Università degli Studi di Udine — Anno Accademico 2010/2011

Facoltà di Scienze Matematiche, Fisiche e Naturali
Corso di Laurea in Matematica

Equazioni Differenziali

Appello del 8 febbraio 2011

N.B.: scrivere nome, cognome e numero di matricola su ogni foglio consegnato. È ammesso l'utilizzo degli appunti del corso. Tempo a disposizione: 3 ore

1 Dato il sistema di equazioni differenziali nel piano

$$\begin{cases} x' = 2y - 4x \\ y' = 2x + 4y + 3x^2, \end{cases}$$

a) studiare l'esistenza ed unicità locale per le soluzioni del problema di Cauchy associato e determinare gli equilibri del sistema;

b) individuare le sottoregioni del piano dove x è crescente/decrescente e fare l'analogo per y; disegnare approssimativamente la direzione del campo vettoriale in tali regioni;

c) verificare che la 1-forma differenziale ω associata al sistema è esatta; utilizzarla per determinare un integrale primo e per trovare la soluzione generale del sistema;

d) dimostrare che per ogni soluzione $x(t)$ è inferiormente limitata;

e) esistono orbite periodiche? e orbite limitate e non periodiche? (Suggerimento: detto F l'integrale primo tale che $F(0,0) = 0$, si studino ad esempio gli insiemi di livello 0 e -4);

f) sia d'ora in avanti $(x(t), y(t))$ la soluzione del problema di Cauchy con dato iniziale $(x(0), y(0)) = (1, 5)$ definita in futuro nell'intervallo massimale $[0, \beta[$. Dimostrare che esiste $\lim_{t\to\beta^-}(x(t), y(t))$ e calcolarlo;

g) trovare un'equazione differenziale ordinaria di ordine 1 di cui $x(t)$ è soluzione ed utilizzarla per studiare l'esistenza globale in futuro della soluzione.

2 Data l'equazione differenziale lineare

$$y'' + a(t)y' + b(t)y = 0$$

con $a, b \in C^1(\mathbb{R})$

a) discutere l'esistenza locale/globale e l'unicità delle soluzioni;

b) determinare condizioni necessarie su a, b affinché l'equazione ammetta due soluzioni della forma $y_1(t)$ e $y_2(t) = ty_1(t)$ con y_1 non nulla; nel qual caso trovare anche l'espressione di y_1 e verificare che è ben determinata a meno di un fattore moltiplicativo. Tali condizioni sono anche sufficienti?

c) verificare che y_1 e y_2 del punto b) sono linearmente indipendenti; più in generale, dimostrare che ciò è vero se y_1 è soluzione non nulla dell'equazione e $y_2(t) = z(t)y_1(t)$ con z continua e non costante. È ancora vero se y_1 non è soluzione di un'equazione lineare?

d) Utilizzare i punti precedenti per risolvere il problema di Cauchy

$$\begin{cases} (t^2+1)^2 y'' - 4t(t^2+1)y' + (6t^2-2)y = 0 \\ y(0) = 1,\ y'(0) = 2. \end{cases}$$

Punteggi indicativi: 3+2+5+2+6+4+6, 2+6+4+6