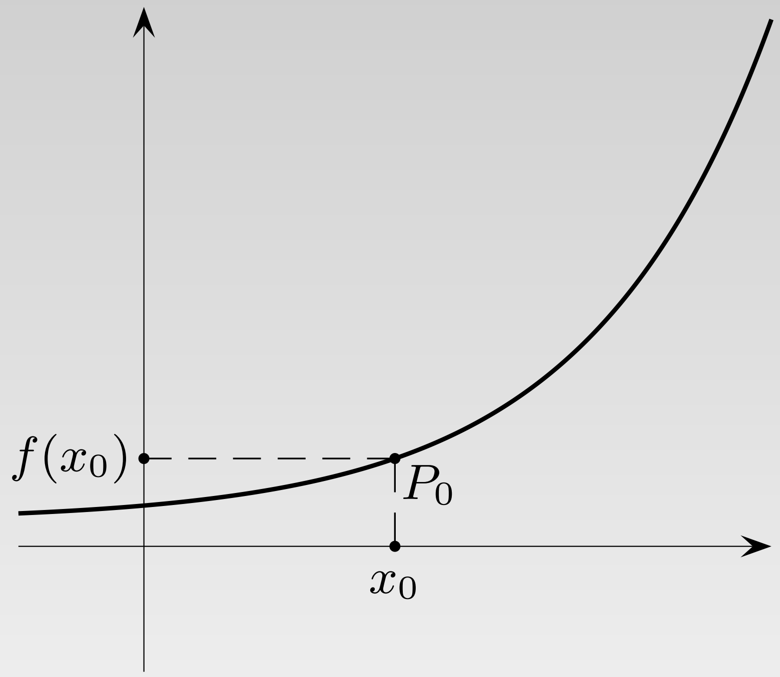
Operando il cambiamento di variabile $x = x_0 + h$ si ottiene

$$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

che è un altro modo di definire la derivata

Retta tangente

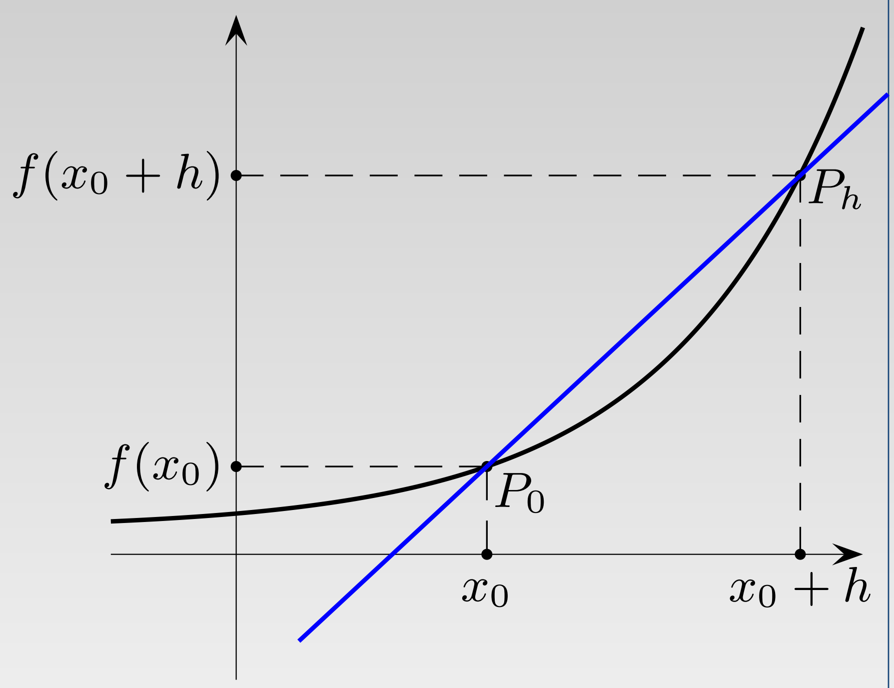
Sia $f :]a,b[\to \mathbb{R}$ e $x_0 \in]a,b[$



Retta tangente

Sia $f :]a, b[\to \mathbb{R}$ e $x_0 \in]a, b[$

Tracciamo la retta secante passante per i punti di ascissa x_0 e $x_0 + h$



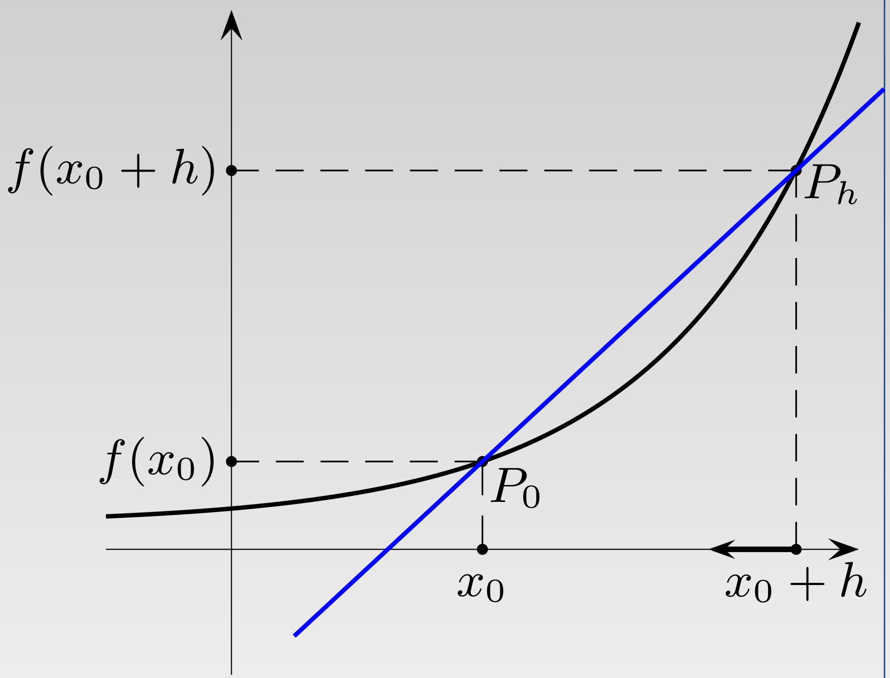
Equazione della secante: $$y = (x - x_0)\frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} + f(x_0)$$

Retta tangente

Sia $f:]a,b[\to \mathbb{R}$ e $x_0 \in]a,b[$

Tracciamo la retta secante passante per i punti di ascissa x_0 e $x_0 + h$

Facciamo tendere h a zero, quindi $x_0 + h$ tenderà a x_0



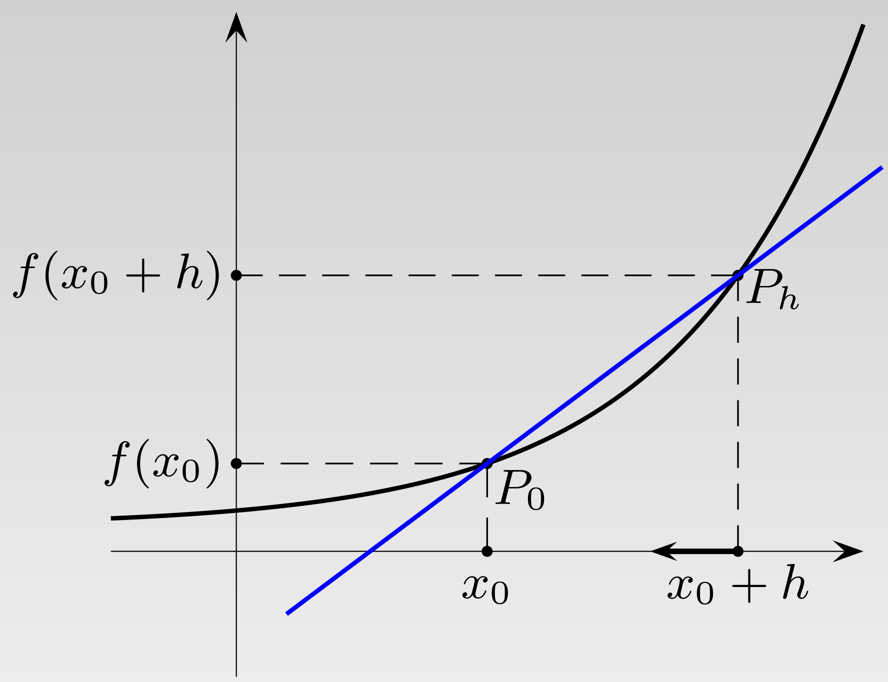
Equazione della secante:
$$y = (x - x_0)\frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} + f(x_0)$$

Retta tangente

Sia $f\ :]a,b[\to \mathbb{R}$ e $x_0 \in]a,b[$

Tracciamo la retta secante passante per i punti di ascissa x_0 e x_0+h

Facciamo tendere h a zero, quindi x_0+h tenderà a x_0
Corrispondentemente il punto P_h tenderà a P_0 lungo la curva



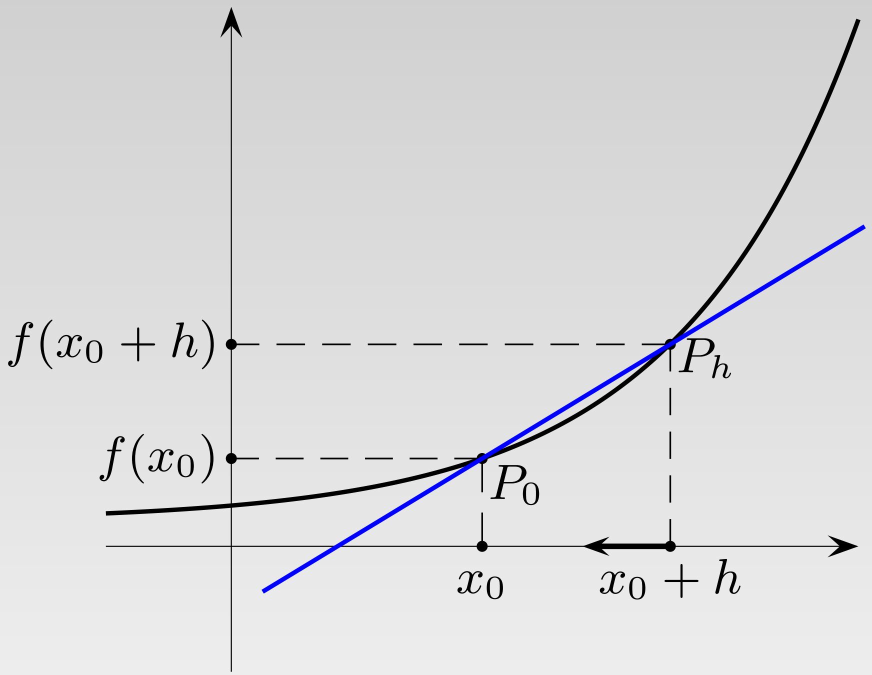
Equazione della secante: $$y=(x-x_0)\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}+f(x_0)$$

Sia $f :]a,b[\to \mathbb{R}$ e $x_0 \in]a,b[$

Tracciamo la retta secante passante per i punti di ascissa x_0 e $x_0 + h$

Facciamo tendere h a zero, quindi $x_0 + h$ tenderà a x_0

Corrispondentemente il punto P_h tenderà a P_0 lungo la curva



Equazione della secante:
$$y = (x - x_0)\frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} + f(x_0)$$

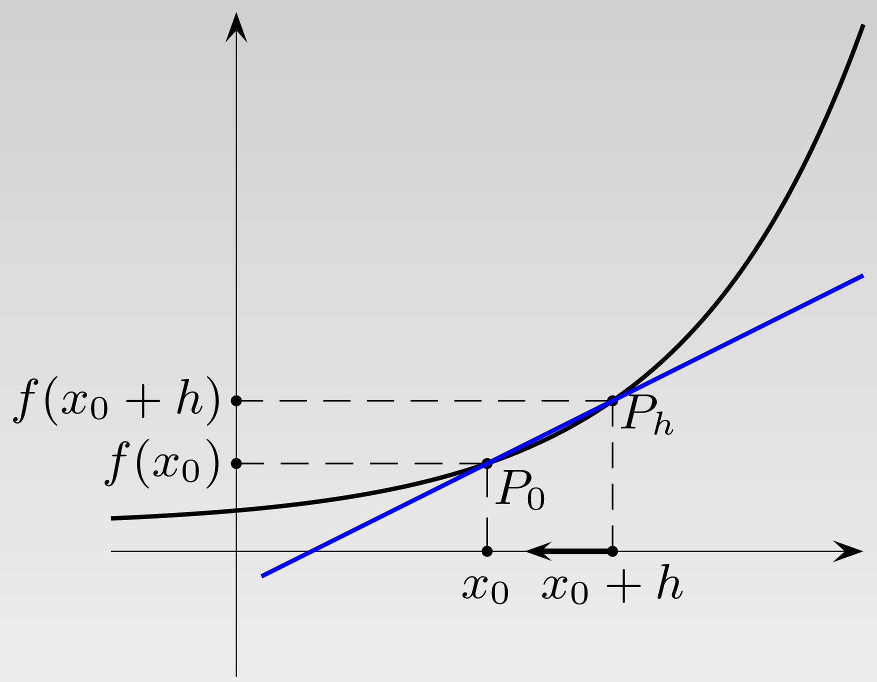
Retta tangente

Sia $f :]a, b[\to \mathbb{R}$ e $x_0 \in]a, b[$

Tracciamo la retta secante passante per i punti di ascissa x_0 e $x_0 + h$

Facciamo tendere h a zero, quindi $x_0 + h$ tenderà a x_0

Corrispondentemente il punto P_h tenderà a P_0 lungo la curva



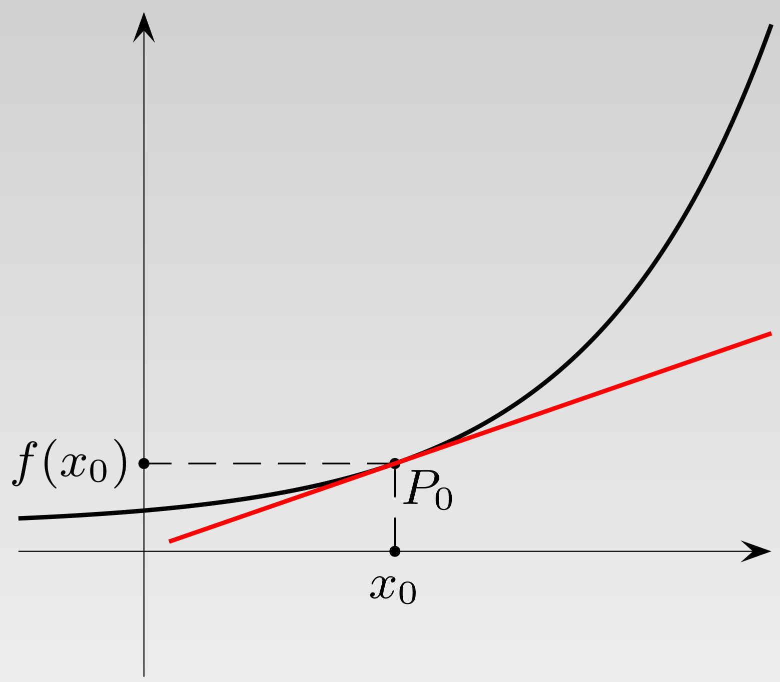
Equazione della secante:
$$y = (x - x_0)\frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} + f(x_0)$$

Retta tangente

Sia $f :]a, b[\to \mathbb{R}$ e $x_0 \in]a, b[$

Per $h \to 0$, la retta secante tende alla

retta tangente al grafico nel punto $(x_0, f(x_0))$



Equazione della secante:
$$y = (x - x_0)\frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} + f(x_0)$$

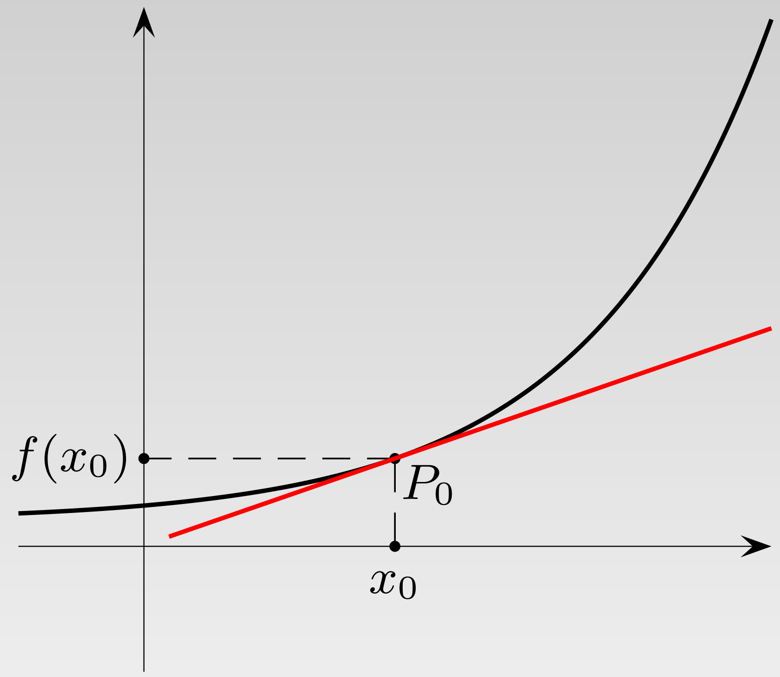
Retta tangente

Sia $f :]a, b[\to \mathbb{R}$ e $x_0 \in]a, b[$

Per $h \to 0$, la retta secante tende alla

retta tangente al grafico nel punto $(x_0, f(x_0))$

Se f è derivabile in x_0, passando al limite $h \to 0$ nell'equazione della retta secante si trova l'equazione della retta tangente



Equazione della secante: $$y = (x - x_0)\frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} + f(x_0)$$

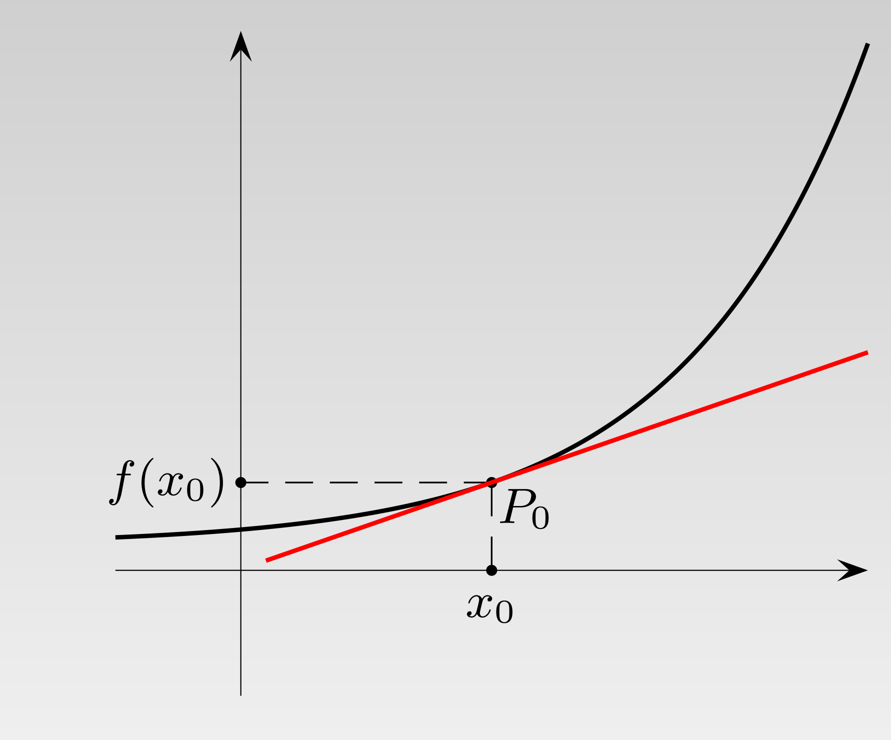
Retta tangente

Sia $f :]a, b[\to \mathbb{R}$ e $x_0 \in]a, b[$

Per $h \to 0$, la retta secante tende alla

retta tangente al grafico nel punto $(x_0, f(x_0))$

Se f è derivabile in x_0, passando al limite $h \to 0$ nell'equazione della retta secante si trova l'equazione della retta tangente



Equazione della secante: $$y = (x - x_0)\frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} + f(x_0)$$

$$y = (x - x_0)f'(x_0) + f(x_0)$$

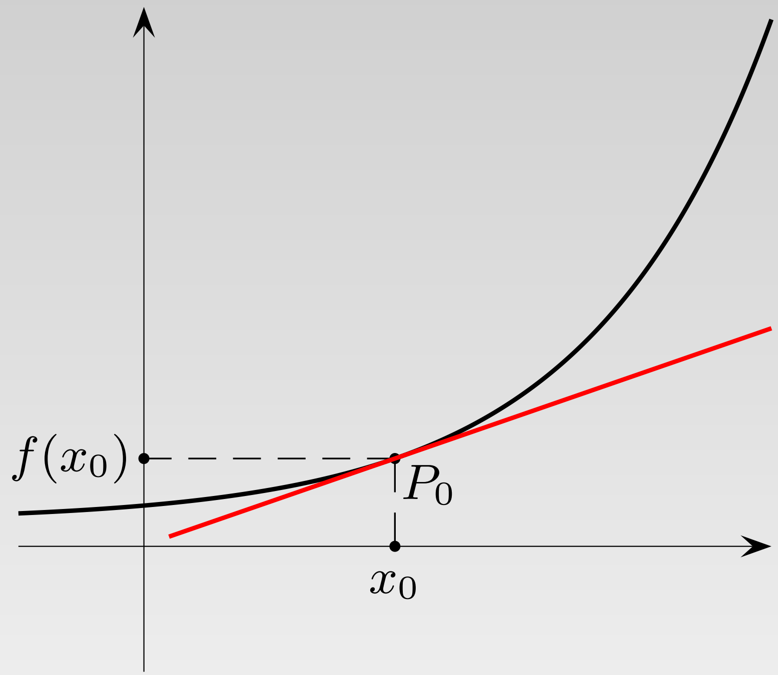
Retta tangente

Sia $f :]a,b[\to \mathbb{R}$ e $x_0 \in]a,b[$

Per $h \to 0$, la retta secante tende alla

retta tangente al grafico nel punto $(x_0, f(x_0))$

Se f è derivabile in x_0, passando al limite $h \to 0$ nell'equazione della retta secante si trova l'equazione della retta tangente



Equazione della secante: $$y = (x - x_0)\frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} + f(x_0)$$

Equazione della tangente in P_0: $$y = (x - x_0)f'(x_0) + f(x_0)$$

Significato geometrico

Dall'equazione

$$\boxed{y = (x - x_0) f'(x_0) + f(x_0)}$$

si ottiene l'interpretazione geometrica della derivata:

> La derivata della funzione f nel punto x_0 è il coefficiente angolare della retta tangente al grafico della funzione nel punto $(x_0, f(x_0))$

Derivate delle funzioni elementari

Tabella di derivate

Funzione	Derivata
costante	0
x^α	$\alpha x^{\alpha-1}$
$\operatorname{sen} x$	$\cos x$
$\cos x$	$-\operatorname{sen} x$
$\operatorname{tg} x$	$\dfrac{1}{\cos^2 x} = 1 + \operatorname{tg}^2 x$
$\operatorname{arcsen} x$	$\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
$\arccos x$	$-\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
$\operatorname{arctg} x$	$\dfrac{1}{1+x^2}$

Funzione	Derivata
a^x	$a^x \log a$
$\log_a x$	$\dfrac{1}{x \log a}$
$\operatorname{senh} x$	$\cosh x$
$\cosh x$	$\operatorname{senh} x$
$\operatorname{tgh} x$	$\dfrac{1}{\cosh^2 x}$
$\operatorname{setsenh} x$	$\dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}}$
$\operatorname{setcosh} x$	$\dfrac{1}{\sqrt{x^2-1}}$
$\operatorname{settgh} x$	$\dfrac{1}{1-x^2}$

Operazioni con le derivate

Operazioni con le derivate

Se f e g sono derivabili in un punto x allora sono derivabili in x anche αf, $f+g$, fg e f/g (purché $g(x) \neq 0$), e valgono

$$(\alpha f)'(x) = \alpha f'(x)$$

$$(f+g)'(x) = f'(x) + g'(x)$$

$$(fg)'(x) = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$$

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(x) = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{g^2(x)} \text{ se } g(x) \neq 0$$

Operazioni con le derivate

Se f e g sono derivabili in un punto x allora sono derivabili in x anche αf, $f+g$, fg e f/g (purché $g(x) \neq 0$), e valgono

$$(\alpha f)'(x) = \alpha f'(x)$$

$$(f+g)'(x) = f'(x) + g'(x)$$

$$(fg)'(x) = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$$

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(x) = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{g^2(x)} \text{ se } g(x) \neq 0$$

Se g è derivabile in x ed f è derivabile in $g(x)$ allora la funzione composta $f \circ g$ è derivabile in x e vale

$$(f \circ g)'(x) = f'(g(x)) \cdot g'(x)$$

Derivate di ordine superiore

Derivata n-esima

Se $f :]a, b[\to \mathbb{R}$ è derivabile in ogni punto, allora si può considerare la funzione derivata

$$\begin{aligned} f' :]a, b[&\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto f'(x) \end{aligned}$$

Derivata n-esima

Se $f\ :]a,b[\to\mathbb{R}$ è derivabile in ogni punto, allora si può considerare la funzione derivata

$$f'\ :]a,b[\ \to \mathbb{R}$$
$$x \mapsto f'(x)$$

Se f' è derivabile in $x_0 \in\ ]a,b[$ diremo che la sua derivata $(f')'(x_0)$ è la derivata seconda di f nel punto x_0, denotata con uno dei simboli

$$f''(x_0) \qquad \frac{d^2 f}{dx^2}(x_0) \qquad D^2 f(x_0)$$

Derivata n-esima

Se $f :]a, b[\to \mathbb{R}$ è derivabile in ogni punto, allora si può considerare la funzione derivata

$$f' :]a, b[\to \mathbb{R}$$
$$x \mapsto f'(x)$$

Se f' è derivabile in $x_0 \in]a, b[$ diremo che la sua derivata $(f')'(x_0)$ è la derivata seconda di f nel punto x_0, denotata con uno dei simboli

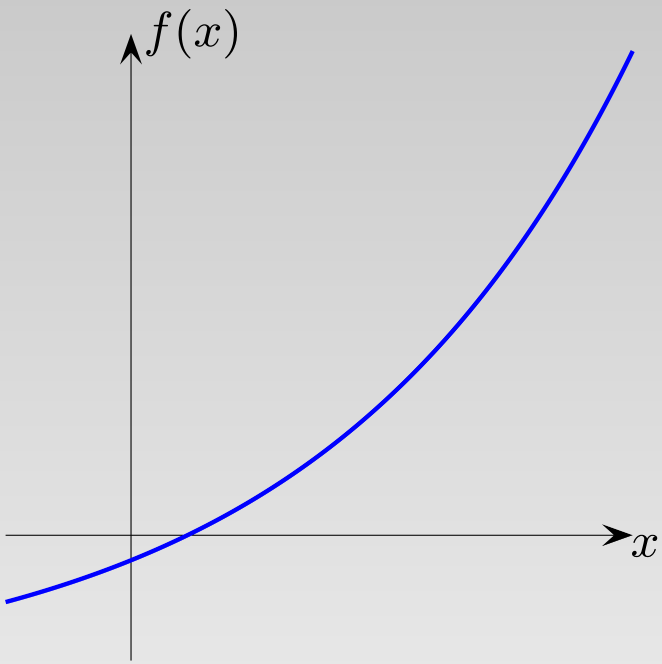
$$f''(x_0) \qquad \frac{d^2 f}{dx^2}(x_0) \qquad D^2 f(x_0)$$

Procedendo oltre, potremo parlare di derivata terza e così via. Useremo il simbolo $f^{(n)}$ o $D^n f$ per denotare la derivata n-esima

Andamento di crescita delle funzioni derivabili

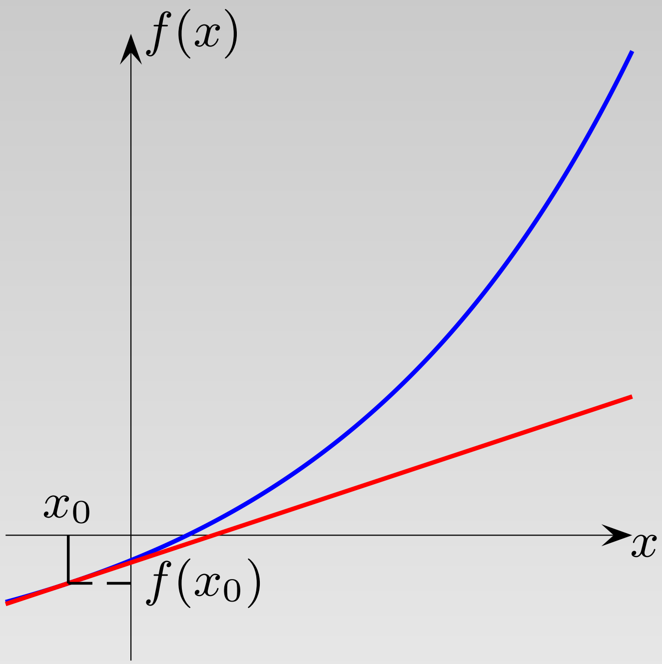
Monotonia delle funzioni derivabili

Consideriamo il grafico di una funzione crescente e derivabile.



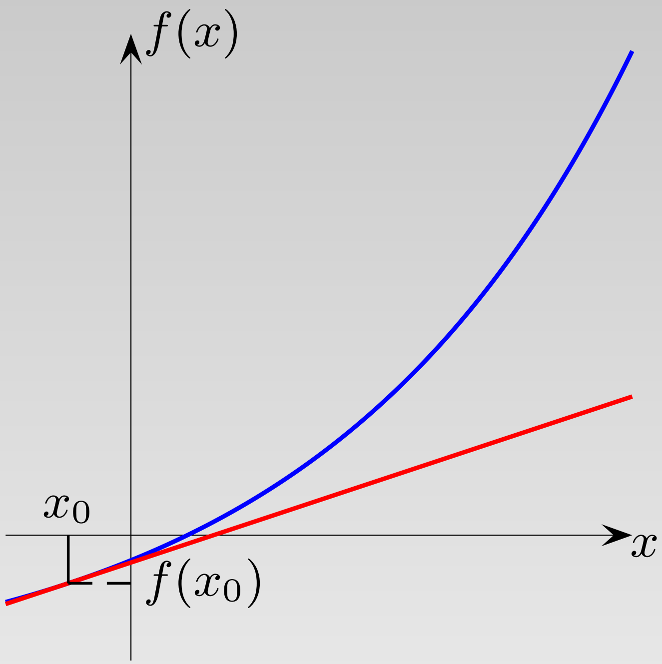
Monotonia delle funzioni derivabili

Consideriamo il grafico di una funzione crescente e derivabile. Ogni retta tangente al grafico “punta verso l’alto”



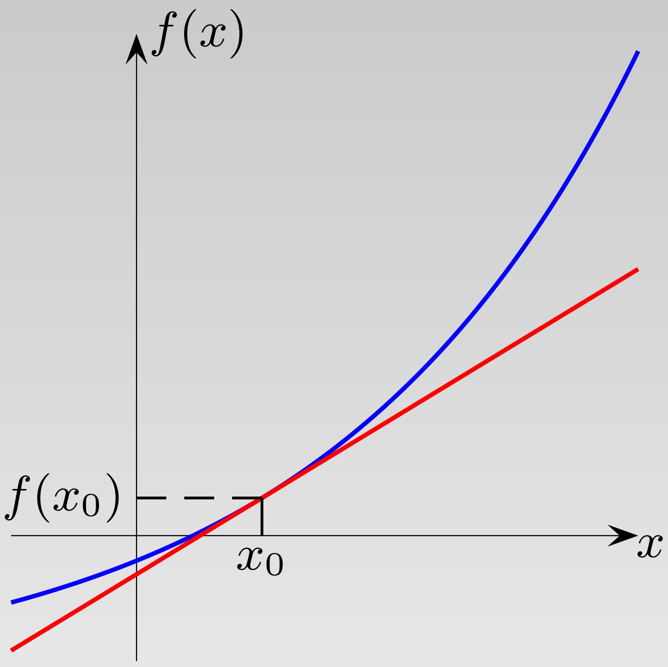
Monotonia delle funzioni derivabili

Consideriamo il grafico di una funzione crescente e derivabile. Ogni retta tangente al grafico “punta verso l’alto”, ovvero ha un coefficiente angolare positivo.



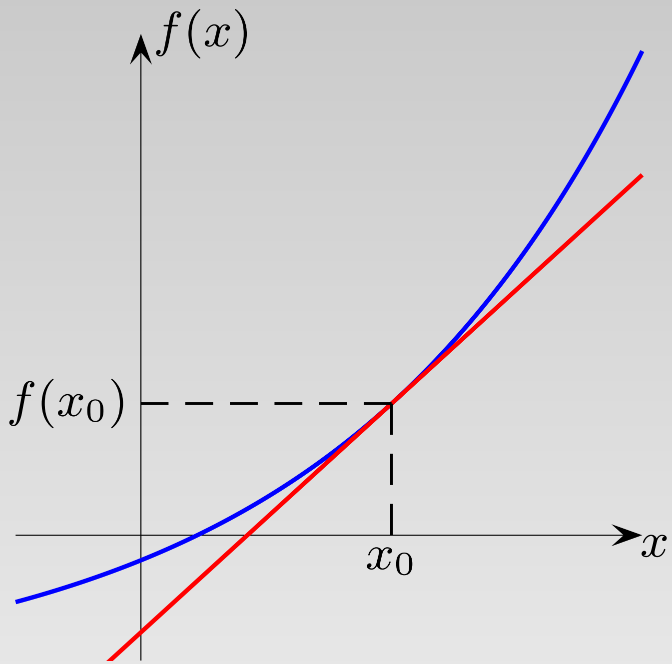
Monotonia delle funzioni derivabili

Consideriamo il grafico di una funzione crescente e derivabile. Ogni retta tangente al grafico “punta verso l’alto”, ovvero ha un coefficiente angolare positivo.



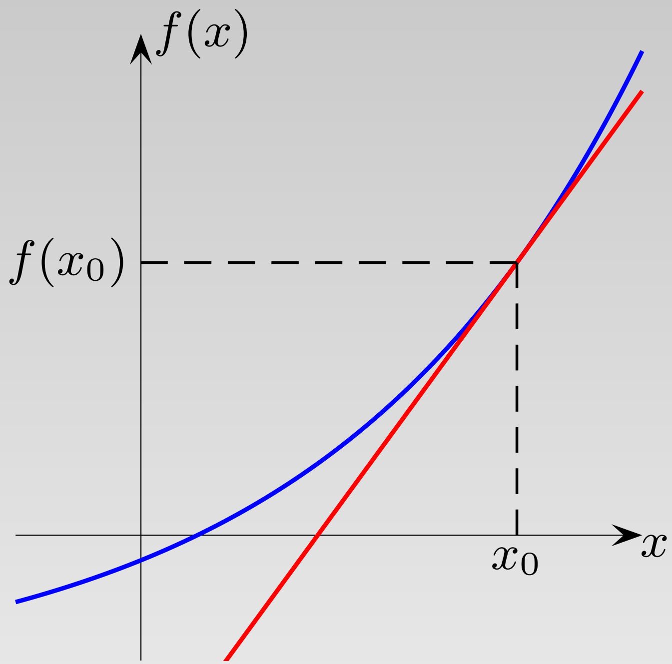
Monotonia delle funzioni derivabili

Consideriamo il grafico di una funzione crescente e derivabile. Ogni retta tangente al grafico “punta verso l’alto”, ovvero ha un coefficiente angolare positivo.



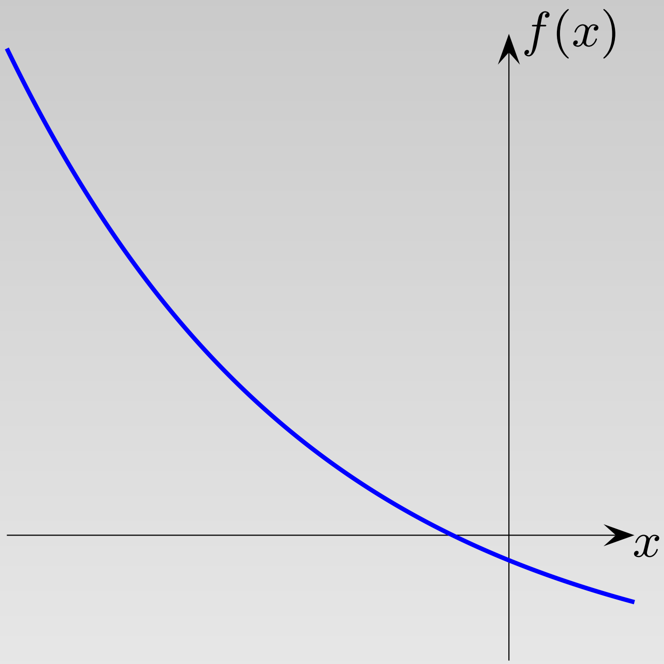
Monotonia delle funzioni derivabili

Consideriamo il grafico di una funzione crescente e derivabile. Ogni retta tangente al grafico “punta verso l’alto”, ovvero ha un coefficiente angolare positivo.



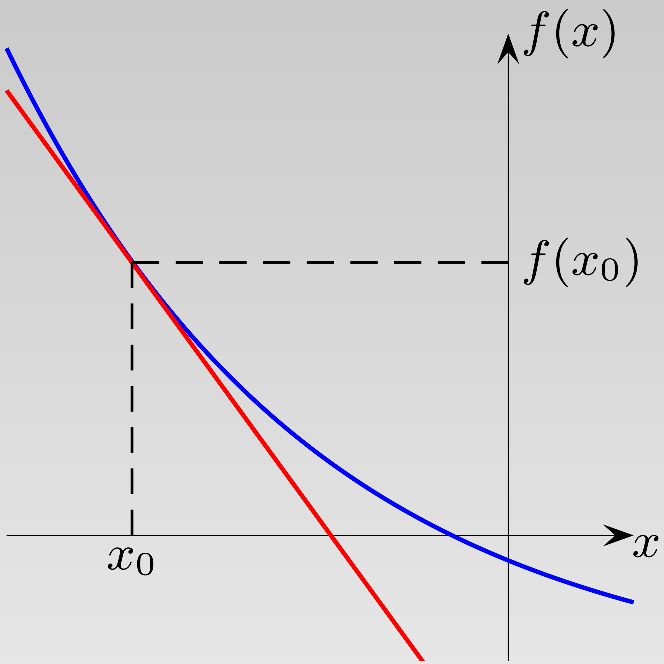
Monotonia delle funzioni derivabili

Analogamente accade per le funzioni decrescenti e derivabili.



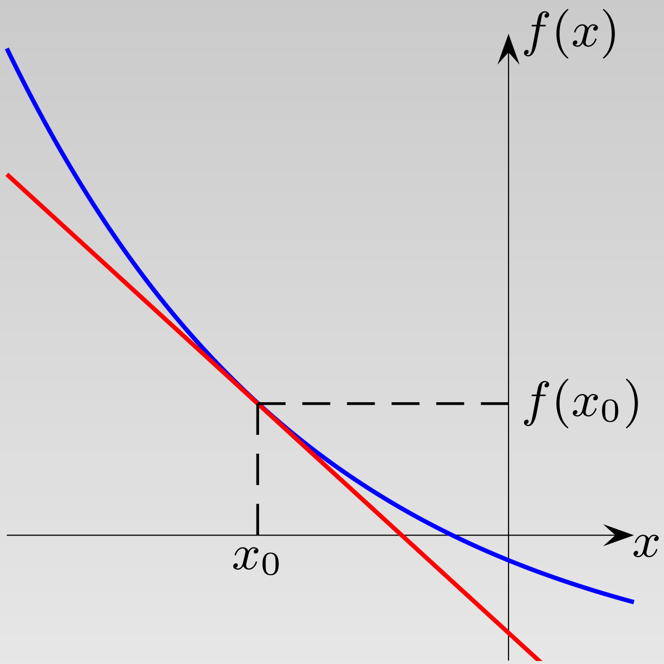
Monotonia delle funzioni derivabili

Analogamente accade per le funzioni decrescenti e derivabili. Ogni retta tangente al grafico “punta verso il basso”, ovvero ha un coefficiente angolare negativo.



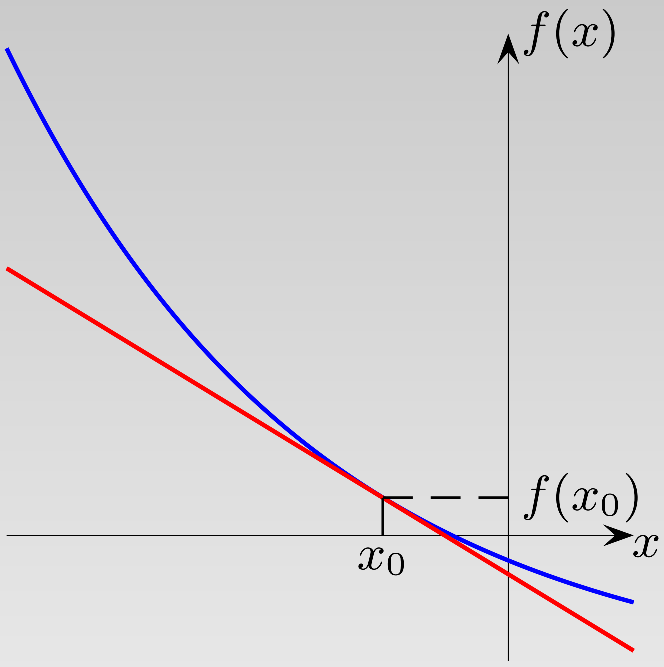
Monotonia delle funzioni derivabili

Analogamente accade per le funzioni decrescenti e derivabili. Ogni retta tangente al grafico "punta verso il basso", ovvero ha un coefficiente angolare negativo.



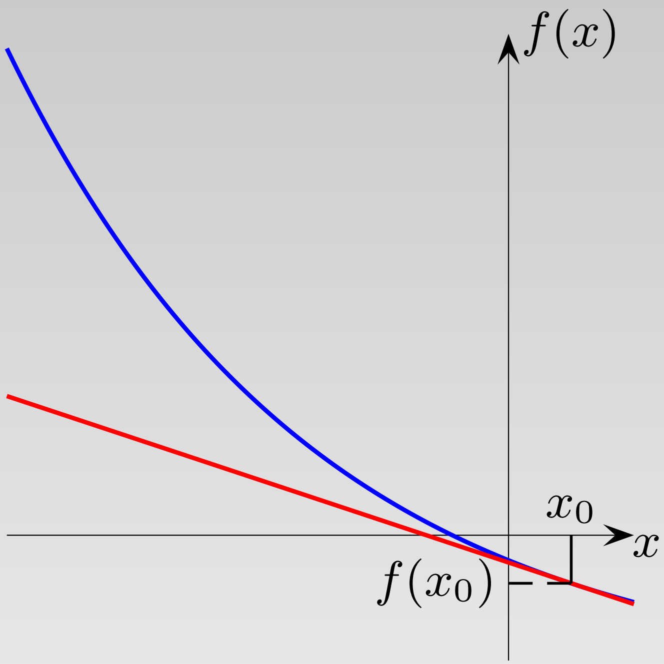
Monotonia delle funzioni derivabili

Analogamente accade per le funzioni decrescenti e derivabili. Ogni retta tangente al grafico “punta verso il basso”, ovvero ha un coefficiente angolare negativo.



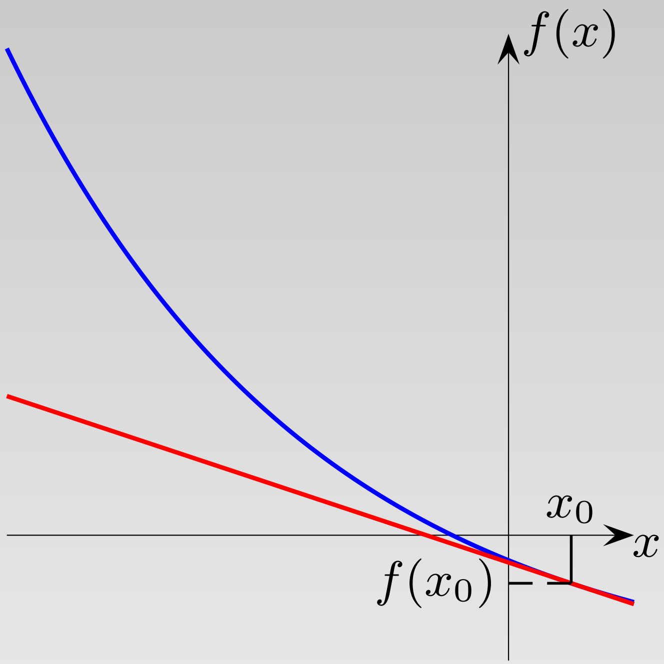
Monotonia delle funzioni derivabili

Analogamente accade per le funzioni decrescenti e derivabili. Ogni retta tangente al grafico “punta verso il basso”, ovvero ha un coefficiente angolare negativo.



Monotonia delle funzioni derivabili

Analogamente accade per le funzioni decrescenti e derivabili. Ogni retta tangente al grafico “punta verso il basso”, ovvero ha un coefficiente angolare negativo.



Poiché la pendenza della tangente al grafico di f nel punto $(x_0, f(x_0))$ è data da $f'(x_0)$, ci si può aspettare che il segno della derivata prima sia legato all’andamento di monotonia della funzione.

Criterio di monotonia

Teorema (criterio di monotonia). Sia f una funzione derivabile in $]a, b[$. Allora

$$f'(x) \geq 0 \ \forall\, x \in]a, b[\iff f \text{ è crescente in }]a, b[$$

$$f'(x) \leq 0 \ \forall\, x \in]a, b[\iff f \text{ è decrescente in }]a, b[$$

Criterio di monotonia

Teorema (criterio di monotonia). Sia f una funzione derivabile in $]a,b[$. Allora

$$f'(x) \geq 0 \ \forall\, x \in]a,b[\iff f \text{ è crescente in }]a,b[$$

$$f'(x) \leq 0 \ \forall\, x \in]a,b[\iff f \text{ è decrescente in }]a,b[$$

Riguardo la monotonia in senso stretto:

$f'(x) > 0 \ \forall\, x \in]a,b[\implies$ f è strettamente crescente in]a,b[

$f'(x) < 0 \ \forall\, x \in]a,b[\implies$ f è strettamente decrescente in]a,b[

Criterio di monotonia

Teorema (criterio di monotonia). Sia f una funzione derivabile in $]a,b[$. Allora

$$f'(x) \geq 0 \ \forall\, x \in]a,b[\iff f \text{ è crescente in }]a,b[$$

$$f'(x) \leq 0 \ \forall\, x \in]a,b[\iff f \text{ è decrescente in }]a,b[$$

Riguardo la monotonia in senso stretto:

$f'(x) > 0 \ \forall\, x \in]a,b[\implies$ f è strettamente crescente in]a,b[

$f'(x) < 0 \ \forall\, x \in]a,b[\implies$ f è strettamente decrescente in]a,b[

Non vale il viceversa (ad esempio $f(x) = x^3$)

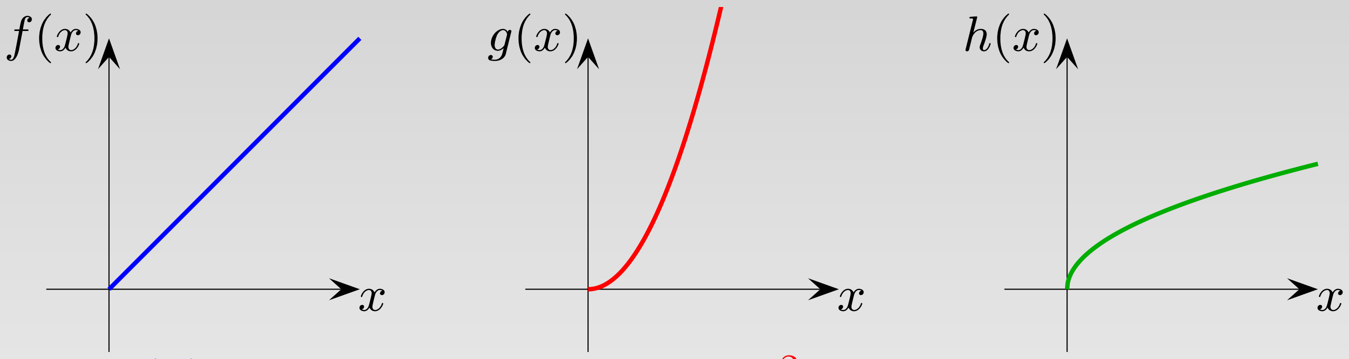
Funzioni concave e convesse

Curvatura del grafico

Talvolta è utile conoscere non solo dove la funzione cresce/decresce ma anche come lo fa.

Curvatura del grafico

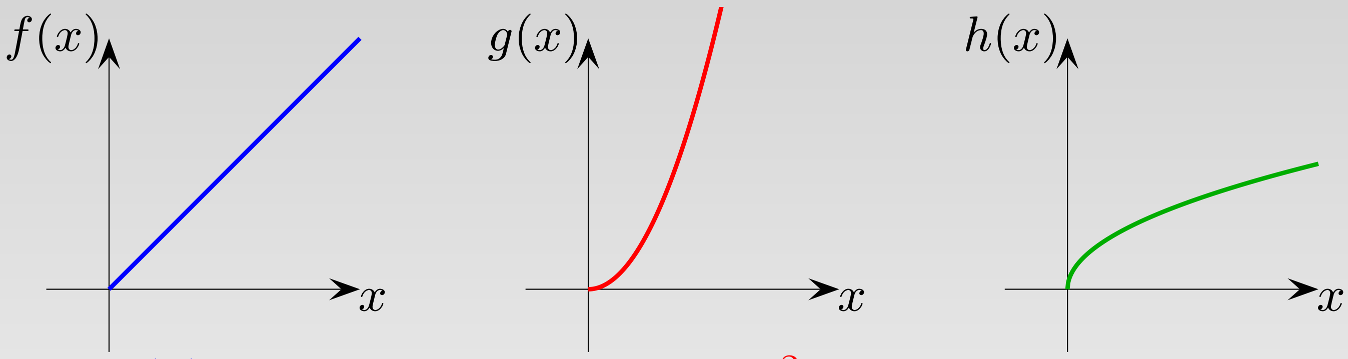
Talvolta è utile conoscere non solo dove la funzione cresce/decresce ma anche come lo fa. Ad esempio le tre funzioni



$f(x) = x$ $\qquad$ $g(x) = x^2$ $\qquad$ $h(x) = \sqrt{x}$

Curvatura del grafico

Talvolta è utile conoscere non solo dove la funzione cresce/decresce ma anche come lo fa. Ad esempio le tre funzioni

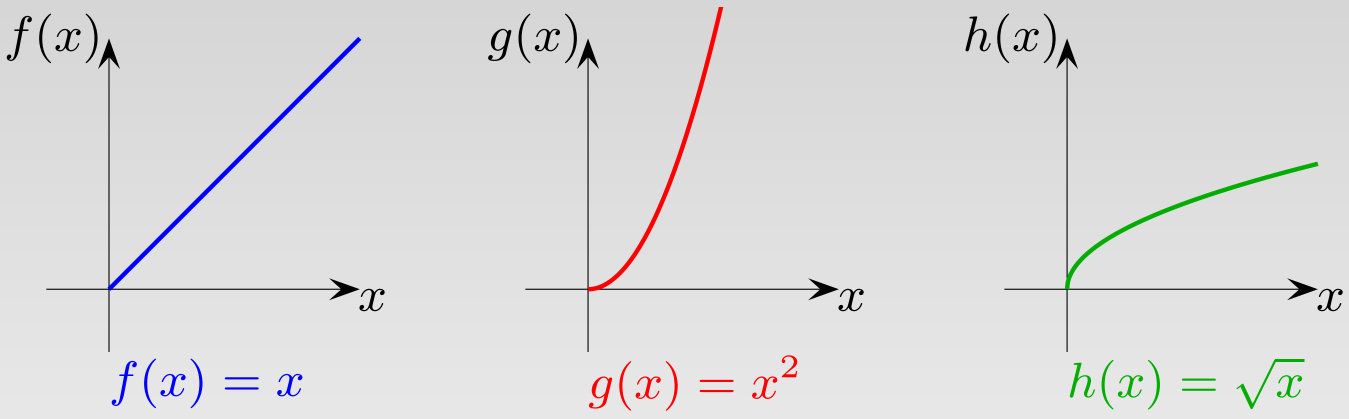


$f(x) = x$ $g(x) = x^2$ $h(x) = \sqrt{x}$

sono tutte crescenti in $[0, +\infty[$, ma i grafici si "curvano" in maniera differente:

Curvatura del grafico

Talvolta è utile conoscere non solo dove la funzione cresce/decresce ma anche come lo fa. Ad esempio le tre funzioni

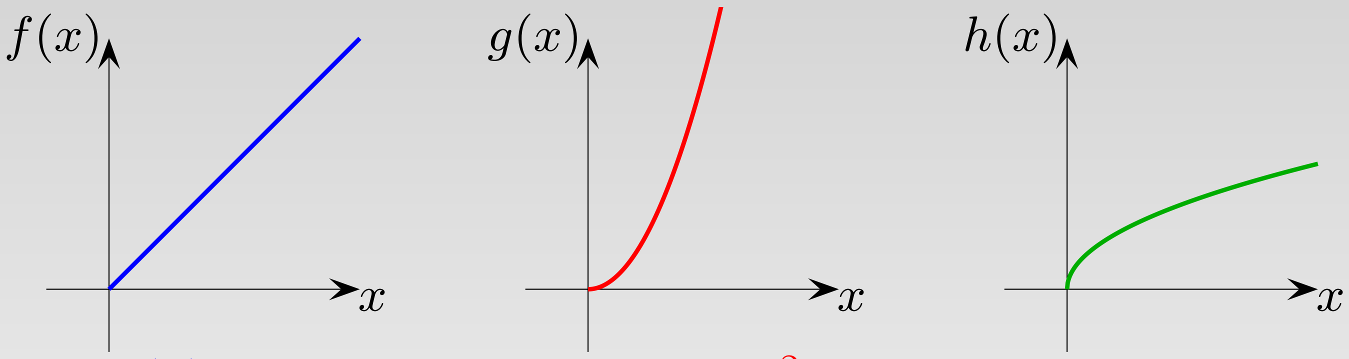


sono tutte crescenti in $[0, +\infty[$, ma i grafici si "curvano" in maniera differente:

- il grafico di f è un retta

Curvatura del grafico

Talvolta è utile conoscere non solo dove la funzione cresce/decresce ma anche come lo fa. Ad esempio le tre funzioni



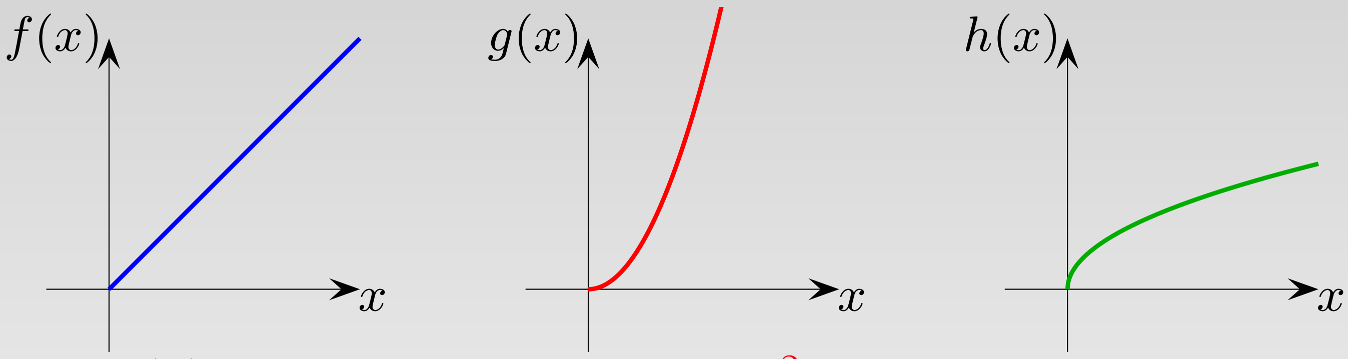
$f(x) = x$ $\quad$ $g(x) = x^2$ $\quad$ $h(x) = \sqrt{x}$

sono tutte crescenti in $[0, +\infty[$, ma i grafici si "curvano" in maniera differente:

- il grafico di f è un retta
- il grafico di g "si curva verso l'alto"

Curvatura del grafico

Talvolta è utile conoscere non solo dove la funzione cresce/decresce ma anche come lo fa. Ad esempio le tre funzioni



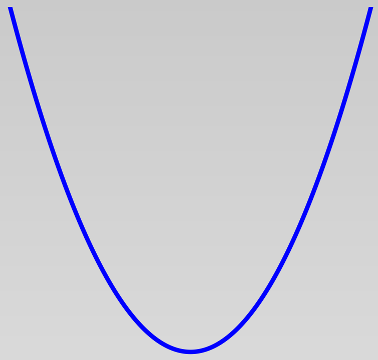
$f(x) = x$ $g(x) = x^2$ $h(x) = \sqrt{x}$

sono tutte crescenti in $[0, +\infty[$, ma i grafici si "curvano" in maniera differente:

- il grafico di f è un retta
- il grafico di g "si curva verso l'alto"
- il grafico di h "si curva verso il basso"

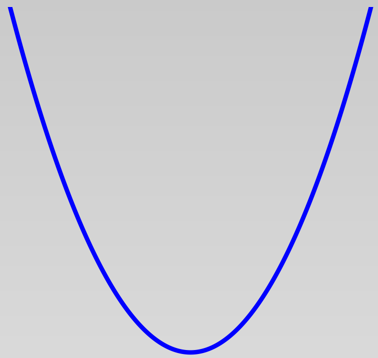
Funzioni convesse e concave

Si può dire che una funzione è convessa se il grafico si flette verso l'alto, assumendo una forma del tipo



Funzioni convesse e concave

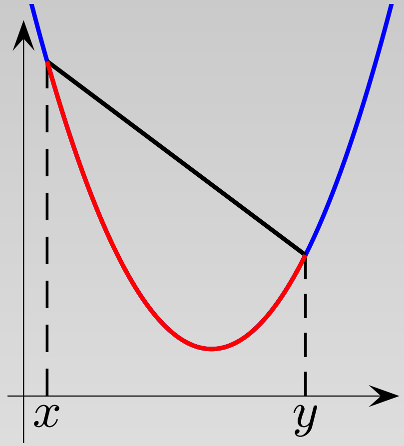
Si può dire che una funzione è convessa se il grafico si flette verso l'alto, assumendo una forma del tipo



Più precisamente, data $f\colon]a, b[\to \mathbb{R}$

Funzioni convesse e concave

Si può dire che una funzione è convessa se il grafico si flette verso l'alto, assumendo una forma del tipo

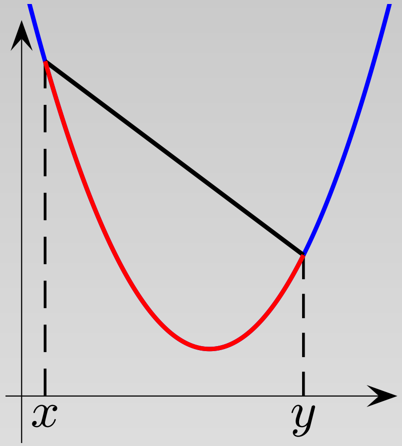


Più precisamente, data $f\colon]a,b[\to \mathbb{R}$

> f si dice convessa in $]a,b[$, se, comunque presi due punti del grafico di f, il segmento che li congiunge sta sopra il grafico

Funzioni convesse e concave

Si può dire che una funzione è convessa se il grafico si flette verso l'alto, assumendo una forma del tipo



Più precisamente, data $f\colon]a, b[\to \mathbb{R}$

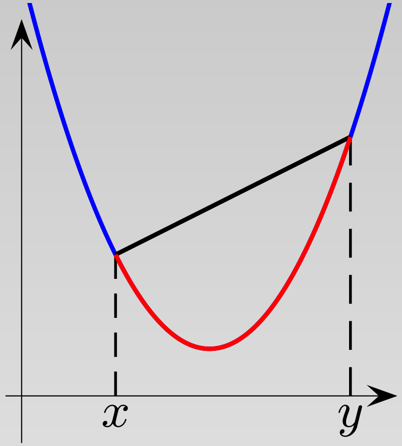
f si dice convessa in $]a, b[$, se, comunque presi due punti del grafico di f, il segmento che li congiunge sta sopra il grafico, cioè se

$$f\big(\lambda x + (1-\lambda)y\big) \leq \lambda f(x) + (1-\lambda) f(y)$$

per ogni $x, y \in]a, b[$ e per ogni $\lambda \in [0, 1]$

Funzioni convesse e concave

Si può dire che una funzione è convessa se il grafico si flette verso l'alto, assumendo una forma del tipo



Più precisamente, data $f\colon]a,b[\to \mathbb{R}$

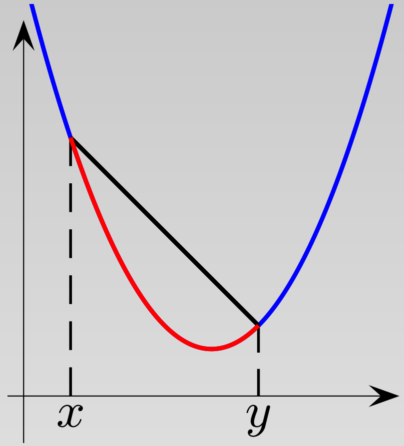
f si dice convessa in $]a,b[$, se, comunque presi due punti del grafico di f, il segmento che li congiunge sta sopra il grafico, cioè se

$$f\big(\lambda x + (1-\lambda)y\big) \leq \lambda f(x) + (1-\lambda) f(y)$$

per ogni $x, y \in]a,b[$ e per ogni $\lambda \in [0,1]$

Funzioni convesse e concave

Si può dire che una funzione è convessa se il grafico si flette verso l'alto, assumendo una forma del tipo



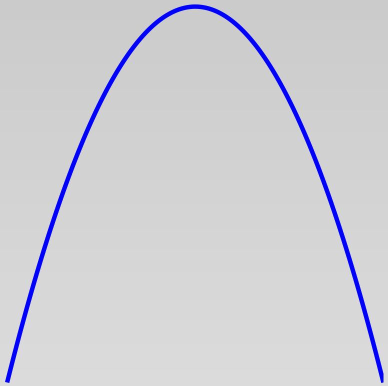
Più precisamente, data $f\colon]a,b[\to \mathbb{R}$

f si dice convessa in $]a,b[$, se, comunque presi due punti del grafico di f, il segmento che li congiunge sta sopra il grafico, cioè se

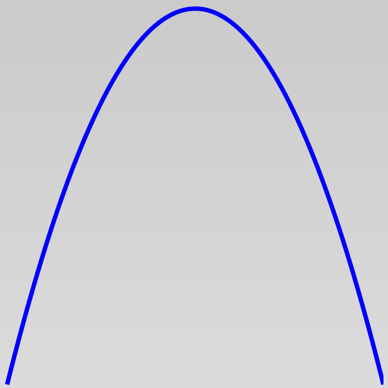
$$f\big(\lambda x + (1-\lambda)y\big) \le \lambda f(x) + (1-\lambda) f(y)$$

per ogni $x, y \in]a,b[$ e per ogni $\lambda \in [0,1]$

Analogamente, una funzione è concava se il grafico si flette verso il basso, assumendo una forma del tipo

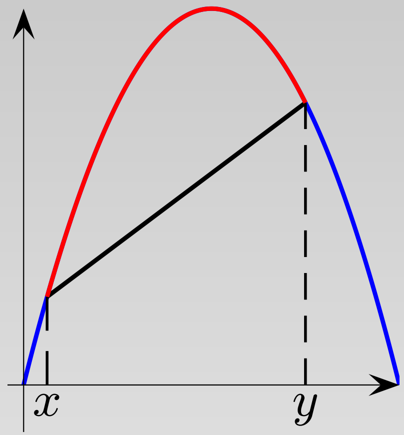


Analogamente, una funzione è concava se il grafico si flette verso il basso, assumendo una forma del tipo



Più precisamente, data $f\colon]a,b[\to \mathbb{R}$

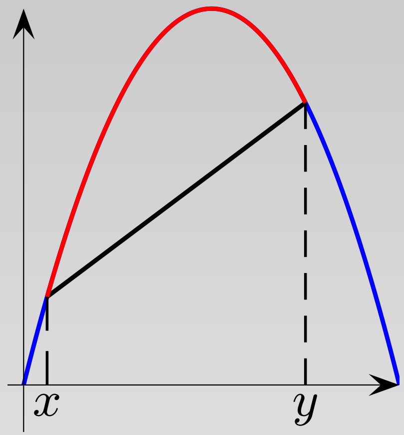
Analogamente, una funzione è concava se il grafico si flette verso il basso, assumendo una forma del tipo



Più precisamente, data $f\colon]a,b[\to \mathbb{R}$

> f si dice **concava in $]a,b[$**, se, comunque presi due punti del grafico di f, il segmento che li congiunge sta sotto il grafico

Analogamente, una funzione è concava se il grafico si flette verso il basso, assumendo una forma del tipo



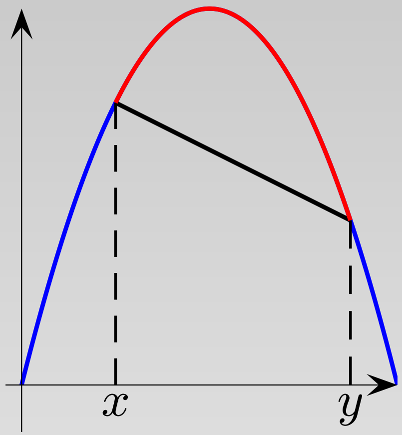
Più precisamente, data $f\colon]a,b[\to \mathbb{R}$

f si dice concava in $]a,b[$, se, comunque presi due punti del grafico di f, il segmento che li congiunge sta sotto il grafico, cioè se

$$f\big(\lambda x+(1-\lambda)y\big)\geq \lambda f(x)+(1-\lambda)f(y)$$

per ogni $x,y\in]a,b[$ e per ogni $\lambda\in[0,1]$

Analogamente, una funzione è concava se il grafico si flette verso il basso, assumendo una forma del tipo



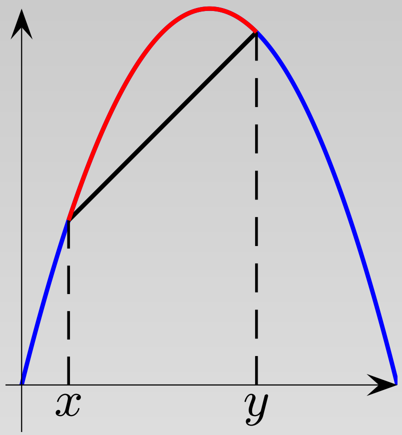
Più precisamente, data $f\colon]a,b[\to \mathbb{R}$

f si dice concava in $]a,b[$, se, comunque presi due punti del grafico di f, il segmento che li congiunge sta sotto il grafico, cioè se

$$f\big(\lambda x + (1-\lambda)y\big) \geq \lambda f(x) + (1-\lambda) f(y)$$

per ogni $x, y \in]a,b[$ e per ogni $\lambda \in [0,1]$

Analogamente, una funzione è concava se il grafico si flette verso il basso, assumendo una forma del tipo



Più precisamente, data $f\colon]a,b[\to \mathbb{R}$

f si dice concava in $]a,b[$, se, comunque presi due punti del grafico di f, il segmento che li congiunge sta sotto il grafico, cioè se

$$f\big(\lambda x + (1-\lambda)y\big) \geq \lambda f(x) + (1-\lambda) f(y)$$

per ogni $x, y \in]a,b[$ e per ogni $\lambda \in [0,1]$

Convessità e derivata seconda

Il seguente teorema caratterizza la convessità di una funzione derivabile due volte:

Convessità e derivata seconda

Il seguente teorema caratterizza la convessità di una funzione derivabile due volte:

Teorema. Sia $f :]a, b[\to \mathbb{R}$ una funzione derivabile due volte in $]a, b[$. Allora

$$f''(x) \geq 0 \quad \forall\, x \in]a, b[\implies \quad f \text{ è convessa in }]a, b[$$

$$f''(x) \leq 0 \quad \forall\, x \in]a, b[\implies \quad f \text{ è concava in }]a, b[$$

Problemi di massimo e minimo

Punti di massimo e minimo

Sia $f : A \to \mathbb{R}$, $x_0 \in A$

Punti di massimo e minimo

Sia $f : A \to \mathbb{R}$, $x_0 \in A$

$x_0 \in A$ si dice punto di massimo di f se

$$f(x_0) \geq f(x) \quad \text{per ogni } x \in A$$

cioè se $f(x_0)$ è il più grande valore che f assume

Punti di massimo e minimo

Sia $f : A \to \mathbb{R}$, $x_0 \in A$

$x_0 \in A$ si dice **punto di massimo di f** se

$$f(x_0) \geq f(x) \quad \text{per ogni } x \in A$$

cioè se $f(x_0)$ è il più grande valore che f assume

$x_0 \in A$ si dice **punto di minimo di f** se

$$f(x_0) \leq f(x) \quad \text{per ogni } x \in A$$

cioè se $f(x_0)$ è il più piccolo valore che f assume

Massimo e minimo

I valori assunti nei punti di massimo e minimo sono rispettivamente il massimo e minimo di f

Massimo e minimo

I valori assunti nei punti di massimo e minimo sono rispettivamente il massimo e minimo di f

$$x_0 \text{ punto di massimo} \implies f(x_0) = \max_{x \in A} f(x)$$

Massimo e minimo

I valori assunti nei punti di massimo e minimo sono rispettivamente il massimo e minimo di f

$$x_0 \text{ punto di massimo} \Longrightarrow f(x_0) = \max_{x \in A} f(x)$$

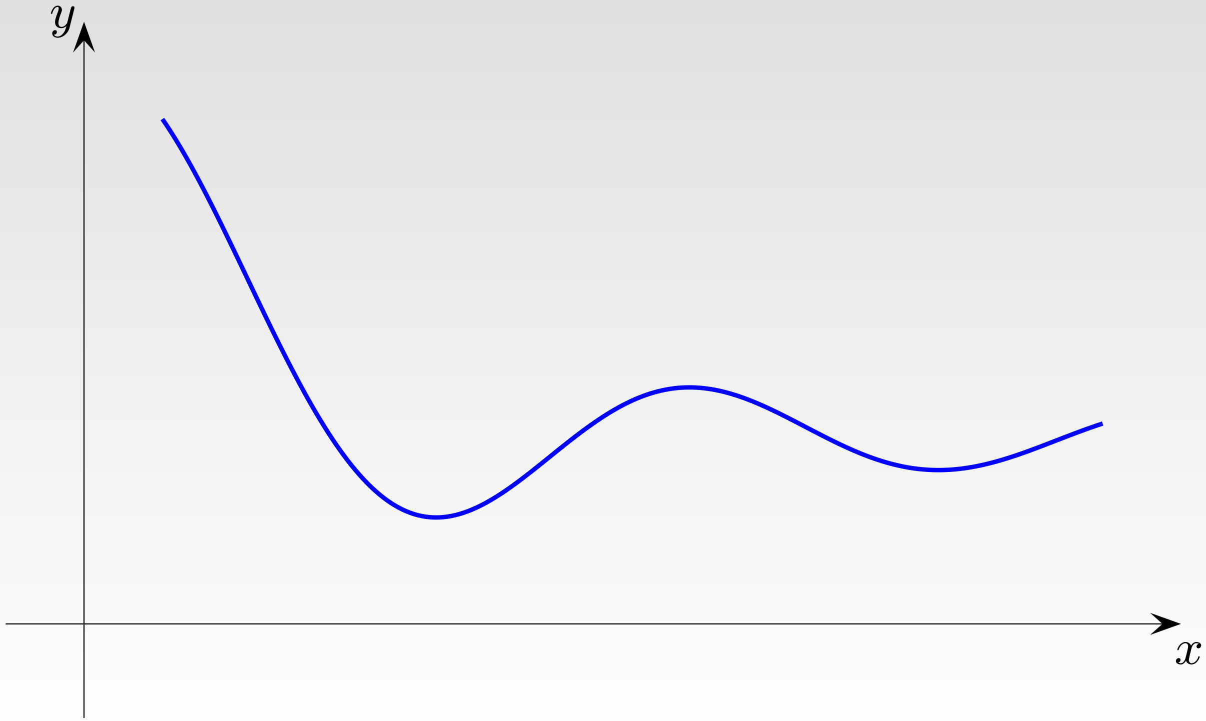
$$x_1 \text{ punto di minimo} \Longrightarrow f(x_1) = \min_{x \in A} f(x)$$

Massimo e minimo

I valori assunti nei punti di massimo e minimo sono rispettivamente il massimo e minimo di f

$$x_0 \text{ punto di massimo} \Longrightarrow f(x_0) = \max_{x \in A} f(x)$$

$$x_1 \text{ punto di minimo} \Longrightarrow f(x_1) = \min_{x \in A} f(x)$$

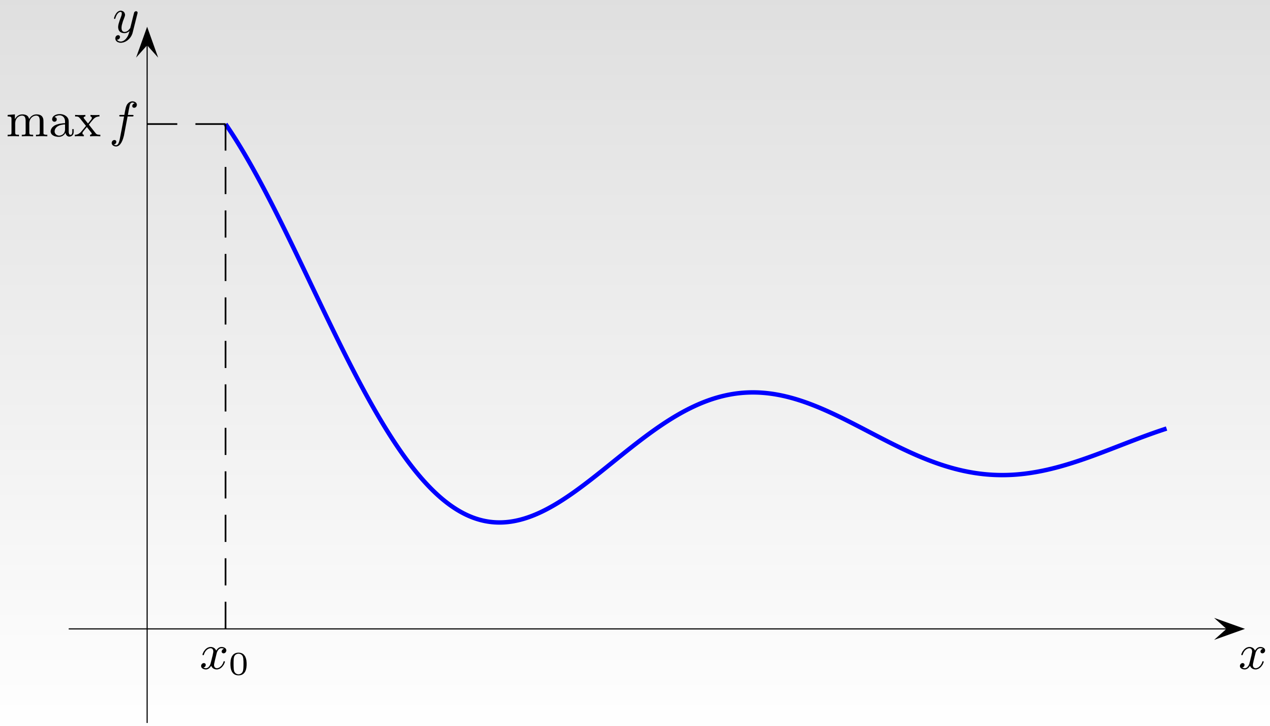


Massimo e minimo

I valori assunti nei punti di massimo e minimo sono rispettivamente il massimo e minimo di f

$$x_0 \text{ punto di massimo} \Longrightarrow f(x_0) = \max_{x \in A} f(x)$$

$$x_1 \text{ punto di minimo} \Longrightarrow f(x_1) = \min_{x \in A} f(x)$$

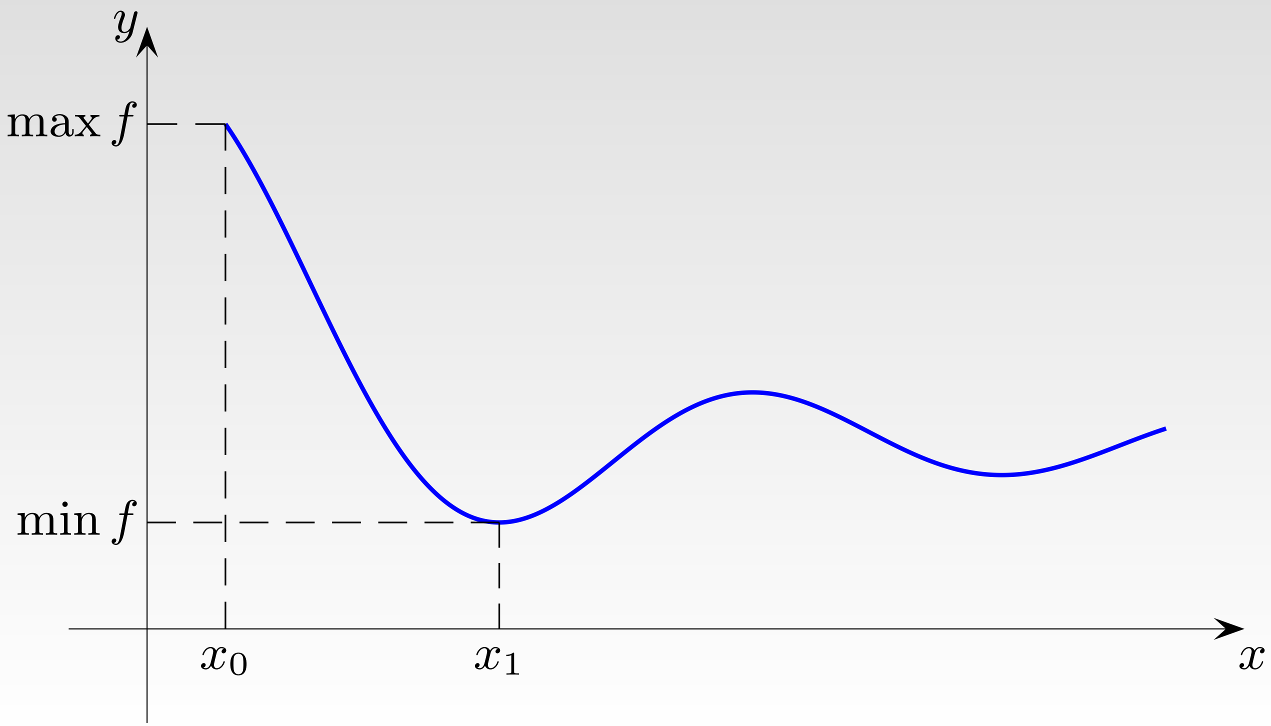


Massimo e minimo

I valori assunti nei punti di massimo e minimo sono rispettivamente il massimo e minimo di f

$$x_0 \text{ punto di massimo} \implies f(x_0) = \max_{x \in A} f(x)$$

$$x_1 \text{ punto di minimo} \implies f(x_1) = \min_{x \in A} f(x)$$



Teorema di Weierstrass

In generale massimo e minimo di una funzione non esistono

In generale massimo e minimo di una funzione non esistono, ma per le funzioni continue vale il seguente teorema:

Teorema di Weierstrass

In generale massimo e minimo di una funzione non esistono, ma per le funzioni continue vale il seguente teorema:

Teorema (di Weierstrass)
Se f è una funzione definita su un intervallo chiuso e limitato $[a, b]$ ed è ivi continua allora esistono il massimo e il minimo di f in $[a, b]$

Teorema di Weierstrass

In generale massimo e minimo di una funzione non esistono, ma per le funzioni continue vale il seguente teorema:

Teorema (di Weierstrass)
Se f è una funzione definita su un intervallo chiuso e limitato $[a, b]$ ed è ivi continua allora esistono il massimo e il minimo di f in $[a, b]$

Problema: Come trovare il massimo e il minimo di f (nel caso in cui esistono)?

Teorema di Weierstrass

In generale massimo e minimo di una funzione non esistono, ma per le funzioni continue vale il seguente teorema:

Teorema (di Weierstrass)
Se f è una funzione definita su un intervallo chiuso e limitato $[a, b]$ ed è ivi continua allora esistono il massimo e il minimo di f in $[a, b]$

Problema: Come trovare il massimo e il minimo di f (nel caso in cui esistono)?
E i punti di massimo e minimo?

Massimi e minimi relativi

Data $f : A \to \mathbb{R}$ diremo che $x_0 \in A$ è punto di massimo locale (o relativo) per f se $f(x_0)$ è il valore massimo di $f(x)$ per gli x “vicini” a x_0

Massimi e minimi relativi

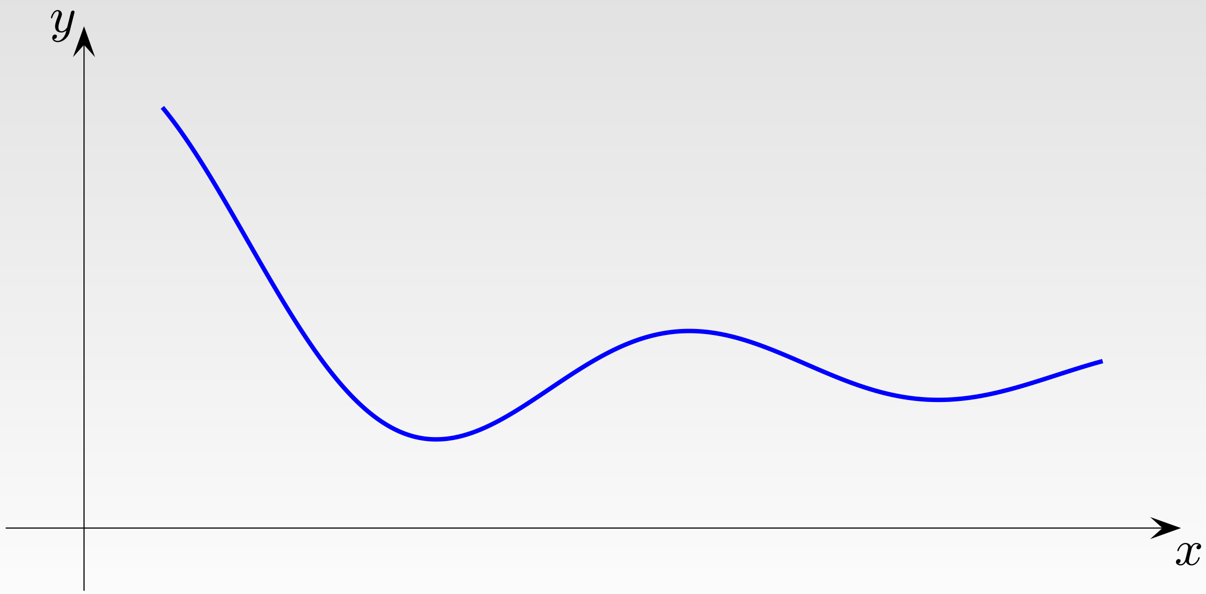
Data $f : A \to \mathbb{R}$ diremo che $x_0 \in A$ è punto di massimo locale (o relativo) per f se $f(x_0)$ è il valore massimo di $f(x)$ per gli x "vicini" a x_0

Diremo che $x_0 \in A$ è punto di minimo locale (o relativo) per f se $f(x_0)$ è il valore minimo di $f(x)$ per gli x "vicini" a x_0

Massimi e minimi relativi

Data $f : A \to \mathbb{R}$ diremo che $x_0 \in A$ è punto di massimo locale (o relativo) per f se $f(x_0)$ è il valore massimo di $f(x)$ per gli x "vicini" a x_0

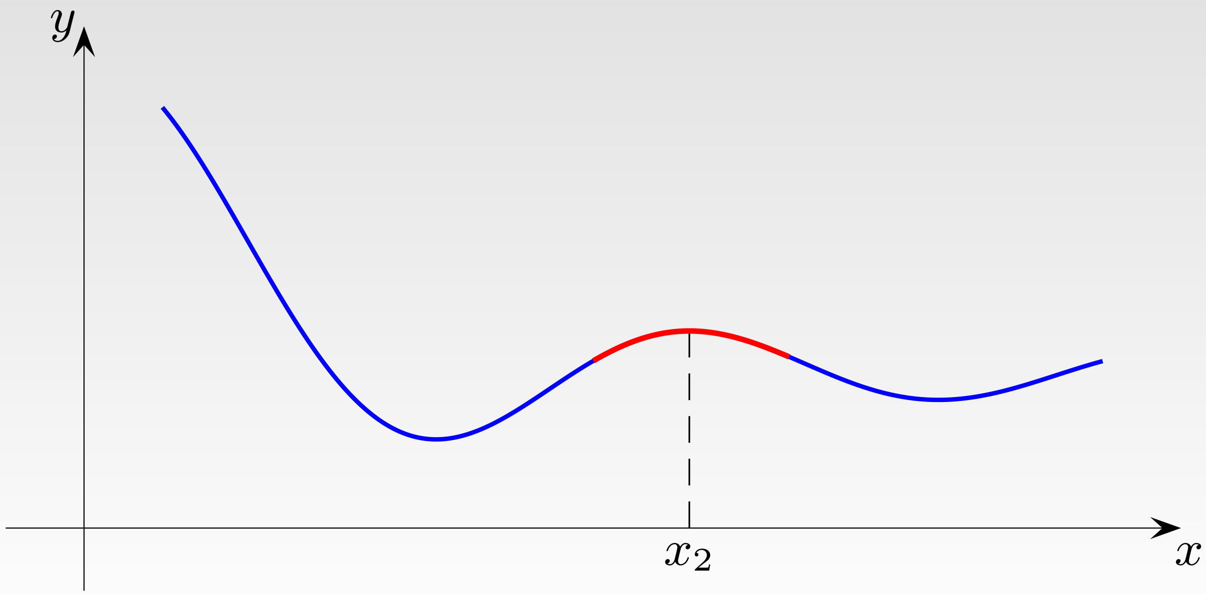
Diremo che $x_0 \in A$ è punto di minimo locale (o relativo) per f se $f(x_0)$ è il valore minimo di $f(x)$ per gli x "vicini" a x_0



Massimi e minimi relativi

Data $f : A \to \mathbb{R}$ diremo che $x_0 \in A$ è punto di massimo locale (o relativo) per f se $f(x_0)$ è il valore massimo di $f(x)$ per gli x “vicini” a x_0

Diremo che $x_0 \in A$ è punto di minimo locale (o relativo) per f se $f(x_0)$ è il valore minimo di $f(x)$ per gli x “vicini” a x_0

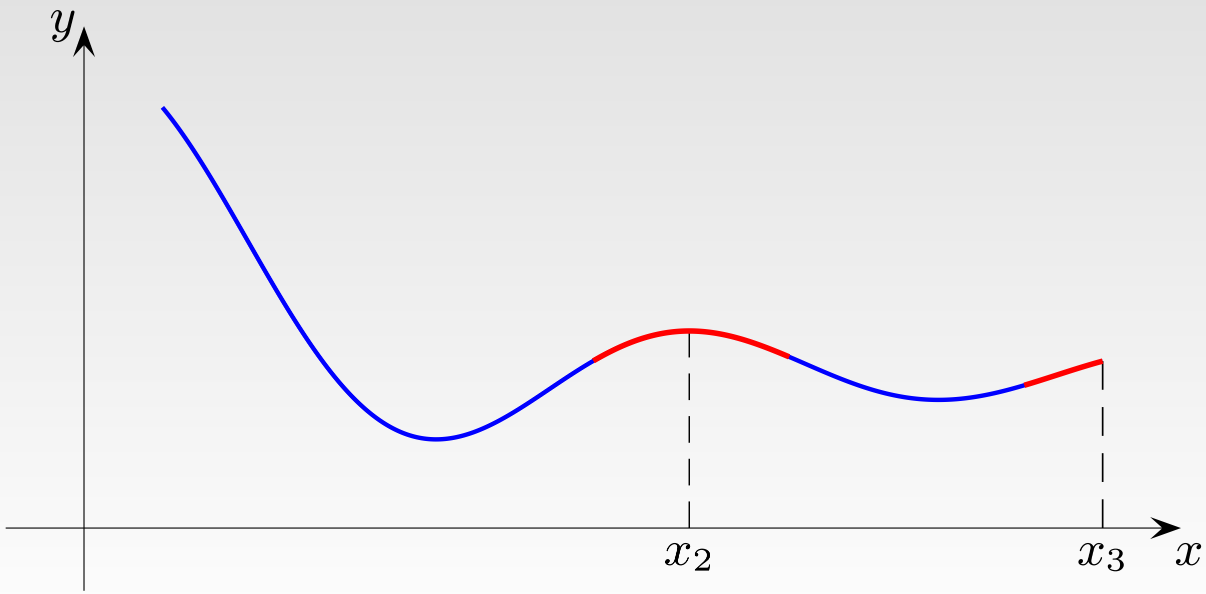


x_2 è punto di massimo relativo

Massimi e minimi relativi

Data $f : A \to \mathbb{R}$ diremo che $x_0 \in A$ è punto di massimo locale (o relativo) per f se $f(x_0)$ è il valore massimo di $f(x)$ per gli x "vicini" a x_0

Diremo che $x_0 \in A$ è punto di minimo locale (o relativo) per f se $f(x_0)$ è il valore minimo di $f(x)$ per gli x "vicini" a x_0

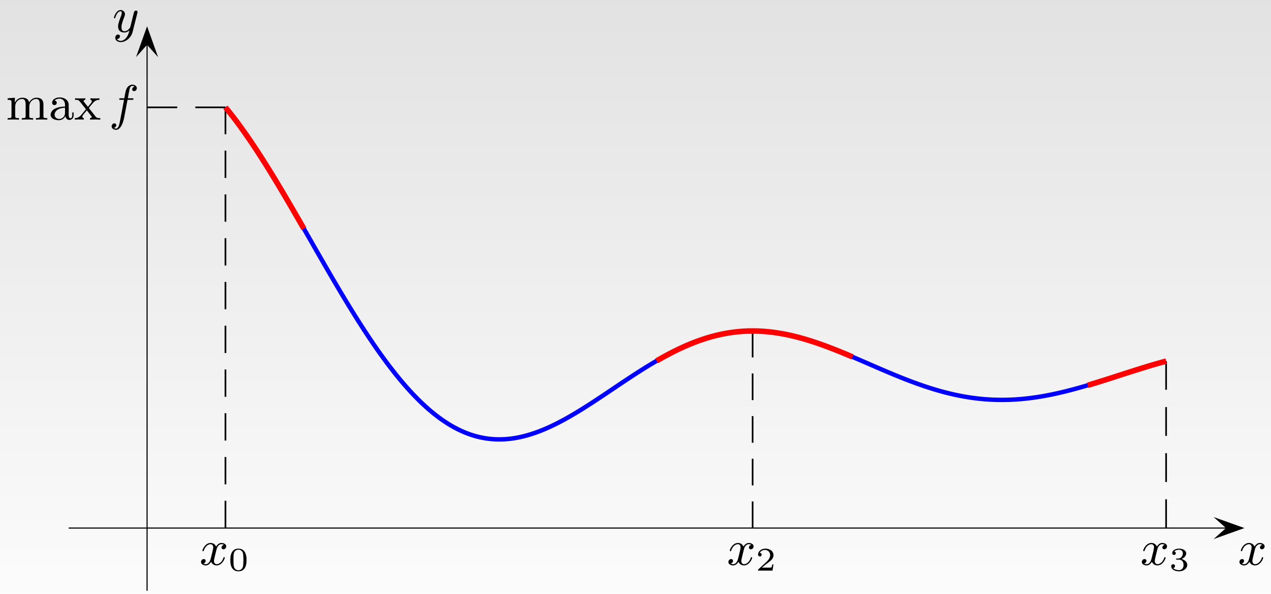


anche x_3 è punto di massimo relativo

Massimi e minimi relativi

Data $f : A \to \mathbb{R}$ diremo che $x_0 \in A$ è punto di massimo locale (o relativo) per f se $f(x_0)$ è il valore massimo di $f(x)$ per gli x “vicini” a x_0

Diremo che $x_0 \in A$ è punto di minimo locale (o relativo) per f se $f(x_0)$ è il valore minimo di $f(x)$ per gli x “vicini” a x_0

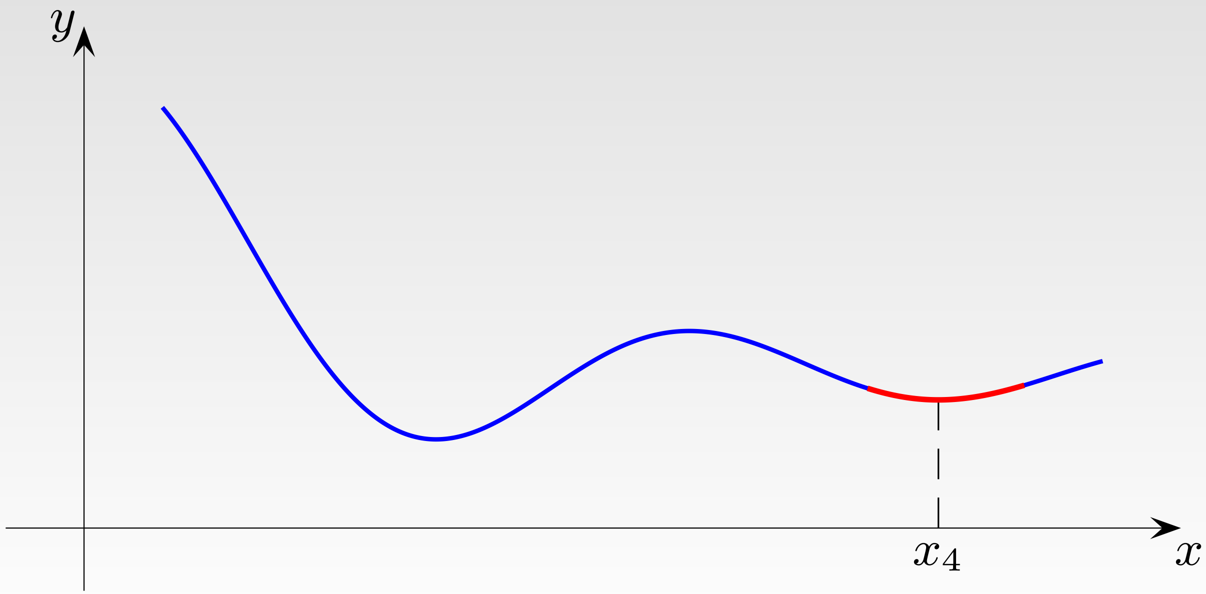


pure x_0 è punto di massimo relativo

Massimi e minimi relativi

Data $f : A \to \mathbb{R}$ diremo che $x_0 \in A$ è punto di massimo locale (o relativo) per f se $f(x_0)$ è il valore massimo di $f(x)$ per gli x “vicini” a x_0

Diremo che $x_0 \in A$ è punto di minimo locale (o relativo) per f se $f(x_0)$ è il valore minimo di $f(x)$ per gli x “vicini” a x_0

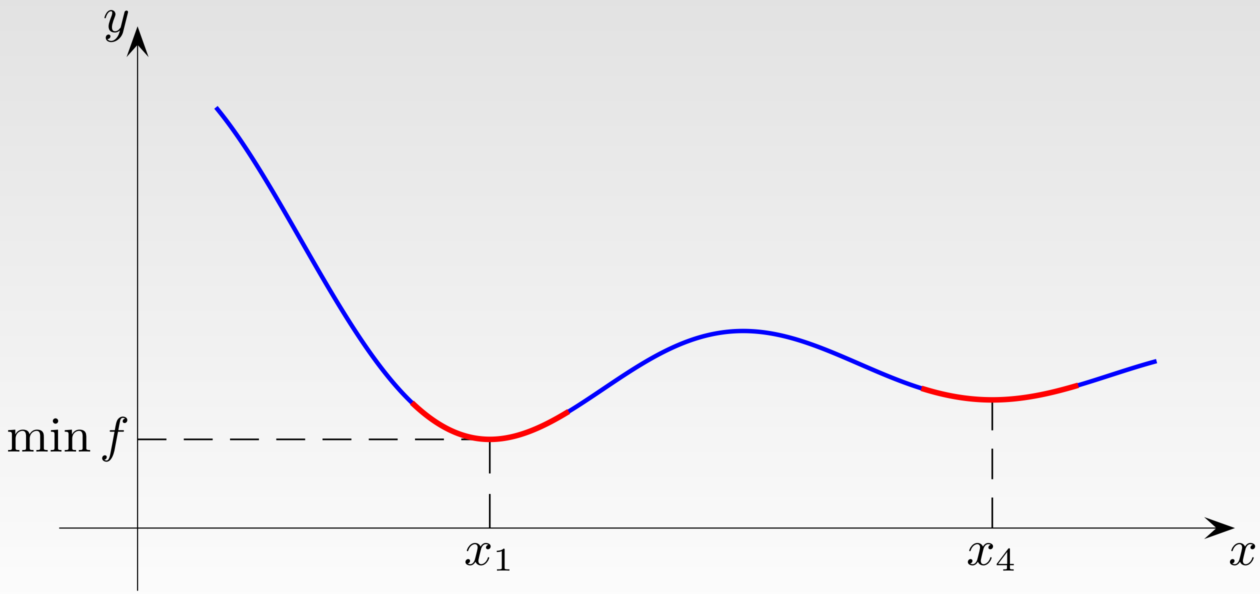


x_4 è punto di minimo relativo

Massimi e minimi relativi

Data $f : A \to \mathbb{R}$ diremo che $x_0 \in A$ è punto di massimo locale (o relativo) per f se $f(x_0)$ è il valore massimo di $f(x)$ per gli x "vicini" a x_0

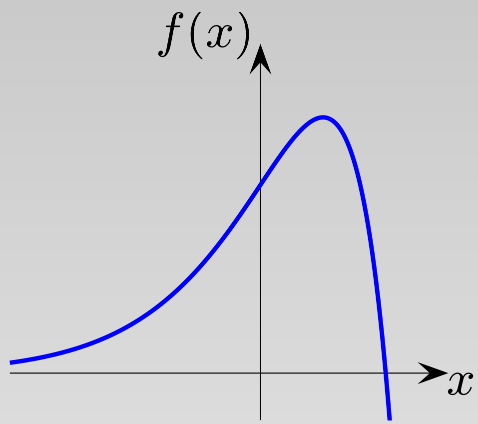
Diremo che $x_0 \in A$ è punto di minimo locale (o relativo) per f se $f(x_0)$ è il valore minimo di $f(x)$ per gli x "vicini" a x_0



pure x_1 è punto di minimo relativo

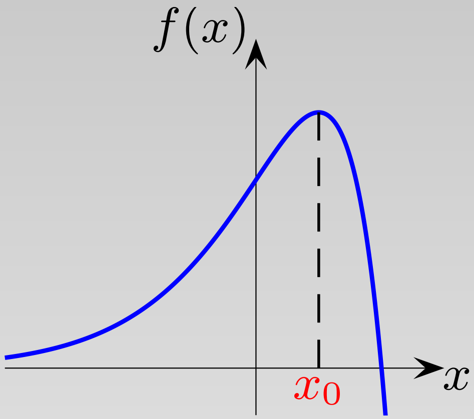
Punti critici o stazionari

Sia $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ derivabile.



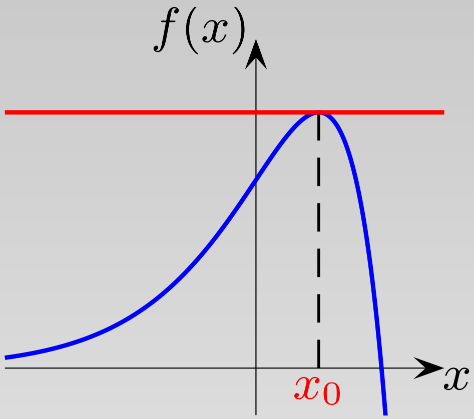
Punti critici o stazionari

Sia $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ derivabile.
Se x_0 è punto di massimo relativo *interno* ad $[a, b]$



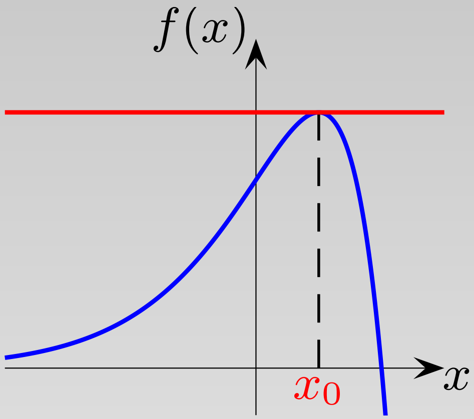
Punti critici o stazionari

Sia $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ derivabile. Se x_0 è punto di massimo relativo *interno* ad $[a, b]$, la relativa tangente è orizzontale



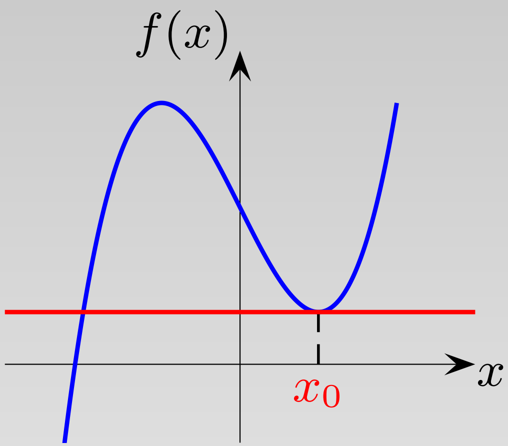
Punti critici o stazionari

Sia $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ derivabile.
Se x_0 è punto di massimo relativo *interno* ad $[a, b]$, la relativa tangente è orizzontale, quindi la derivata prima è nulla



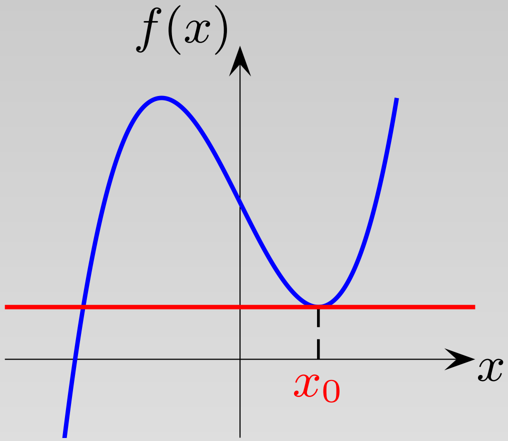
Punti critici o stazionari

Analogamente se x_0 è punto di minimo relativo *interno* ad $[a, b]$



Punti critici o stazionari

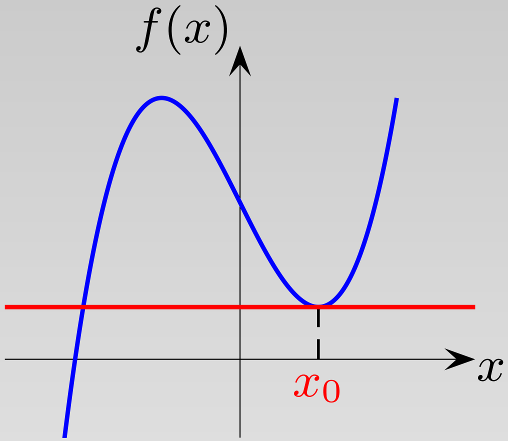
Analogamente se x_0 è punto di minimo relativo *interno* ad $[a,b]$



Teorema (dei punti critici).
Sia $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ e sia x_0 un punto di massimo o di minimo locale. Se $x_0 \in]a,b[$ e se f è derivabile in x_0 allora $f'(x_0)=0$

Punti critici o stazionari

Analogamente se x_0 è punto di minimo relativo *interno* ad $[a, b]$

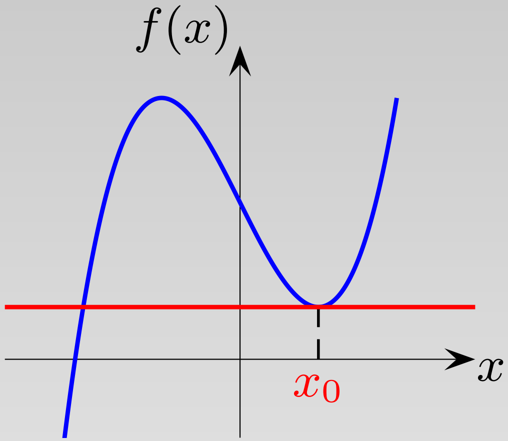


Teorema (dei punti critici).
Sia $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ e sia x_0 un punto di massimo o di minimo locale. Se $x_0 \in]a, b[$ e se f è derivabile in x_0 allora $f'(x_0) = 0$

Non vale il viceversa del teorema (ad esempio $f(x) = x^3$, con $x_0 = 0$)

Punti critici o stazionari

Analogamente se x_0 è punto di minimo relativo *interno* ad $[a, b]$



Teorema (dei punti critici).
Sia $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ e sia x_0 un punto di massimo o di minimo locale. Se $x_0 \in]a, b[$ e se f è derivabile in x_0 allora $f'(x_0) = 0$

I punti x_0 per cui $f'(x_0) = 0$ si dicono punti critici di f

Criterio della derivata seconda

Il seguente criterio permette di identificare i massimi e minimi relativi tra i punti critici, grazie alla derivata seconda:

Criterio della derivata seconda.
Sia $f\ :]a,b[\to\ \mathbb{R}$ derivabile due volte, e x_0 un punto critico di f, cioè $f'(x_0)=0$. Allora

$$\begin{cases} f'(x_0)=0 \\ f''(x_0)>0 \end{cases} \implies x_0 \text{ è pt. di minimo locale}$$

$$\begin{cases} f'(x_0)=0 \\ f''(x_0)<0 \end{cases} \implies x_0 \text{ è pt. di massimo locale}$$

Ricerca dei massimi e minimi

Sia $f : A \to \mathbb{R}$ una funzione che ammette massimo e minimo.

Ricerca dei massimi e minimi

Sia $f : A \to \mathbb{R}$ una funzione che ammette massimo e minimo. Allora i punti di massimo e minimo vanno ricercati tra:

Ricerca dei massimi e minimi

Sia $f : A \to \mathbb{R}$ una funzione che ammette massimo e minimo. Allora i punti di massimo e minimo vanno ricercati tra:

- gli eventuali punti in cui f non è derivabile

Ricerca dei massimi e minimi

Sia $f : A \to \mathbb{R}$ una funzione che ammette massimo e minimo. Allora i punti di massimo e minimo vanno ricercati tra:

- gli eventuali punti in cui f non è derivabile
- gli estremi di A

Ricerca dei massimi e minimi

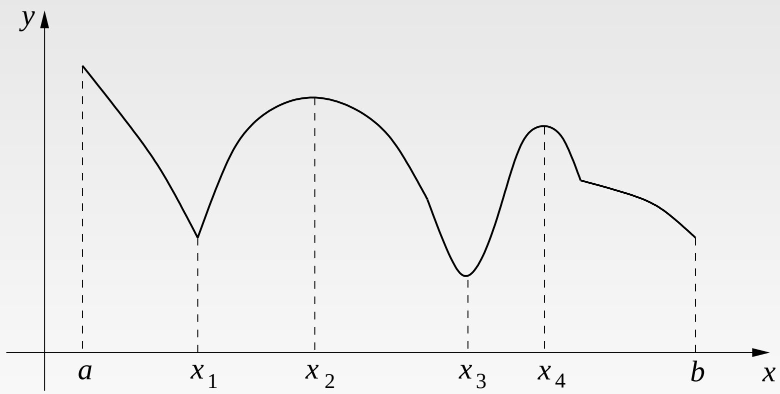
Sia $f : A \to \mathbb{R}$ una funzione che ammette massimo e minimo. Allora i punti di massimo e minimo vanno ricercati tra:

- gli eventuali punti in cui f non è derivabile
- gli estremi di A
- i punti critici di f

Ricerca dei massimi e minimi

Sia $f : A \to \mathbb{R}$ una funzione che ammette massimo e minimo. Allora i punti di massimo e minimo vanno ricercati tra:

- gli eventuali punti in cui f non è derivabile
- gli estremi di A
- i punti critici di f



a	pt. di massimo
x_1	pt. di min. relativo (senza tangente)
x_2, x_4	pt. di max. relativo con tangente orizzontale
x_3	pt. di minimo con tangente orizzontale
b	pt. di min. relativo

Studio di funzioni

Schema

- **determinare il dominio** $\mathcal{D}$ della funzione f

Schema

- **determinare il dominio** $\mathcal{D}$ della funzione f
- **studio della continuità** della funzione in $\mathcal{D}$

Schema

- **determinare il dominio** $\mathcal{D}$ della funzione f
- **studio della continuità** della funzione in $\mathcal{D}$
- **studio del segno di** f, in particolare dove f interseca l'asse delle ascisse

Schema

- **determinare il dominio** $\mathcal{D}$ della funzione f
- **studio della continuità** della funzione in $\mathcal{D}$
- **studio del segno di** f, in particolare dove f interseca l'asse delle ascisse
- **studio dei limiti della funzione** agli estremi di $\mathcal{D}$ e negli eventuali punti di discontinuità

Schema

- **determinare il dominio** $\mathcal{D}$ della funzione f
- **studio della continuità** della funzione in $\mathcal{D}$
- **studio del segno di** f, in particolare dove f interseca l'asse delle ascisse
- **studio dei limiti della funzione** agli estremi di $\mathcal{D}$ e negli eventuali punti di discontinuità
- **studio della derivata**; per determinare gli intervalli di crescenza/decrescenza di f ed eventuali punti di massimo/minimo relativo

Schema

- **determinare il dominio** $\mathcal{D}$ della funzione f
- **studio della continuità** della funzione in $\mathcal{D}$
- **studio del segno di** f, in particolare dove f interseca l'asse delle ascisse
- **studio dei limiti della funzione** agli estremi di $\mathcal{D}$ e negli eventuali punti di discontinuità
- **studio della derivata**; per determinare gli intervalli di crescenza/decrescenza di f ed eventuali punti di massimo/minimo relativo
- **studio della derivata seconda**; per deter. gli intervalli di convessità/concavità

Schema

- **determinare il dominio** $\mathcal{D}$ della funzione f
- **studio della continuità** della funzione in $\mathcal{D}$
- **studio del segno di** f, in particolare dove f interseca l'asse delle ascisse
- **studio dei limiti della funzione** agli estremi di $\mathcal{D}$ e negli eventuali punti di discontinuità
- **studio della derivata**; per determinare gli intervalli di crescenza/decrescenza di f ed eventuali punti di massimo/minimo relativo
- **studio della derivata seconda**; per deter. gli intervalli di convessità/concavità
- **disegno di un grafico qualitativo** che raccolga e sintetizzi gli elementi determinati