Il teorema di Ascoli-Arzelà

Alcuni risultati sugli spazi metrici

Spazi metrici (e topologici) compatti

Richiamiamo le definizioni di compattezza negli spazi metrici. Sia (X, d) una spazio metrico e sia $E \subseteq X$.

Definizione 1 *L'insieme E si dice* compatto per successioni *(o* sequenzialmente compatto*) se ogni successione $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ a valori in E ammette una sottosuccessione $(x_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ convergente ad un punto di E.*
L'insieme E si dice relativamente compatto per successioni *(o* relativamente sequenzialmente compatto*) se $\overline{E}$ è compatto per successioni cioè se ogni successione $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ a valori in E ammette una sottosuccessione $(x_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ convergente ad un punto di X (non necessariamente di E).*

Definizione 2 *L'insieme E si dice* compatto per ricoprimenti *(o, brevemente,* compatto*) se ogni ricoprimento aperto di E ammette un sottoricoprimento finito, cioè se per ogni famiglia $(A_\alpha)_{\alpha\in I}$ di aperti di X tale che $E \subseteq \bigcup_{\alpha\in I} A_\alpha$ esiste $J \subseteq I$ sottoinsieme finito tale che $E \subseteq \bigcup_{\alpha\in J} A_\alpha$.*
L'insieme E si dice relativamente compatto *se la chiusura $\overline{E}$ è compatta.*

Le due precedenti definizioni si applicano anche al caso più generale in cui (X, τ) è uno spazio topologico non necessariamente metrico.

Definizione 3 *Lo spazio metrico X si dice* completo *se ogni successione di Cauchy in X è convergente.*

Definizione 4 *L'insieme E si dice* totalmente limitato *se per ogni $\varepsilon > 0$ esistono $x_1, x_2, \ldots, x_N \in E$ tali che $E \subseteq \bigcup_{k=1}^{N} B(x_k, \varepsilon)$ cioè se per ogni $x \in E$ esiste $k = 1, \ldots, N$ tale che $d(x, x_k) < \varepsilon$. L'insieme $\{x_1, x_2, \ldots, x_N\}$ si dice* ε-rete.

Ricordiamo che ogni sottoinsieme E di uno spazio topologico (X, τ) può essere visto come spazio topologico munito della topologia τ_E indotta da τ su E. Si può dimostrare che la proprietà di compattezza di E è indipendente dalla topologia nel senso indicato dal seguente lemma.

Lemma 5 *Sia (X, τ) spazio topologico e sia $E \subseteq X$ un sottospazio. Allora (E, τ_E) è uno spazio topologico compatto nella topologia indotta se e solo se E è sottoinsieme compatto di (X, τ) nella topologia di X.*

DIMOSTRAZIONE Supponiamo che (E, τ_E) sia spazio topologico compatto. Preso un ricoprimento di E con $(A_\alpha)_{\alpha \in I}$ aperti di X, per definizione di topologia indotta $(A_\alpha \cap E)_{\alpha \in I}$ è un ricoprimento di E con aperti nella topologia indotta. Per compattezza esiste $J \subseteq I$ finito tale che $E = \bigcup_{\alpha \in J}(A_\alpha \cap E)$, ma allora $E \subseteq \bigcup_{\alpha \in J} A_\alpha$ ed E è sottoinsieme compatto di X.

Viceversa, sia E sottoinsieme compatto di (X, τ). Sia $(B_\alpha)_{\alpha \in I}$ un ricoprimento di E con aperti di E. Per definizione di τ_E, per ogni α esiste A_α aperto di X tale che $B_\alpha = A_\alpha \cap E$. Ma allora $(A_\alpha)_{\alpha \in I}$ è un ricoprimento di E con aperti di X e poiché E è sottoinsieme compatto di X esiste un sottoinsieme finito J di I tale che $E \subseteq \bigcup_{\alpha \in J} A_\alpha$. Di conseguenza si ha anche $E = \bigcup_{\alpha \in J} B_\alpha$ perciò (E, τ_E) è uno spazio topologico compatto. $\square$

Per un generico spazio topologico le due nozioni di compattezza sono distinte. Nel caso degli spazi metrici vale invece il seguente teorema.

Teorema 6 (di caratterizzazione degli spazi metrici compatti) *Sia (X, d) spazio metrico e sia $E \subseteq X$. Sono equivalenti*

1. *E è compatto;*
2. *E è sequenzialmente compatto;*
3. *E è completo e totalmente limitato.*

DIMOSTRAZIONE È già noto dai corsi di Analisi Matematica degli anni precedenti che 1. e 2. sono equivalenti e che la compattezza (sequenziale) implica la completezza di E. Verifichiamo che se E è compatto allora è totalmente limitato. Fissato $\varepsilon > 0$ la famiglia $\big(B(x, \varepsilon)\big)_{x \in E}$ è ricoprimento aperto di E. Per compattezza esiste un sottoinsieme finito J di E tale che $E \subseteq \bigcup_{x \in J} B(x, \varepsilon)$. L'insieme J è allora una ε-rete ed E è totalmente limitato.

Viceversa, dimostriamo che 3. implica 2. Fissata (x_n) successione in E dimostriamo che ammette sottosuccessione convergente in E. Fissato $\varepsilon = 1$ sia $\{z_1^1, z_2^1, \ldots, z_{N_1}^1\}$ una 1-rete. Allora esiste $z_{k_1}^1$ tale che $B(z_{k_1}^1, 1)$ contiene

x_n per infiniti valori dell'indice n. Sia x_{n_1} un tale elemento. Poiché ogni sottoinsieme di un insieme totalmente limitato è ancora totalmente limitato (verificarlo per esercizio), $E_1 := B(z^1_{k_1}, 1) \cap E \subseteq E$ è totalmente limitato. Sia $\{z^2_1, z^2_2, \ldots, z^2_{N_2}\}$ una 1/2-rete di E_1. Come in precedenza esiste $z^2_{k_2}$ tale che $B(z^2_{k_2}, 1/2)$ contiene x_n per infiniti valori dell'indice $n > n_1$. Sia x_{n_2} un tale elemento. Per induzione si costruisce una sottosuccessione (x_{n_j}) di (x_n) e una successione $(z^j_{k_j})$ di punti di E tali che $x_{n_h} \in B(z^j_{k_j}, 1/2^{j-1})$ per ogni $h \geq j$. In particolare per la disuguaglianza triangolare si ha che $d(x_{n_i}, x_{n_h}) \leq 1/2^{j-2}$ per ogni $i, h \geq j$ da cui segue facilmente che (x_{n_j}) è di Cauchy. Per la completezza di E tale sottosuccessione converge ad un elemento di E, da cui la tesi. □

Spazi metrici (e topologici) separabili

Definizione 7 *Uno spazio topologico* (X, τ) *si dice* separabile *se esiste un sottoinsieme contabile (cioè finito o al più numerabile) e denso, cioè se esiste* $G \subseteq X$ *contabile tale che* $\overline{G} = X$.

Ad esempio $\mathbb{R}^n$ con l'usuale topologia è separabile, infatti il sottoinsieme $\mathbb{Q}^n$ è denso e numerabile. Più in generale si potrebbe dimostrare che ogni spazio topologico che soddisfa il "secondo assioma di numerabilità" (esiste una base di aperti numerabile) è separabile (per approfondire l'argomento si consulti un libro di topologia).

Esercizio 8 Dimostrare che ogni sottoinsieme aperto A di $\mathbb{R}^n$ è (come sottospazio topologico) separabile. Cosa si può dire dell'insieme $\mathbb{R}^n \setminus \mathbb{Q}^n$ (per facilità considerare il caso $n = 1$)?

Esercizio 9 Un celebre teorema di approssimazione dovuto a Weierstrass afferma che ogni funzione continua $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ può essere approssimata uniformemente in $[a, b]$ con un polinomio, cioè che per ogni $\varepsilon > 0$ esiste un polinomio P tale che $||f - P||_\infty < \varepsilon$. A partire da questo risultato dimostrare che lo spazio metrico $\big(C\big([a, b], \mathbb{R}\big), d_\infty\big)$ è separabile.

Teorema 10 (separabilità degli spazi metrici compatti) *Ogni spazio metrico compatto è separabile.*

DIMOSTRAZIONE Sia (E, d) spazio metrico compatto. Per il teorema 6 E è totalmente limitato, dunque ammette ε-reti per ogni scelta di $\varepsilon > 0$. In particolare, per ogni $n \in \mathbb{N}$ sia $\mathcal{R}_n$ una $1/n$-rete. L'insieme $\mathcal{R} = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \mathcal{R}_n$ è (al più) numerabile. Inoltre fissato $x \in E$ ed $\varepsilon > 0$ sia n_ε tale che $1/n_\varepsilon < \varepsilon$. Poiché $\mathcal{R}_{n_\varepsilon}$ è $1/n_\varepsilon$-rete, esiste $x_\varepsilon \in \mathcal{R}_{n_\varepsilon} \subset \mathcal{R}$ tale che $d(x, x_\varepsilon) < 1/n_\varepsilon < \varepsilon$, quindi $\mathcal{R}$ è anche denso e in conclusione E è separabile. □

Insiemi compatti in $C(E,\mathbb{R})$

In questa sezione caratterizzeremo i sottoinsiemi compatti di $C(E,\mathbb{R})$ dove (E,d) è una spazio metrico compatto. Ricordiamo anzitutto che definiti

$$C(E,\mathbb{R}) := \big\{f : E \to \mathbb{R} \text{ continue}\big\},$$
$$||f||_\infty := \max_{x\in E} |f(x)|,$$

l'insieme $\big(C(E,\mathbb{R}), ||\cdot||_\infty\big)$ è uno spazio normato (dunque metrico) completo.

Prima di passare ad enunciare e dimostrare il teorema principale, diamo alcune definizioni che saranno utilizzate nel seguito. Sia (E,d) spazio metrico (non necessariamente compatto).

Definizione 11 *Un sottoinsieme $\mathcal{F} \subseteq C(E,\mathbb{R})$ si dice* equicontinuo *se per ogni fissato $x \in E$ ed $\varepsilon > 0$ esiste $\delta = \delta_\varepsilon(x) > 0$ tale che per ogni $y \in E$ con $d(y,x) < \delta$ e per ogni $f \in \mathcal{F}$ si ha $|f(y) - f(x)| < \varepsilon$.*

Osserviamo che se f è continua in E allora per ogni fissato $x \in E$ ed $\varepsilon > 0$ esiste $\delta = \delta_\varepsilon(x,f) > 0$ tale che per ogni $y \in E$ con $d(y,x) < \delta$ si ha $|f(y) - f(x)| < \varepsilon$. Un insieme $\mathcal{F}$ è dunque equicontinuo se il δ può essere scelto indipendente da $f \in \mathcal{F}$.

In maniera analoga si definisce

Definizione 12 *Un sottoinsieme $\mathcal{F} \subseteq C(E,\mathbb{R})$ si dice* equiuniformemente continuo *se per ogni fissato $\varepsilon > 0$ esiste $\delta = \delta_\varepsilon > 0$ tale che per ogni $x, y \in E$ tali che $d(y,x) < \delta$ e per ogni $f \in \mathcal{F}$ si ha $|f(y) - f(x)| < \varepsilon$.*

Definizione 13 *Un sottoinsieme $\mathcal{F} \subseteq C(E,\mathbb{R})$ si dice* puntualmente limitato *se per ogni $x \in E$ esiste $M > 0$ tale che $|f(x)| \leq M$ per ogni $f \in \mathcal{F}$.*

Definizione 14 *Un sottoinsieme $\mathcal{F} \subseteq C(E,\mathbb{R})$ si dice* equilimitato *se esiste $M > 0$ tale che per ogni $x \in E$ ed ogni $f \in \mathcal{F}$ sia $|f(x)| \leq M$, ovvero se $||f||_\infty \leq M$. In altre parole $\mathcal{F}$ è equilimitato se e solo se $\mathcal{F}$ è limitato in $C(E,\mathbb{R})$ rispetto alla norma infinito.*

Definizione 15 *Un sottoinsieme $\mathcal{F} \subseteq C(E,\mathbb{R})$ si dice* equilipschitziano *se esiste $L > 0$ tale che per ogni $x_1, x_2 \in E$ ed ogni $f \in \mathcal{F}$ sia*

$$|f(x_1) - f(x_2)| \leq L\, d(x_1, x_2).$$

Osservazione 16 È facile dimostrare che (farlo per esercizio)

$$\text{equilipschitzianità} \implies \text{equiuniforme continuità} \implies \text{equicontinuità}$$

e che in generale non valgono le implicazioni inverse. Se però E è anche compatto allora si ha

$$\text{equicontinuità} \implies \text{equiuniforme continuità}$$

come viene dimostrato nel seguente teorema che estende quello di Heine-Cantor sull'uniforme continuità delle funzioni continue definite sui compatti.

Teorema 17 *Sia (E, d) spazio metrico compatto. Se $\mathcal{F} \subseteq C(E, \mathbb{R})$ è equicontinuo allora è anche equiuniformemente continuo.*

Dimostrazione Ricordiamo che, essendo metrico, E è anche sequenzialmente compatto. Per assurdo supponiamo che $\mathcal{F}$ non sia equiuniformemente continuo; allora esiste $\varepsilon > 0$ tale che per ogni $\delta > 0$ esistono $x_\delta, y_\delta \in E$ con $d(x_\delta, y_\delta) < \delta$ ed esiste $f_\delta \in \mathcal{F}$ tale che $|f_\delta(x_\delta) - f_\delta(y_\delta)| \geq \varepsilon$. in particolare, per ogni $n \in \mathbb{N}$ esistono $x_n, y_n \in E$ con $d(x_n, y_n) < 1/n$ ed esiste $f_n \in \mathcal{F}$ tale che $|f_n(x_n) - f_n(y_n)| \geq \varepsilon$. Per la compattezza sequenziale di E, eventualmente passando a successioni, si ha che $x_n \to \bar{x}$ con $\bar{x} \in E$. Facilmente anche $y_n \to \bar{x}$. In relazione a $\bar{x}$ esiste $\delta_\varepsilon = \delta_\varepsilon(\bar{x})$ tale che se $d(x, \bar{x}) < \delta_\varepsilon$ si ha $|f(x) - f(\bar{x})| < \varepsilon/2$ per ogni $f \in \mathcal{F}$. Definitivamente si avrà $d(x_n, \bar{x}) < \delta_\varepsilon$ e $d(y_n, \bar{x}) < \delta_\varepsilon$ per cui

$$\varepsilon \leq |f_n(x_n) - f_n(y_n)| \leq |f_n(x_n) - f_n(\bar{x})| + |f_n(\bar{x}) - f_n(y_n)| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2},$$

da cui l'assurdo. □

Passiamo ora ad enunciare e dimostrare il teorema fondamentale di questa sezione.

Teorema 18 (di Ascoli-Arzelà, di compattezza in $C(E, \mathbb{R})$) *Considerato uno spazio metrico compatto (E, d) ed $\mathcal{F} \subseteq C(E, \mathbb{R})$, allora $\mathcal{F}$ è sequenzialmente compatto in $\big(C(E, \mathbb{R}), d_\infty\big)$ se e solo se*

1. *$\mathcal{F}$ è chiuso;*
2. *$\mathcal{F}$ è puntualmente limitato;*
3. *$\mathcal{F}$ è equicontinuo.*

(Inoltre $\mathcal{F}$ è relativamente sequenzialmente compatto sse valgono 2. e 3.)

Osservazione 19 Essendo E compatto, per il teorema 17 se $\mathcal{F}$ è equicontinuo allora è anche equiuniformemente continuo. Si può inoltre dimostrare che se E è compatto ed $\mathcal{F}$ è equicontinuo e puntualmente limitato allora $\mathcal{F}$ è equilimitato (cioè limitato in $C(E,\mathbb{R})$). Infatti $\mathcal{F}$ è equiuniformemente continuo, quindi esiste $\delta > 0$ tale che se $d(x,y) < \delta$ e $f \in \mathcal{F}$ si ha $|f(x)-f(y)| < 1$. Sia $x_1, x_2, \ldots, x_N$ una δ-rete e sia $M \geq \max\{|f(x_k)| : \ f \in \mathcal{F}, \ k = 1, \ldots, N\}$. Per ogni $x \in E$ esiste x_k tale che $d(x, x_k) < \delta$ perciò

$$|f(x)| \leq |f(x) - f(x_k)| + |f(x_k)| < 1 + M,$$

per ogni $f \in \mathcal{F}$, da cui l'equilimitatezza.

Di conseguenza le proprietà 1., 2. e 3. possono essere equivalentemente sostituite con

1. $\mathcal{F}$ è chiuso;

2.′ $\mathcal{F}$ è limitato;

3.′ $\mathcal{F}$ è equiuniformemente continuo.

Dimostrazione (del teorema di Ascoli-Arzelà) Proviamo che se $\mathcal{F}$ è (sequenzialmente) compatto allora valgono 1., 2. e 3. È chiaro che $\mathcal{F}$ è chiuso e limitato in $C(E,\mathbb{R})$ (i compatti in spazi metrici sono chiusi e limitati) quindi equilimitato e puntualmente limitato, dunque valgono 1. e 2. Verifichiamo che vale 3. Fissato $\varepsilon > 0$ sia $\{f_1, f_2, \ldots, f_N\}$ una $\varepsilon/3$-rete del compatto $\mathcal{F}$. Le funzioni f_k sono continue sul compatto E quindi, per il teorema di Heine-Cantor, sono uniformemente continue perciò, in relazione all'ε scelto, per ogni $k = 1, \ldots, N$ esiste $\delta_\varepsilon(f_k)$ tale che se $x, y \in E$ con $d(x,y) < \delta_\varepsilon(f_k)$ si ha $|f_k(x) - f_k(y)| < \varepsilon$. Poniamo $\delta_\varepsilon := \min_{k=1,\ldots,N} \delta_{\varepsilon/3}(f_k)$. Presa ora $f \in \mathcal{F}$ in relazione alla $\varepsilon/3$-rete esiste i tale che $f \in B(f_i, \varepsilon/3)$ ovvero $||f - f_i||_\infty < \varepsilon/3$. Se $x, y \in E$ con $d(x,y) < \delta_\varepsilon (< \delta_{\varepsilon/3}(f_i))$ si ha

$$\begin{aligned} |f(x) - f(y)| &\leq |f(x) - f_i(x)| + |f_i(x) - f_i(y)| + |f_i(y) - f(y)| \\ &\leq 2||f - f_i||_\infty + |f_i(x) - f_i(y)| < 2\frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3}. \end{aligned}$$

Poiché ciò vale per ogni $f \in \mathcal{F}$ con δ_ε dipendente solo da ε, segue la equiuniforme continuità di $\mathcal{F}$.

Viceversa, dimostriamo ora che se valgono 1., 2. e 3. allora $\mathcal{F}$ è sequenzialmente compatto in $C(E,\mathbb{R})$. Fissata una successione $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ in $\mathcal{F}$ dobbiamo verificare che ammette una sottosuccessione convergente in $C(E,\mathbb{R})$. Poiché E è spazio metrico compatto per il teorema 10 è separabile. Sia

$\mathcal{R} := \cup_{n=1}^{\infty} \mathcal{R}_n$ il sottoinsieme contabile e denso ottenuto dall'unione delle $1/n$-reti $\mathcal{R}_n$, come nella dimostrazione del teorema 6. Ordiniamo i suoi elementi, sia dunque $\mathcal{R} = \{x_1, x_2, \dots\}$. Fissato x_1, per l'ipotesi 2. esiste $M_1 > 0$ tale che $|f_n(x_1)| \leq M_1$ per ogni $n \in \mathbb{N}$, quindi la successione $\big(f_n(x_1)\big)_{n\in\mathbb{N}}$ è limitata in $\mathbb{R}$ e per il teorema di Bolzano-Weierstrass ammette una sottosuccessione $\big(f_{n_k}(x_1)\big)_{k\in\mathbb{N}}$ convergente. Per facilità di notazione poniamo $f_{1,k} := f_{n_k}$. Per costruzione si ha che la successione $f_{1,k}$ converge puntualmente in x_1. Considerato ora il punto x_2 si avrà che esiste $M_2 > 0$ tale che $|f_{1,k}(x_2)| \leq M_2$ per ogni $k \in \mathbb{N}$, quindi la successione $\big(f_{1,k}(x_2)\big)_{k\in\mathbb{N}}$ è limitata in $\mathbb{R}$ e a sua volta ammette una sottosuccessione convergente che denotiamo con $(f_{2,k}(x_2))$. Per costruzione si ha che la successione di funzioni $f_{2,k}$ converge puntualmente in x_2 ed essendo sottosuccessione di $f_{1,k}$ converge anche in x_1. Per induzione, si costruiscono successioni

$$
\begin{array}{llllll}
f_{1,1} & f_{1,2} & \cdots & f_{1,k} & \cdots & \text{sottosuc. di } (f_k)\text{, convergente in } x_1 \\
f_{2,1} & f_{2,2} & \cdots & f_{2,k} & \cdots & \text{sottosuc. di } (f_{1,k})\text{, convergente in } x_1, x_2 \\
f_{3,1} & f_{3,2} & \cdots & f_{3,k} & \cdots & \text{sottosuc. di } (f_{2,k})\text{, convergente in } x_1, x_2, x_3 \\
\multicolumn{5}{l}{\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots} & \\
f_{h,1} & f_{h,2} & \cdots & f_{h,k} & \cdots & \text{sottosuc. di } (f_{h-1,k})\text{, convergente in } x_1, \dots, x_h \\
\multicolumn{5}{l}{\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots} &
\end{array}
$$

Si noti che tutte le successioni $(f_{h,k})_{k\in\mathbb{N}}$ sono sottosuccessioni di $(f_k)_{k\in\mathbb{N}}$. Consideriamo la successione $(g_k) := (f_{k,k})$ ottenuta col *procedimento diagonale*, anch'essa sottosuccessione di (f_k). Mostriamo che tale successione converge in $C(E, \mathbb{R})$; a tal fine utilizzeremo la completezza di $\big(C(E, \mathbb{R}), d_\infty\big)$. Verifichiamo anzitutto che converge puntualmente in tutti gli x_h per $h \geq 1$ (cioè nell'insieme denso $\mathcal{R}$). Infatti, fissato h se $k \geq h$ per costruzione $(f_{k,k})_{k\geq h}$ è sottosuccessione di $(f_{h,k})_{k\in\mathbb{N}}$ dunque converge in $x_1, \dots, x_h$. Per l'arbitrarietà di $h \in \mathbb{N}$ segue la tesi. Verifichiamo che (g_k) converge anche in tutti gli altri punti di E e che tale convergenza è uniforme.

Fissato $x \in E \setminus \mathcal{R}$, osserviamo che se $n, m \in \mathbb{N}$, $x_h \in \mathcal{R}$ si ha

$$|g_n(x) - g_m(x)| \leq |g_n(x) - g_n(x_h)| + |g_n(x_h) - g_m(x_h)| + |g_m(x_h) - g_m(x)|.$$

Il primo e il terzo termine sul lato destro possono essere resi piccoli grazie all'equicontinuità di $\mathcal{F}$, il secondo grazie alla convergenza di (g_n) in x_h. Più precisamente, per l'osservazione 16 $\mathcal{F}$ è anche equiuniformemente continuo perciò fissato $\varepsilon > 0$ esiste $\delta = \delta_\varepsilon > 0$ tale che se $x, y \in E$, $d(x, y) < \delta_\varepsilon$ e per ogni $f \in \mathcal{F}$ si ha $|f(x) - f(y)| < \varepsilon$. In particolare si ha $|g_n(x) - g_n(y)| < \varepsilon$ per ogni n. Per la densità di $\mathcal{R}$, fissato $x \in E \setminus \mathcal{R}$ esiste $x_h = x_h(\varepsilon, x) \in \mathcal{R}$

tale che $d(x, x_h) < \delta_\varepsilon$ perciò $|g_n(x) - g_n(x_h)| < \varepsilon$ per ogni n. Dalla relazione sopra si ottiene quindi

$$|g_n(x) - g_m(x)| \leq \varepsilon + |g_n(x_h) - g_m(x_h)| + \varepsilon.$$

Poiché inoltre $(g_n(x_h))_n$ converge allora è di Cauchy, dunque esiste $\bar{n}_\varepsilon = \bar{n}_\varepsilon(x_h) = \bar{n}_\varepsilon(x)$ tale che se $n, m \geq \bar{n}_\varepsilon(x)$ si ha $|g_n(x_h) - g_m(x_h)| < \varepsilon$. In definitiva, fissato $\varepsilon > 0$, se $n, m \geq \bar{n}_\varepsilon(x)$ si ottiene

$$|g_n(x) - g_m(x)| \leq \varepsilon + \varepsilon + \varepsilon = 3\varepsilon,$$

da cui segue che $(g_n(x))_n$ e di Cauchy in $\mathbb{R}$ quindi converge. Dimostriamo infine che $(g_n)_n$ è di Cauchy in $\big(C(E,\mathbb{R}), d_\infty\big)$. Basta riuscire a trovare un $\bar{n}_\varepsilon(x)$ indipendente da x. Fissato $\varepsilon > 0$ sia $n^* = n^*(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ tale che $1/n^* < \varepsilon$ e consideriamo la $1/n^*$-rete $\mathcal{R}_{n^*}$. Per ogni $x \in E$ esiste $x_h \in \mathcal{R}_{n^*}$ tale che $d(x, x_h) < 1/n^* < \varepsilon$. In definitiva, fissati $\varepsilon > 0$ e $x \in E$, è sufficiente prendere x_h all'interno dell'insieme (finito!) $\mathcal{R}_{n^*}$ invece che in tutto $\mathcal{R}$. Posto quindi $\bar{n}_\varepsilon := \max\big\{\bar{n}_\varepsilon(x_h) : \ x_h \in \mathcal{R}_{n^*}\big\}$, se $n, m \geq \bar{n}_\varepsilon$ si ha $|g_n(x) - g_m(x)| < \varepsilon$ per ogni $x \in E$, ovvero $||g_n - g_m||_\infty < \varepsilon$ cioè $(g_n)_n$ è di Cauchy nella norma infinito. Per la completezza di $\big(C(E,\mathbb{R}), d_\infty\big)$ la successione g_n (sottosuccessione di f_n) converge uniformemente ad una funzione $f \in C(E,\mathbb{R})$. $\square$

Osservazione 20 Il risultato si estende in maniera ovvia al caso di sottoinsiemi dello spazio $C(E,\mathbb{R}^n)$.

Esercizio 21 Sia (E, d) uno spazio metrico. Ricordiamo che una funzione $f : E \to \mathbb{R}$ è Hölderiana di costante $\alpha \in]0, 1]$ se

$$N_\alpha(f) := \sup_{x \neq y} \frac{|f(x) - f(y)|}{d(x,y)^\alpha} < \infty,$$

ovvero se e solo se esiste $M > 0$ tale che $|f(x) - f(y)| \leq M\, d(x,y)^\alpha$ per ogni $x, y \in E$ (il numero $N_\alpha(f)$ è la più piccola delle costanti M per cui vale la disuguaglianza). Dimostrare che se E è compatto l'insieme definito da $\mathcal{F} := \big\{f \in C(E,\mathbb{R}) : \ ||f||_\infty \leq 1, \ N_\alpha(f) \leq 1\big\}$ è compatto in $C(E,\mathbb{R})$ nella metrica uniforme.