



Facoltà di Scienze Matematiche, Fisiche e Naturali
Corso di Laurea in Matematica

EQUAZIONI DIFFERENZIALI

Appello del 19 settembre 2011

N.B.: scrivere nome, cognome e numero di matricola su ogni foglio consegnato. È ammesso l'utilizzo degli appunti del corso. Tempo a disposizione: 3 ore

- 1** Dimostrare la seguente generalizzazione del Criterio dell'asintoto: **Teorema.** Sia $g : [a, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ derivabile tale che ammetta finito il limite per $t \rightarrow +\infty$. Allora

- i) $\liminf_{t \rightarrow +\infty} g'(t) \leq 0$, e $\limsup_{t \rightarrow +\infty} g'(t) \geq 0$;
- ii) se g' è continua, l'integrale $\int_{t_0}^{+\infty} g'(s) ds$ converge.

Riottenere come corollario il criterio dell'asintoto.

- 2** Data l'equazione differenziale

$$y' = \sin t - y^5$$

- a) studiare l'esistenza e l'unicità locale delle soluzioni. Valgono anche le ipotesi del teorema di esistenza globale?
- b) trovare gli eventuali equilibri e le regioni del piano $t-y$ dove le soluzioni sono crescenti/decrescenti;
- c) dimostrare che esiste $T > 0$ tale che se $y(t)$ è soluzione lo è anche $z(t) := y(t+T)$. Determinare il più piccolo di tali $T > 0$. È vero che le soluzioni sono tutte T -periodiche?
- d) trovare le funzioni costanti che sono soprasoluzioni e quelle che sono sottosoluzioni per $t \geq t_0$;
- e) verificare che tutte le soluzioni sono globalmente definite in futuro (suggerimento: utilizzare opportunamente il criterio di compattezza e/o avvalersi di sopra/sottosoluzioni);
- f) dimostrare che nessuna soluzione ha limite per $t \rightarrow +\infty$ (suggerimento: utilizzare l'esercizio 1; alternativamente dimostrare che l'oscillazione di ogni soluzione in $[2k\pi, (2k+1)\pi]$ è uniformemente positiva per $k \rightarrow +\infty$);
- g) dimostrare che l'orbita di ciascuna soluzione è definitivamente contenuta nell'intervallo $[-1, 1]$ in futuro (suggerimento: utilizzare il punto f); alternativamente utilizzare il punto c) e l'unicità delle soluzioni dei problemi di Cauchy);
- h) dato $y(t_0) = y_0$ con $|y_0| > 1$, studiare l'intervallo massimale d'esistenza $] \alpha, \beta[$ della relativa soluzione e calcolare, qualora esista, il $\lim_{t \rightarrow \alpha^+} y(t)$.

- 3** Data la matrice

$$A := \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

calcolare la matrice fondamentale e^{tA} e utilizzarla per trovare la soluzione del sistema di equazioni differenziali $y' = Ay$ con dati iniziali $y(1) = (1, 0, -1)^T$.