



Facoltà di Scienze Matematiche, Fisiche e Naturali
Corso di Laurea in Matematica

EQUAZIONI DIFFERENZIALI

Appello del 27 giugno 2011

N.B.: scrivere nome, cognome e numero di matricola su ogni foglio consegnato. È ammesso l'utilizzo degli appunti del corso. Tempo a disposizione: 3 ore

1 Data l'equazione differenziale

$$y' = \sqrt{y^2 + t^2} - 2t$$

- a) studiare l'esistenza e l'unicità locale ed eventualmente globale delle soluzioni;
- b) trovare le regioni dove le soluzioni sono crescenti/decrescenti e rappresentarle nel piano $t - y$;
- c) sia d'ora in avanti $y(t)$ la soluzione del problema di Cauchy con condizione iniziale $y(0) = -1$. Dimostrare che y è globalmente definita e definitivamente monotona per $t \rightarrow -\infty$ e per $t \rightarrow +\infty$ (Suggerimento: potrebbe risultare utile applicare opportunamente il teorema del confronto);
- d) calcolare i limiti $\lim_{t \rightarrow +\infty} y(t)$ e $\lim_{t \rightarrow -\infty} y(t)$.
- e) Esistono soluzioni che tendono a $+\infty$ in tempo finito? E in tempo infinito? Esistono soluzioni che tendono a $+\infty$ esponenzialmente?

2 Data la matrice

$$A := \begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 \\ 0 & -3 & 2 \\ 1 & -2 & 2 \end{pmatrix}$$

- a) calcolare la matrice fondamentale e^{tA} e utilizzarla per trovare la generica soluzione del sistema di equazioni differenziali $y' = Ay$;
- b) dati $b(t) = (2e^t, 0, 0)^T$ e $y_0 = (2, -1, 0)^T$, trovare la soluzione del problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' = Ay + b(t) \\ y(0) = y_0. \end{cases}$$

3 Data l'equazione differenziale $y' = f(y)$ con $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ localmente lipschitziana, dimostrare che ogni soluzione è strettamente monotona oppure è un equilibrio. È ancora vero se f è solamente continua?

Punteggi indicativi: 5+2+6+3+10, 8+5, 6