Università degli Studi di Udine — Anno Accademico 2010/2011

Facoltà di Scienze Matematiche, Fisiche e Naturali
Corso di Laurea in Matematica

# Equazioni Differenziali

Appello del 8 febbraio 2011

**1** Dato il sistema di equazioni differenziali nel piano

$$\begin{cases} x' = 2y - 4x \\ y' = 2x + 4y + 3x^2, \end{cases}$$

a) studiare l'esistenza ed unicità locale per le soluzioni del problema di Cauchy associato e determinare gli equilibri del sistema;

b) individuare le sottoregioni del piano dove $x$ è crescente/decrescente e fare l'analogo per $y$; disegnare approssimativamente la direzione del campo vettoriale in tali regioni;

c) verificare che la 1-forma differenziale $\omega$ associata al sistema è esatta; utilizzarla per determinare un integrale primo e per trovare la soluzione generale del sistema;

d) dimostrare che per ogni soluzione $x(t)$ è inferiormente limitata;

e) esistono orbite periodiche? e orbite limitate e non periodiche? (Suggerimento: detto $F$ l'integrale primo tale che $F(0,0) = 0$, si studino ad esempio gli insiemi di livello 0 e $-4$);

f) sia d'ora in avanti $(x(t), y(t))$ la soluzione del problema di Cauchy con dato iniziale $(x(0), y(0)) = (1, 5)$ definita in futuro nell'intervallo massimale $[0, \beta[$. Dimostrare che esiste $\lim_{t\to\beta^-}(x(t), y(t))$ e calcolarlo;

g) trovare un'equazione differenziale ordinaria di ordine 1 di cui $x(t)$ è soluzione ed utilizzarla per studiare l'esistenza globale in futuro della soluzione.

**2** Data l'equazione differenziale lineare

$$y'' + a(t)y' + b(t)y = 0$$

con $a, b \in C^1(\mathbb{R})$

a) discutere l'esistenza locale/globale e l'unicità delle soluzioni;

b) determinare condizioni necessarie su $a, b$ affinché l'equazione ammetta due soluzioni della forma $y_1(t)$ e $y_2(t) = ty_1(t)$ con $y_1$ non nulla; nel qual caso trovare anche l'espressione di $y_1$ e verificare che è ben determinata a meno di un fattore moltiplicativo. Tali condizioni sono anche sufficienti?

c) verificare che $y_1$ e $y_2$ del punto b) sono linearmente indipendenti; più in generale, dimostrare che ciò è vero se $y_1$ è soluzione non nulla dell'equazione e $y_2(t) = z(t)y_1(t)$ con $z$ continua e non costante. È ancora vero se $y_1$ non è soluzione di un'equazione lineare?

d) Utilizzare i punti precedenti per risolvere il problema di Cauchy

$$\begin{cases} (t^2+1)^2y'' - 4t(t^2+1)y' + (6t^2-2)y = 0 \\ y(0) = 1,\ y'(0) = 2. \end{cases}$$

*Punteggi indicativi: 3+2+5+2+6+4+6, 2+6+4+6*

## Appello del 21 febbraio 2011

**1** Dato l'equazione differenziale

$$y' = \ln(t^2 + 2e^y) - y - \ln(t^4 + 1)$$

a) studiare l'esistenza e l'unicità locale delle soluzioni; dimostrare che valgono anche le ipotesi del teorema di esistenza globale;

b) trovare le regioni dove le soluzioni sono crescenti/decrescenti e rappresentarle nel piano $t - y$;

c) sia d'ora in avanti $y(t)$ la soluzione del problema di Cauchy con condizione iniziale $y(0) = 0$. Dimostrare che $y$ è definitivamente monotona per $t \to -\infty$ e per $t \to +\infty$ (Suggerimento: potrebbe risultare utile applicare opportunamente il teorema del confronto);

d) calcolare il limite $\lim_{t\to+\infty} y(t)$.

**2** Data la matrice

$$A := \begin{pmatrix} -3 & 4 & 2 \\ 1 & -1 & -2 \\ -2 & 3 & 2 \end{pmatrix}$$

a) calcolare la matrice fondamentale $e^{tA}$ e utilizzarla per trovare la generica soluzione $y$ del problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' = Ay \\ y(0) = y_0 \end{cases}$$

b) verificare che tutte le soluzioni sono limitate in futuro;

c) detta $A_\varepsilon = A + \varepsilon I$ con $\varepsilon \in \mathbb{R}$, sia $y_\varepsilon$ la soluzione del problema di Cauchy $y' = A_\varepsilon y$ col medesimo dato iniziale. Dimostrare che $y_\varepsilon \to y$ uniformemente su ogni intervallo $[-T, T]$;

d) è vero che per ogni $\varepsilon \in \mathbb{R}$ sufficientemente piccolo tutte le soluzioni $y_\varepsilon$ sono limitate in futuro? in caso negativo, esistono degli $\varepsilon$ per cui tutte le soluzioni $y_\varepsilon$ sono limitate in futuro?

e) fare l'analogo del punto c) nel caso in cui $A_\varepsilon = A + \varepsilon B$ e $B$ è una matrice che commuta con $A$.

**3** Dato il problema di Cauchy $y' = f(t, y)$, $y(t_0) = y_0$ con $f : \Omega \to \mathbb{R}^n$ continua, $\Omega \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$, $(t_0, y_0) \in \Omega$, sia $\{y_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ la relativa successione delle iterate di Picard.

a) considerato in $\Omega$ un opportuno cilindro $C_{\varepsilon,R} = I_\epsilon \times B_R$, dove $I_\epsilon = [t_0 - \epsilon, t_0 + \epsilon]$ e $B_R = \{y \in \mathbb{R}^n : \|y - y_0\| \leq R\}$, dimostrare che il sottoinsieme $\{y_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ è limitato ed equicontinuo in $C(I_\epsilon, \mathbb{R}^n)$.

b) È possibile applicare il teorema di Ascoli-Arzelà alla successione?

c) In caso positivo, si può concludere facilmente che ogni punto limite della successione è una soluzione del problema di Cauchy in considerazione?

Argomentare ogni risposta.

*Punteggi indicativi: 4+4+8+2, 8+2+4+3+6, 3+2+15*

---

## Appello del 27 giugno 2011

**1** Data l'equazione differenziale

$$y' = \sqrt{y^2 + t^2} - 2t$$

a) studiare l'esistenza e l'unicità locale ed eventualmente globale delle soluzioni;

b) trovare le regioni dove le soluzioni sono crescenti/decrescenti e rappresentarle nel piano $t - y$;

c) sia d'ora in avanti $y(t)$ la soluzione del problema di Cauchy con condizione iniziale $y(0) = -1$. Dimostrare che $y$ è globalmente definita e definitivamente monotona per $t \to -\infty$ e per $t \to +\infty$ (Suggerimento: potrebbe risultare utile applicare opportunamente il teorema del confronto);

d) calcolare i limiti $\lim_{t\to+\infty} y(t)$ e $\lim_{t\to-\infty} y(t)$.

e) Esistono soluzioni che tendono a $+\infty$ in tempo finito? E in tempo infinito? Esistono soluzioni che tendono a $+\infty$ esponenzialmente?

**2** Data la matrice
$$A := \begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 \\ 0 & -3 & 2 \\ 1 & -2 & 2 \end{pmatrix}$$

a) calcolare la matrice fondamentale $e^{tA}$ e utilizzarla per trovare la generica soluzione del sistema di equazioni differenziali $y' = Ay$;

b) dati $b(t) = (2e^t, 0, 0)^T$ e $y_0 = (2, -1, 0)^T$, trovare la soluzione del problema di Cauchy
$$\begin{cases} y' = Ay + b(t) \\ y(0) = y_0. \end{cases}$$

**3** Data l'equazione differenziale $y' = f(y)$ con $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ localmente lipschitziana, dimostrare che ogni soluzione è strettamente monotona oppure è un equilibrio. È ancora vero se $f$ è solamente continua?

*Punteggi indicativi: 5+2+6+3+10, 8+5, 6*

---

## Appello del 7 settembre 2011

**1** Dato il sistema di equazioni differenziali nel piano
$$\begin{cases} x' = 2x - 2y - x^2 - x\sqrt{x^2 + y^2} \\ y' = 2x + 2y - xy - y\sqrt{x^2 + y^2}, \end{cases}$$

a) verificare che ammette esistenza ed unicità locale per le soluzioni dei problemi di Cauchy associati; valgono anche le ipotesi del teorema di esistenza globale?

b) dimostrare che $(0, 0)$ è l'unico equilibrio del sistema;

c) trasformare il sistema in coordinate polari e calcolare esplicitamente le soluzioni non nulle;

d) studiare il dominio di definizione $]\alpha, \beta[$ delle soluzioni e il comportamento (eventualmente il limite) per $t \to \alpha^+$;

e) dimostrare che il sistema ammette un'unica soluzione periodica non banale (si può anche verificare che tale orbita è un'ellisse e trovarne la relativa equazione) e che la distanza tra ogni altra soluzione (non nulla) e l'orbita $\mathcal{O}$ di quella periodica converge a 0 per $t \to \beta^-$.

**2** Data la matrice
$$A := \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & -2 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 2 & -3 \end{pmatrix}$$

a) calcolare la matrice fondamentale $e^{tA}$ e utilizzarla per trovare la generica soluzione del sistema di equazioni differenziali $y' = Ay$;

b) dato $b = (0, 1, 0, 1)^T$ calcolare esplicitamente la soluzione del problema di Cauchy
$$\begin{cases} y' = Ay + b \\ y(0) = 0. \end{cases}$$

*Punteggi indicativi: 4+3+12+5+8, 6+5*

---

## Appello del 19 settembre 2011

$\boxed{1}$ Dimostrare la seguente generalizzazione del Criterio dell'asintoto: **Teorema.** Sia $g : [a, +\infty[ \to \mathbb{R}$ derivabile tale che ammetta finito il limite per $t \to +\infty$. Allora

i) $\liminf_{t\to+\infty} g'(t) \leq 0$, e $\limsup_{t\to+\infty} g'(t) \geq 0$;

ii) se $g'$ è continua, l'integrale $\int_{t_0}^{+\infty} g'(s)\, ds$ converge.

Riottenere come corollario il criterio dell'asintoto.

$\boxed{2}$ Data l'equazione differenziale

$$y' = \operatorname{sen} t - y^5$$

a) studiare l'esistenza e l'unicità locale delle soluzioni. Valgono anche le ipotesi del teorema di esistenza globale?

b) trovare gli eventuali equilibri e le regioni del piano $t{-}y$ dove le soluzioni sono crescenti/decrescenti;

c) dimostrare che esiste $T > 0$ tale che se $y(t)$ è soluzione lo è anche $z(t) := y(t + T)$. Determinare il più piccolo di tali $T > 0$. È vero che le soluzioni sono tutte $T$-periodiche?

d) trovare le funzioni costanti che sono soprasoluzioni e quelle che sono sottosoluzioni per $t \geq t_0$;

e) verificare che tutte le soluzioni sono globalmente definite in futuro (suggerimento: utilizzare opportunamente il criterio di compattezza e/o avvalersi di sopra/sottosoluzioni);

f) dimostrare che nessuna soluzione ha limite per $t \to +\infty$ (suggerimento: utilizzare l'esercizio 1; alternativamente dimostrare che l'oscillazione di ogni soluzione in $[2k\pi, (2k{+}1)\pi]$ è uniformemente positiva per $k \to +\infty$);

g) dimostrare che l'orbita di ciascuna soluzione è definitivamente contenuta nell'intervallo $[-1, 1]$ in futuro (suggerimento: utilizzare il punto f); alternativamente utilizzare il punto c) e l'unicità delle soluzioni dei problemi di Cauchy);

h) dato $y(t_0) = y_0$ con $|y_0| > 1$, studiare l'intervallo massimale d'esistenza $]\alpha, \beta[$ della relativa soluzione e calcolare, qualora esista, il $\lim_{t\to\alpha^+} y(t)$.

$\boxed{3}$ Data la matrice

$$A := \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

calcolare la matrice fondamentale $e^{tA}$ e utilizzarla per trovare la soluzione del sistema di equazioni differenziali $y' = Ay$ con dati iniziali $y(1) = (1, 0, -1)^T$.

*Punteggi indicativi: 6+2, 3+3+3+2+4+10+6+3, 8*