

Il teorema di Peano

Considerato il problema di Cauchy

$$(1) \quad \begin{cases} y' = f(t, y) \\ y(t_0) = y_0, \end{cases}$$

se il campo vettoriale f è solamente continuo e non localmente lipschitziano nella seconda variabile, la successione delle iterate di Picard $(y_k)_{k \in \mathbb{N}}$ definite da

$$(2) \quad \begin{cases} y_0(t) \equiv y_0 \\ y_{k+1}(t) = y_0 + \int_{t_0}^t f(s, y_k(s)) ds =: Ty_k(t) \end{cases}$$

non è in generale una successione di Cauchy in $C(I_\delta, \mathbb{R}^n)$, come pure l'operatore T non definisce necessariamente una contrazione in un opportuno sottoinsieme di $C(I_\delta, \mathbb{R}^n)$ e il teorema delle contrazioni non è applicabile.

È inoltre noto che la locale lipschitzianità è solamente una condizione sufficiente per l'esistenza e l'unicità locale della soluzione; ad esempio, il problema di Cauchy unidimensionale

$$\begin{cases} y' = 1 + 2\sqrt{|y|} \\ y(0) = 0, \end{cases}$$

ammette una ed una sola soluzione locale (ciò appare chiaro utilizzando il metodo di separazione delle variabili), pur essendo $f(t, y) = 1 + 2\sqrt{|y|}$ non localmente lipschitziana in alcun intorno di $(t_0, 0)$, mentre il problema

$$\begin{cases} y' = 2\sqrt{|y|} \\ y(0) = 0, \end{cases}$$

ammette infinite soluzioni: oltre alla soluzione identicamente nulla, si verifica facilmente che, al variare di $c, d \geq 0$, le funzioni

$$y_{c,d}(t) := \begin{cases} -(t+d)^2 & \text{se } t < -d \\ 0 & \text{se } -d \leq t \leq c \\ (t-c)^2 & \text{se } t > c, \end{cases}$$

sono ancora soluzioni del problema di Cauchy in oggetto.

In generale, se il campo vettoriale è solamente continuo, non ci si aspetta di avere l'unicità locale ma continua invece a sussistere l'esistenza locale, come si vedrà dal teorema di Peano.

Non potendo contare sulle iterate di Picard, l'idea è quella di trovare delle opportune soluzioni approssimate e provare che convergono ad una soluzione del problema di Cauchy in considerazione. A tal fine esistono diverse strategie, una delle più semplici è fornita dal *metodo delle poligoni di Eulero* che essenzialmente consiste nell'approssimare le curve integrali del campo vettoriale f con delle funzioni affini a tratti (poligoni) ottenute incollando pezzi di rette tangenti ad opportune curve integrali.

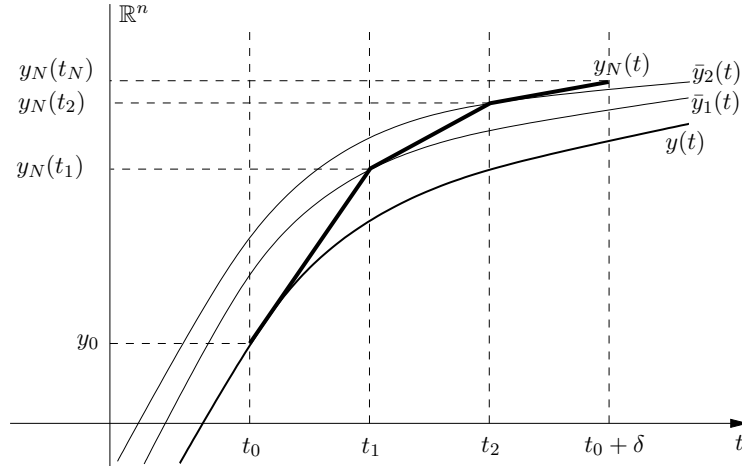
Più precisamente, fissato un intervallo destro $[t_0, t_0 + \delta]$ di t_0 (su un intervallo sinistro $[t_0 - \delta, t_0]$ si può fare una costruzione analoga), lo dividiamo in N intervalli di uguale ampiezza $\Delta t = \delta/N$. Posto $t_k = t_0 + k\Delta t$ per $k = 0, \dots, N-1$ (si osservi che anche $t_k = t_k(N)$ dipende da N), definiamo la soluzione approssimata $y_N(t)$ in maniera induttiva nel seguente modo

$$(3) \quad \begin{cases} y_N(t_0) = y_0 \\ y_N(t) = y_N(t_k) + (t - t_k)f(t_k, y_N(t_k)) & \text{se } t \in [t_k, t_{k+1}], \end{cases}$$

con $k = 0, \dots, N-1$. Si verifica facilmente che se $t \in [t_k, t_{k+1}]$ la soluzione approssimata può essere espressa nella forma

$$(4) \quad \begin{aligned} y_N(t) &= y_0 + \sum_{i=0}^{k-1} (t_{i+1} - t_i)f(t_i, y_N(t_i)) + (t - t_k)f(t_k, y_N(t_k)) \\ &= y_0 + \sum_{i=0}^{k-1} f(t_i, y_N(t_i))\Delta t + (t - t_k)f(t_k, y_N(t_k)). \end{aligned}$$

In maniera analoga si può definire $y_N(t)$ anche in $[t_0 - \delta, t_0]$, dunque in I_δ .



L'idea della costruzione è la seguente: si divide l'intervallo $[t_0, t_0 + \delta]$ in N sottointervalli $[t_k, t_{k+1}]$, $k = 0, \dots, N - 1$ di uguale ampiezza. Su $[t_0, t_1]$ si approssima la soluzione $y(t)$, pensata come curva integrale $(t, y(t))$ del campo vettoriale $(1, f(t, y))$ in Ω , con la retta $(t, y_N(t))$ passante per (t_0, y_0) ed avente direzione $(1, f(t_0, y_0))$ (nel caso $n = 1$ equivale a prendere la retta passante per (t_0, y_0) e di coefficiente angolare $f(t_0, y_0)$). Si definisce così la soluzione approssimata $y_N(t)$ in $[t_0, t_1]$. Al tempo t_1 tale funzione assumerà il valore $y_N(t_1)$ e il punto $(t_1, y_N(t_1))$ in generale non apparterrà alla curva integrale passante per (t_0, y_0) . Supponendo che il grafico di y_N rimanga sempre all'interno di Ω , consideriamo allora la curva integrale passante per quest'ultimo punto $(t_1, y_N(t_1))$ (rappresentata in figura da $(t, \bar{y}_1(t))$) e ripetiamo il procedimento nell'intervallo $[t_1, t_2]$ approssimando $(t, y(t))$ con la retta passante per $(t_1, y_N(t_1))$ e direzione $(1, f(t_1, y_N(t_1)))$. Si procede in maniera induttiva fino al tempo $t_N = t_0 + \delta$ definendo infine la funzione y_N su tutto $[t_0, t_0 + \delta]$.

Vogliamo valutare l'errore che si commette approssimando la soluzione y mediante la funzione affine a tratti y_N . Supponiamo inizialmente che f sia localmente lipschitziana di costante L quindi, localmente in un intervallo I_δ , la soluzione $y = y(t)$ di (1) esiste ed è unica. Nell'ipotesi aggiuntiva che y sia di classe C^2 verifichiamo che effettivamente $y_N \rightarrow y$ se $N \rightarrow +\infty$ (ovvero se $\Delta t \rightarrow 0$). Sotto tali ipotesi di regolarità per la soluzione possiamo considerare l'espansione di Taylor di $y(t)$ in ciascun intervallo $[t_k, t_{k+1}]$ con punto iniziale t_k per cui

$$\begin{aligned} y(t) &= y(t_k) + (t - t_k)y'(t_k) + O((t - t_k)^2) \\ &= y(t_k) + (t - t_k)f(t_k, y(t_k)) + O((t - t_k)^2) \end{aligned}$$

dove $O((t - t_k)^2)$ è una funzione la cui norma è uniformemente maggiorata da $C(t - t_k)^2$ con C costante positiva (essenzialmente C dipende dal massimo della norma della derivata seconda di $y(t)$ in $[t_0, t_0 + \delta]$). Per $t \in [t_k, t_{k+1}]$ si ottiene quindi

$$\begin{aligned} y(t) - y_N(t) &= (y(t_k) - y_N(t_k)) + (t - t_k)[f(t_k, y(t_k)) - f(t_k, y_N(t_k))] + O((t - t_k)^2). \end{aligned}$$

Posto $\delta_k = \|y(t_k) - y_N(t_k)\|$, grazie alla lipschitzianità di f e notando che $\delta_0 = 0$, per $t \in [t_k, t_{k+1}]$ si ha dunque

$$\begin{aligned} \|y(t) - y_N(t)\| &\leq \|y(t_k) - y_N(t_k)\| + \\ &\quad + (t - t_k)\|f(t_k, y(t_k)) - f(t_k, y_N(t_k))\| + C(t - t_k)^2 \\ &\leq \delta_k + \Delta t L \|y(t_k) - y_N(t_k)\| + C(\Delta t)^2 = (1 + L\Delta t)\delta_k + C(\Delta t)^2 \\ &\leq (1 + L\Delta t)((1 + L\Delta t)\delta_{k-1} + C(\Delta t)^2) + C(\Delta t)^2 \\ &= (1 + L\Delta t)^2\delta_{k-1} + (1 + (1 + L\Delta t))C(\Delta t)^2 \leq \dots \leq \\ &\leq (1 + L\Delta t)^{k+1}\delta_0 + [1 + (1 + L\Delta t) + \dots + (1 + L\Delta t)^k]C(\Delta t)^2 \\ &= \frac{(1 + L\Delta t)^{k+1} - 1}{(1 + L\Delta t) - 1} C(\Delta t)^2 = \frac{C}{L} ((1 + L\Delta t)^{k+1} - 1)\Delta t \\ &\leq \frac{C}{L} ((1 + L\Delta t)^N - 1)\Delta t. \end{aligned}$$

Passando all'estremo superiore prima sui $t \in [t_k, t_{k+1}]$, poi su $k = 0, \dots, N - 1$ e ricordando che $\Delta t = \delta/N$, si ottiene infine

$$\|y - y_N\|_\infty \leq \frac{C}{L} ((1 + L\Delta t)^N - 1)\Delta t = \frac{C}{L} \left(\left(1 + \frac{L\delta}{N}\right)^N - 1 \right) \Delta t < \frac{C}{L} (e^{L\delta} - 1) \frac{\delta}{N}$$

per cui $y_N \rightarrow y$ uniformemente in $[t_0, t_0 + \delta]$ per $N \rightarrow +\infty$.

Abbiamo dunque dimostrato che se esiste un'unica soluzione di classe C^2 , allora le poligonali di Eulero convergono uniformemente alla soluzione stessa in $[t_0, t_0 + \delta]$ (osserviamo che per garantire che la soluzione sia di classe C^2 basta ad esempio assumere che f sia di classe C^1). La speranza è che ciò accada anche in ipotesi di minore regolarità per f .

Esercizio 1 Dimostrare che se f è lipschitziana nel complesso delle variabili e dunque la soluzione $y = y(t)$ è solo di classe C^1 , l'analisi e le stime precedenti continuano sostanzialmente a valere, possibilmente con costanti diverse. (Suggerimento: provare ad utilizzare il teorema di Lagrange per ciascuna componente di $y(t)$.)

Cosa si può dire se a priori non sappiamo nulla riguardo l'esistenza di una soluzione? In questo caso l'analisi appena svolta perde di significato proprio perché non è disponibile alcuna soluzione con cui confrontare le soluzioni approssimate. Tuttavia, le poligonali di Eulero (3) possono essere comunque definite e le utilizzeremo proprio per dimostrare l'esistenza di una soluzione di (1). Più precisamente, vogliamo provare che se f è solamente continua, le poligonali di Eulero convergono uniformemente (eventualmente passando a sottosuccessioni) ad una funzione che è soluzione di (1).

A tal fine cerchiamo di individuare quali devono essere le proprietà possedute dalle soluzioni approssimate affinché queste convergano ad una soluzione del problema di Cauchy. Con riferimento a (4), posto

$$S_N(t) = \sum_{i=0}^{k-1} f(t_i, y_N(t_i)) \Delta t + (t - t_k) f(t_k, y_N(t_k)) \quad t \in [t_k, t_{k+1}],$$

si riconosce che $S_N(t)$ è una somma alla Cauchy nell'intervallo $[t_0, t]$ relativa alla funzione y_N e alla partizione $\{t_0, t_1, \dots, t_k, t\}$. Ci aspettiamo quindi che per $\Delta t \rightarrow 0$ tale funzione approssimi il relativo integrale di Riemann in $[t_0, t]$ (bisogna comunque prestare un po' di attenzione poiché anche la funzione integranda y_N varia al variare di Δt). L'equazione (4) può comunque essere riscritta nella forma

$$\begin{aligned} (5) \quad y_N(t) &= y_0 + \int_{t_0}^t f(s, y_N(s)) ds + \left(S_N(t) - \int_{t_0}^t f(s, y_N(s)) ds \right) \\ &=: y_0 + \int_{t_0}^t f(s, y_N(s)) ds + R_N(t), \end{aligned}$$

con $R_N(t)$ che presumibilmente tende a 0 se $\Delta t \rightarrow 0$, cioè se $N \rightarrow +\infty$. Sotto questa forma si comprende che, supposto che y_N converga ad una funzione y quando $N \rightarrow +\infty$, se si riesce a provare la convergenza dell'integrale di $f(t, y_N(t))$ al relativo integrale di $f(t, y(t))$, allora y soddisferà l'equazione integrale di Volterra associata al problema (1) dunque sarà soluzione di (1). Tale convergenza è ad esempio garantita se $y_N \rightarrow y$ uniformemente in $[t_0, t_0 + \delta]$. Ci siamo dunque ricondotti a cercare di dimostrare che una successione di funzioni continue (o almeno una sua sottosuccessione) converge uniformemente ad una funzione (continua) y in $[t_0, t_0 + \delta]$: questo è un problema di compattezza sequenziale nello spazio normato completo $(C([t_0, t_0 + \delta], \mathbb{R}^n), \|\cdot\|_\infty)$ (o più precisamente $(C(I_\delta, \mathbb{R}^n), \|\cdot\|_\infty)$ se consideriamo anche i tempi $t < t_0$) e può essere affrontato mediante il teorema di Ascoli-Arzelà.

Siamo ora pronti per enunciare il teorema di esistenza locale di Peano.

Teorema 2 (di Peano) Sia $\Omega \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ aperto e sia $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$ continua. Fissato $(t_0, y_0) \in \Omega$ siano $\alpha, R > 0$ tali che $I_\alpha \times B[y_0, R] \subset \Omega$, dove $I_\alpha = [t_0 - \alpha, t_0 + \alpha]$, e definiamo

$$M := \max \{ \|f(s, z)\| : (s, z) \in I_\alpha \times B[y_0, R] \},$$

$$\varepsilon_0 := \min \left\{ \alpha, \frac{R}{M} \right\}.$$

Allora per ogni $\delta \leq \varepsilon_0$ il problema di Cauchy

$$(6) \quad \begin{cases} y' = f(t, y) \\ y(t_0) = y_0, \end{cases}$$

ammette una soluzione definita in I_δ .

DIMOSTRAZIONE Vogliamo dimostrare che la successione (y_N) delle poligoni di Eulero associate al problema di Cauchy (6) ammette una sottosuccessione convergente ad una soluzione del problema stesso. Senza ledere in generalità proveremo questo risultato nell'intervallo $[t_0, t_0 + \delta]$.

Più precisamente dimostriamo che l'insieme $\{y_N : N \geq 1\}$ è relativamente sequenzialmente compatto in $(C([t_0, t_0 + \delta], \mathbb{R}^n), \|\cdot\|_\infty)$. A tal fine verifichiamo che è equilimitato ed equiuniformemente continuo.

Equilimitatezza: dimostriamo che per ogni $N \in \mathbb{N}$ e $t \in [t_0, t_0 + \delta]$ si ha $y_N(t) \in B[y_0, R]$. Verifichiamo anzitutto che $\|y_N(t) - y_0\| \leq M(t - t_0)$ per ogni $t \in [t_0, t_0 + \delta]$: procediamo per induzione finita sugli intervalli $J_k = [t_k, t_{k+1}]$ per $k = 0, \dots, N - 1$. In $J_0 = [t_0, t_1]$ si ha

$$\|y_N(t) - y_0\| = \|(t - t_0)f(t_0, y_0)\| \leq (t - t_0)M.$$

Supposto, per ipotesi induttiva, che $\|y_N(t) - y_0\| \leq M(t - t_0)$ (dunque anche $\leq R$) in J_{k-1} , per $t \in J_k$ si ha

$$\begin{aligned} \|y_N(t) - y_0\| &= \|y_N(t_k) + (t - t_k)f(t_k, y_N(t_k)) - y_0\| \\ &\leq \|y_N(t_k) - y_0\| + (t - t_k)\|f(t_k, y_N(t_k))\| \\ &\leq M(t_k - t_0) + (t - t_k)M = M(t - t_0). \end{aligned}$$

Per il principio di induzione si ha $\|y_N(t) - y_0\| \leq M(t - t_0) \leq M\delta \leq R$ per ogni $t \in [t_0, t_0 + \delta]$ perciò l'insieme $\{y_N : N \geq 1\}$ è equilimitato.

Equiuniforme continuità: verifichiamo più precisamente che l'insieme è equilipschitziano. Riscriviamo l'equazione (4) nella forma

$$y_N(t) = y_0 + \int_{t_0}^t g_N(s) ds,$$

dove g_N è la funzione costante a tratti definita da $g_N(t) = f(t_k, y_N(t_k))$ per $t \in [t_k, t_{k+1}]$. Per quanto appena visto si ha $\|g_N(t)\| = \|f(t_k, y_N(t_k))\| \leq M$ per ogni t , perciò se $t, r \in [t_0, t_0 + \delta]$ e $N \geq 1$ si ha

$$\|y_N(t) - y_N(r)\| \leq \left| \int_r^t \|g_N(s)\| ds \right| \leq M|t - r|,$$

da cui l'equilipschitzianità (e l'equiuniforme continuità) dell'insieme $\{y_N : N \geq 1\}$ in $C([t_0, t_0 + \delta], \mathbb{R}^n)$. Per il teorema di Ascoli-Arzelà $\{y_N : N \geq 1\}$ è relativamente sequenzialmente compatto in $C([t_0, t_0 + \delta], \mathbb{R}^n)$, perciò la successione $\{y_N\}_{N \in \mathbb{N}}$ ammette una sottosuccessione uniformemente convergente ad una funzione continua y in $[t_0, t_0 + \delta]$. Per facilità di notazione continuiamo a denotare questa sottosuccessione con $\{y_N\}_{N \in \mathbb{N}}$. Verifichiamo che y è soluzione del problema di Cauchy (6) in $[t_0, t_0 + \delta]$. Con riferimento a (5) si ha

$$\begin{aligned} R_N(t) &= \sum_{i=0}^{k-1} \int_{t_i}^{t_{i+1}} [f(t_i, y_N(t_i)) - f(s, y_N(s))] ds + \\ &\quad + \int_{t_k}^t [f(t_k, y_N(t_k)) - f(s, y_N(s))] ds. \end{aligned}$$

Poiché f è continua in $I_\alpha \times B[y_0, R]$ è ivi uniformemente continua, perciò fissato $\varepsilon > 0$ esiste $\delta_\varepsilon > 0$ tale che se $t, s \in I_\alpha$, $x, z \in B[y_0, R]$ soddisfano $|t - s| < \delta_\varepsilon$, $\|x - z\| < \delta_\varepsilon$ allora $\|f(t, x) - f(s, z)\| < \varepsilon$. In particolare, se $\delta/N = \Delta t < \bar{\delta}_\varepsilon := \min\{\delta_\varepsilon, \delta_\varepsilon/M\}$ cioè se $N > N_\varepsilon := \delta/\bar{\delta}_\varepsilon$, allora per ogni $i = 0, \dots, N-1$ ed ogni $s \in [t_i, t_{i+1}]$ si ha

$$|t_i - s| \leq \Delta t < \delta_\varepsilon, \quad \|y_N(t_i) - y_N(s)\| \leq M|t_i - s| \leq M\Delta t < \delta_\varepsilon,$$

perciò $\|f(t_i, y_N(t_i)) - f(s, y_N(s))\| < \varepsilon$. Dalla relazione sopra segue allora che

$$\|R_N(t)\| \leq \sum_{i=0}^{k-1} \int_{t_i}^{t_{i+1}} \varepsilon ds + \int_{t_k}^t \varepsilon ds = (t - t_0)\varepsilon \leq \alpha\varepsilon,$$

per ogni $N > N_\varepsilon$ ed ogni $t \in [t_0, t_0 + \delta]$, quindi $R_N(t) \rightarrow 0$ se $N \rightarrow +\infty$ (uniformemente in $[t_0, t_0 + \delta]$).

Sempre per l'uniforme continuità di f , in maniera analoga si verifica che se $y_N(t) \rightarrow y(t)$ per $N \rightarrow +\infty$ uniformemente in $[t_0, t_0 + \delta]$ allora si ha anche $f(t, y_N(t)) \rightarrow f(t, y(t))$ per $N \rightarrow +\infty$ uniformemente in $[t_0, t_0 + \delta]$, dunque

(ricordiamo che se g_n converge uniformemente a g in $[a, b]$, l'integrale di g_n converge all'integrale di g)

$$\int_{t_0}^t f(s, y_N(s)) ds \rightarrow \int_{t_0}^t f(s, y(s)) ds \quad \text{se } N \rightarrow +\infty$$

per ogni fissato $t \in [t_0, t_0 + \delta]$. Passando infine al limite per $N \rightarrow +\infty$ in (5) si ottiene che

$$y(t) = y_0 + \int_{t_0}^t f(s, y(s)) ds,$$

per ogni $t \in [t_0, t_0 + \delta]$, quindi y è soluzione del problema di Cauchy (6) in $[t_0, t_0 + \delta]$. Analogamente si ragiona nell'intervallo $[t_0 - \delta, t_0]$. $\square$

Osservazione 3 A priori, diverse sottosuccessioni di y_N potrebbero convergere a differenti soluzioni di (6).

Approfondimenti

Altre dimostrazioni del teorema di Peano

In questa sezione diamo (alcune) ulteriori strategie di dimostrazione del teorema di Peano. Per ciascuna forniremo solamente una linea dimostrativa, lasciando eventualmente allo studente il compito di completare i dettagli, magari aiutandosi con la consultazione di libri dedicati alle equazioni differenziali ordinarie. Si tenga presente, infatti, che alcuni passaggi nelle dimostrazioni non sono del tutto ovvi e che certi altri necessitano di un'analisi piuttosto articolata.

1) (variante della dimostrazione proposta) Fissati M e δ come nell'enunciato e fissato $N \in \mathbb{N}$, sia

$$I_{N,k} := \left[t_0 + (k-1) \frac{\delta}{N}, t_0 + k \frac{\delta}{N} \right],$$

con $k = 0, \dots, N$. Definiamo una soluzione approssimata $y_N(t)$ in maniera induttiva su ogni $I_{N,k}$. Sia $y_N(t) = y_0$ per $t \in I_{N,0}$. Supposto di avere definito y_N in $I_{N,k}$, la definiamo nel successivo intervallo $I_{N,k+1}$ ponendo

$$y_N(t) = y_0 + \int_{t_0}^t f\left(s, y_N\left(s - \frac{\delta}{N}\right)\right) ds,$$

per $t \in I_{N,k+1}$. Si può dimostrare che (y_N) è una successione equilimitata ed equicontinua dunque, per il teorema di Ascoli-Arzelà, ammette una

sottosuccessione uniformemente convergente in $[t_0, t_0 + \delta]$ ad una funzione continua f . Passando al limite nella definizione di y_N si verifica infine che y è soluzione del problema di Cauchy (6).

2) (metodi di punto fisso) È noto che (6) è equivalente al problema

$$y = Ty$$

dove T è l'operatore è definito in (2); inoltre sappiamo anche che se $\delta \leq \varepsilon_0$, allora $T : \mathcal{B} \rightarrow \mathcal{B}$ dove $\mathcal{B}$ è la palla di centro $y_0(t) \equiv y_0$ e raggio R nello spazio di Banach $(C(I_\delta, \mathbb{R}), \|\cdot\|_\infty)$. Siamo dunque ricondotti a cercare un punto fisso di T in $\mathcal{B}$. A tal fine risulta utile il teorema del punto fisso di Schauder, generalizzazione del teorema di Brouwer. Entrambi sono argomento di corsi avanzati di Analisi Funzionale per cui ne ometteremo la dimostrazione.

Teorema 4 (di Brouwer) *Sia $\mathcal{B} \subset \mathbb{R}^n$ una palla chiusa. Se $f : \mathcal{B} \rightarrow \mathcal{B}$ è continua allora f ammette punto fisso in $\mathcal{B}$.*

Il teorema di Schauder generalizza il teorema di Brouwer al caso degli spazi di Banach infinito dimensionali; in questo caso la sola ipotesi di continuità della funzione f non è sufficiente a garantire l'esistenza di un punto fisso. Ciò è essenzialmente causato dal fatto che le palle chiuse in uno spazio di Banach infinito dimensionale *non* sono compatte. Per ovviare al problema si chiederà alla funzione f un'ulteriore proprietà di compattezza.

Definizione 5 *Siano $(X, \|\cdot\|_X)$, $(Y, \|\cdot\|_Y)$ spazi di Banach. Una funzione $f : X \rightarrow Y$ si dice compatta se trasforma insiemi limitati di X in insiemi relativamente compatti di Y . La funzione f si dice completamente continua se è continua e compatta.*

Esercizio 6 Dimostrare che se $Y = \mathbb{R}^n$ allora f è completamente continua se e solo se f è continua e trasforma insiemi limitati in insiemi limitati. Da ciò discenderà che se X ha dimensione finita il teorema di Schauder si riduce a quello di Brouwer.

Teorema 7 (di Schauder) *Sia $\mathcal{B}$ una palla chiusa in uno spazio di Banach $(X, \|\cdot\|_X)$. Se $f : \mathcal{B} \rightarrow \mathcal{B}$ è completamente continua allora f ammette punto fisso in $\mathcal{B}$. (In generale è sufficiente che $\mathcal{B}$ sia un insieme chiuso, limitato e convesso.)*

Applichiamo il teorema di Schauder al nostro caso. Verifichiamo che T è (uniformemente) continua. Poiché f è uniformemente continua in $I_\alpha \times$

$B[y_0, R]$, per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $\delta_\varepsilon > 0$ tale che se $s \in I_\alpha$, $x, z \in B[y_0, R]$ soddisfano $\|x - z\| < \delta_\varepsilon$ allora $\|f(s, x) - f(s, z)\| < \varepsilon$. Prese due funzioni y_1, y_2 appartenenti alla palla $\mathcal{B}$ di centro y_0 e raggio R in $C(I_\delta, \mathbb{R})$ tali che $\|y_1 - y_2\|_\infty < \delta_\varepsilon$, per ogni $t \in I_\delta$ si ha dunque

$$\|Ty_1(t) - Ty_2(t)\| \leq \left\| \int_{t_0}^t \|f(s, y_1(s)) - f(s, y_2(s))\| ds \right\| \leq |t - t_0| \varepsilon \leq \alpha \varepsilon,$$

quindi $\|Ty_1 - Ty_2\|_\infty \leq \alpha \varepsilon$, da cui la (uniforme) continuità di T . Verifichiamo che T è compatta; a tal fine è sufficiente dimostrare che l'immagine della palla $\mathcal{B}$ tramite T è un insieme relativamente compatto in $(C(I_\delta, \mathbb{R}), \|\cdot\|_\infty)$ (infatti ogni sottoinsieme di un insieme relativamente compatto è relativamente compatto). Essendo $T(\mathcal{B}) \subseteq \mathcal{B}$ l'insieme $T(\mathcal{B})$ è sicuramente limitato. Verifichiamo che è equicontinuo. Presa una funzione $y \in \mathcal{B}$ per ogni $t_1, t_2 \in I_\delta$ si ha

$$\|Ty(t_2) - Ty(t_1)\| = \left\| \int_{t_1}^{t_2} f(s, y(s)) ds \right\| \leq \left| \int_{t_1}^{t_2} \|f(s, y(s))\| ds \right| \leq M|t_2 - t_1|,$$

dove M è definito come nell'enunciato del teorema di Peano. Dunque l'insieme $T(\mathcal{B}) = \{Ty(\cdot) : y \in \mathcal{B}\}$ è anche equilipschitziano, quindi equiuniformemente continuo. Per il teorema di Ascoli-Arzelà è allora relativamente compatto in $(C(I_\delta, \mathbb{R}), \|\cdot\|_\infty)$ e in definitiva, per il teorema di Schauder, T ha almeno un punto fisso in $\mathcal{B}$ che, come sappiamo, è soluzione di (6) in I_δ .

3) (approssimazione lipschitziana del campo vettoriale) Dato il problema (6) si approssima, uniformemente in $I_\alpha \times B[y_0, R]$, il campo vettoriale f con una successione di campi vettoriali f_n localmente lipschitziani nella seconda variabile (ad esempio di classe C^1). Considerato

$$(7) \quad \begin{cases} y' = f_n(t, y) \\ y(t_0) = y_0, \end{cases}$$

per il teorema di Cauchy, per ogni $n \in \mathbb{N}$ il problema (7) ammette una (unica) soluzione locale y_n definita in un intorno I_{δ_n} di t_0 . Si può dimostrare che se n è sufficientemente grande le soluzioni y_n possono essere definite in un intervallo comune I_δ e che convergono uniformemente in I_δ ad una funzione continua y . Passando al limite per $n \rightarrow +\infty$ nella formulazione di (7) mediante la relativa equazione di Volterra, si ottiene infine che y è soluzione di (1) in I_δ .