Università degli Studi di Udine Anno Accademico 2010/2011

Facoltà di Scienze Matematiche, Fisiche e Naturali
Corso di Laurea in Matematica

Programma del Corso di Equazioni Differenziali

Docente: Paolo Baiti

Definizioni di base ed alcuni richiami. Definizione di equazione/sistema di equazioni differenziali ordinarie (EDO); soluzione di un'equazione/sistema, traiettoria ed orbita di una soluzione. Equazioni e sistemi in forma normale. Sistemi autonomi. Riduzione di un'equazione in forma normale di ordine n ad un sistema di n equazioni di ordine 1. Il problema di Cauchy. Richiami sul teorema di Cauchy-Lipschitz di esistenza ed unicità locale. Esempi di approssimazione con le iterate di Picard.

Il teorema di esistenza locale di Peano. Richiami sugli spazi metrici e compattezza in spazi metrici. Spazi topologici separabili. Gli spazi metrici compatti sono separabili. Insiemi compatti e relativamente compatti in $C(E, R)$; insiemi equicontinui ed equiuniformemente continui. Il teorema di Ascoli-Arzelà. Introduzione al metodo delle poligonali di Eulero. Il teorema di Peano: dimostrazione dell'esistenza di una soluzione tramite approssimazione con le poligonali di Eulero. Cenni di altre dimostrazioni.

Analisi qualitativa delle soluzioni. Questioni legate all'unicità delle soluzioni: l'unicità locale implica l'unicità globale. Conseguenze dell'unicità sulle traiettorie e sulle orbite delle soluzioni. Il fenomeno di Peano, integrale superiore ed inferiore (cenni). Prolungabilità delle soluzioni. Soluzioni massimali e intervallo massimale d'esistenza. L'intervallo massimale d'esistenza è aperto. Teorema di esistenza delle soluzioni massimali nel caso in cui il campo vettoriale è localmente lipschitziano oppure continuo. Il grafico di una soluzione massimale è chiuso nella topologia indotta. Fuga dai compatti. Esplosione delle soluzioni in tempo finito. Alcune conseguenze del teorema della fuga dai compatti: compattezza e limitatezza implicano l'esistenza in grande. Il metodo delle funzioni ausiliarie; la sublinearità implica l'esistenza in grande delle soluzioni; la lipschitzianità globale implica l'esistenza in grande delle soluzioni. I sistemi lineari a coefficienti continui hanno esistenza ed unicità in grande delle soluzioni. Esistenza ed unicità per equazioni scalari di ordine n. Il teorema del confronto (due versioni). Il teorema di dipendenza continua delle soluzioni dai dati iniziali e dal campo vettoriale (solo enunciato). Il criterio dell'asintoto ed alcune sue conseguenze. Sistemi autonomi ed integrali primi. Sistemi conservativi. Sistemi fisici conservativi; caso dell'energia. Applicazione degli strumenti introdotti allo studio qualitativo delle soluzioni di un sistema di equazioni differenziali. Il pendolo non lineare: analisi qualitativa delle soluzioni.

Alcune classi di equazioni risolubili analiticamente. Equazioni a variabili separabili. Equazioni omogenee e loro varianti. Formula risolutiva per le equazioni lineari del primo ordine a coefficienti continui. L'equazione di Bernoulli. L'equazione di Malthus e l'equazione logistica di Verhulst; risoluzione ed analisi dei modelli. La 1-forma associata ad un sistema autonomo di equazioni nel piano e suo utilizzo per trovare un integrale primo del sistema. Analisi del modello nonlineare preda-predatore di Lotka-Volterra. Equazioni autonome del secondo ordine del tipo $y'' = f(y, y')$. Equazioni non in forma normale del tipo $y = g(y')$ oppure $t = g(y')$; applicazione al problema della brachistocrona.

Sistemi ed equazioni lineari. Sistemi lineari. Sistema omogeneo associato. La soluzione generale di un sistema lineare è somma della generica soluzione del sistema omogeneo e di una qualsiasi soluzione fissata del sistema. L'insieme delle soluzioni di un sistema omogeneo è uno spazio vettoriale di dimensione n. Matrice soluzione e matrice fondamentale (risolvente). Teorema di Lagrange e formula di variazione delle costanti. Sistemi lineari a coefficienti costanti. Esponenziale di una matrice: definizione e proprietà. Soluzione del problema di Cauchy associato ad un sistema lineare omogeneo a coefficienti costanti. Calcolo esplicito dell'esponenziale di una matrice in alcuni casi particolari: matrice multipla dell'identità, matrice di rotazione 2×2, matrice diagonalizzabile reale. Decomposizione di una matrice nella somma di una matrice diagonalizzabile e di una nilpotente (senza dim) con applicazioni al calcolo della matrice esponenziale. Forma canonica di Jordan (senza dim): caso delle matrici 2×2 e 3×3, cenni al caso generale; applicazione ai sistemi lineari. Applicazione della teoria svolta alle equazioni differenziali ordinarie di ordine n a coefficienti costanti.

Il metodo delle caratteristiche (cenni). Derivazione del sistema delle caratteristiche associato ad un'equazione alle derivate parziali non linerare del primo ordine. Esempi.