Università degli Studi di Udine Anno Accademico 2010/2011

Facoltà di Scienze Matematiche, Fisiche e Naturali
Corso di Laurea Magistrale in Matematica

Programma del Corso di Analisi Superiore I
Docente: Paolo Baiti

Preliminari e strumenti matematici. Richiami sull'integrale di Lebesgue. Il teorema di continuità e derivabilità per integrali dipendenti da un parametro. I teoremi di Fubini e Tonelli (senza dim). Cambiamento di variabili per l'integrale di Lebesgue (senza dim). La funzione gamma di Eulero sui numeri reali positivi; proprietà fondamentali. Integrazione di funzioni su varietà parametriche. La formula di integrazione sulle sfere. Il calcolo del volume della palla n-dimensionale e della misura della sfera $(n-1)$-dimensionale. Punti regolari e frontiera regolare di un aperto di $\mathbb{R}^n$. Il vettore unitario normale. Teorema della divergenza (senza dim). Teorema del gradiente. Formula di integrazione per parti. Formule di Green.

Il prodotto di convoluzione. Il prodotto di convoluzione. Convoluzione di funzioni L^1. La convoluzione e la derivazione. I nuclei di convoluzione. Unità approssimate. Convoluzione con mollificatori. Approssimazione di funzioni integrabili mediante funzioni C^∞ e C^∞ a supporto compatto. Il teorema fondamentale del calcolo delle variazioni (senza dimostrazione).

Serie di Fourier trigonometriche. Richiami sugli spazi di Hilbert e sulle serie di Fourier. Basi ortogonali e ortonormali. Disuguaglianza di Bessel e uguaglianza di Parseval (senza dimostrazione). Serie di Fourier trigonometriche. Serie di Fourier in L^2 e completezza della base trigonometrica (senza dimostrazione). Lemma di Riemann-Lebesgue. Sviluppo in serie di seni e di coseni. Teoremi sulla convergenza uniforme delle serie di Fourier. Cenni alla convergenza puntuale delle serie di Fourier. Esempi di calcolo.

La trasformata di Fourier. La trasformata di Fourier in L^1. Proprietà della trasformata di Fourier. La trasformata di Fourier e la derivazione. Inversione della trasformata di Fourier. La trasformata di Fourier nello spazio di Schwartz e in L^2. Il teorema di Plancherel. Esempi.

Le equazioni differenziali alle derivate parziali. Equazioni differenziali alle derivate parziali di ordine k (PDE). Il concetto di soluzione classica. Il problema di Dirichlet e il problema di Neumann. Equazioni lineari, semilineari, quasilineari e totalmente nonlineari. Alcuni esempi di PDE. Il principio di sovrapposizione ed altre proprietà per le equazioni lineari. La nozione di problema ben posto. Unicità per problemi lineari.

Il metodo di separazione delle variabili. Introduzione al metodo. Applicazioni del metodo: il problema misto per l'equazione del calore unidimensionale omogenea con condizioni nulle al bordo; il problema della corda vibrante fissata ai due estremi. Estensione del metodo di separazione delle variabili: il metodo di Fourier per il problema misto per l'equazione del calore unidimensionale non omogenea.

L'equazione del trasporto. L'equazione lineare omogenea del trasporto a coefficienti costanti: il problema ai valori iniziali e la formula risolutiva nel caso dei dati di classe C^1. L'equazione lineare non omogenea del trasporto a coefficienti costanti: il problema ai valori iniziali e la formula risolutiva nel caso dei dati di classe C^1. Il principio di Duhamel per problemi lineari di evoluzione. Applicazioni del principio di Duhamel al caso dell'equazione del trasporto. Unicità della soluzione e dipendenza continua rispetto ai dati iniziali. Il problema di Cauchy per l'equazione semilineare del trasporto: il metodo delle caratteristiche. Esempi ed esercizi.

L'equazione di Laplace e l'equazione di Poisson. L'equazione di Laplace e l'equazione di Poisson. Le funzioni armoniche. Il caso di dimensione 1. Il caso di dimensione 2: relazione con le funzioni olomorfe. Il Laplaciano è invariante per rotazioni. Le soluzioni a simmetria radiale. La soluzione fondamentale dell'equazione di Laplace. Funzioni sub- e super-armoniche. Il principio debole del massimo per funzioni sub-armoniche, e il principio debole del minimo per funzioni super-armoniche. Unicità e dipendenza continua dai dati della soluzione classica del problema di Dirichlet per l'equazione di Poisson su aperti limitati. La formula di rappresentazione integrale di Green. Il problema di Dirichlet per il Laplaciano e la funzione di Green. La funzione di Green e il nucleo di Poisson sulla palla. Proprietà della funzione di Green. Simmetria della funzione di Green (senza dim). Il nucleo di Poisson sulla palla e sue proprietà. Il problema di Dirichlet per il Laplaciano sulla palla con dati continui al bordo: esistenza ed unicità. Cenni al caso dei dati non continui. Un esempio di equazione di Poisson in $\mathbb{R}^n$. Il problema di Dirichlet per l'equazione di Poisson: formula di rappresentazione. I teoremi delle medie integrali per le funzioni armoniche. La regolarità delle funzioni armoniche. Il principio del massimo e minimo forte per le funzioni armoniche. Il teorema di Liouville. Il metodo dell'energia. Il principio di Dirichlet.

L'equazione del calore. Introduzione all'equazione del calore. La soluzione fondamentale e le sue proprietà. Formula risolutiva per il problema omogeneo ai valori iniziali per l'equazione del calore. Velocità infinita di propagazione. L'equazione del calore su domini limitati. Il principio del massimo debole. Unicità della soluzione su domini limitati e dipendenza continua dai dati. Il problema non omogeneo ai valori iniziali per l'equazione del calore. Il metodo dell'energia. Principio del massimo in $\mathbb{R}^n$ (senza dim). Teorema di unicità delle soluzioni per il problema di Cauchy. Regolarità delle soluzioni (senza dim). Soluzione del problema misto per la barra semi-infinita e per la barra finita con dati omogenei al bordo.

L'equazione delle onde. Introduzione all'equazione delle onde. Il problema omogeneo ai valori iniziali nel caso unidimensionale: la formula di d'Alembert. Il dominio di dipendenza e il cono di influenza. Velocità finita di propagazione. Il caso della corda vibrante fissata ad un estremo; il metodo di riflessione. Formula risolutiva per il problema la corda vibrante fissata ad un estremo. Il problema omogeneo ai valori iniziali nel caso $n = 3$: il metodo delle medie sferiche. Il problema omogeneo ai valori iniziali nel caso $n = 2$: il metodo della discesa. Cenni al caso $n \geq 4$. Il principio di Huygens. Il problema non omogeneo ai valori iniziali. L'unicità delle soluzioni per il problema misto e per il problema ai valori iniziali. Il metodo dell'energia. Dominio di dipendenza e velocità finita di propagazione.