Università degli Studi di Udine — Anno Accademico 2010/2011

Facoltà di Agraria
Corsi di Laurea in VIT e STAL

Esercitazioni di Matematica

20 gennaio 2011

$\boxed{\mathbf{1}}$ Calcolare i seguenti integrali definiti

$$\int_{-2}^{1} (4x^3 + 2x^2 - 1)\, dx, \qquad \int_0^2 \frac{1-3x}{4+x^2}\, dx.$$

$\boxed{\mathbf{2}}$ Calcolare i seguenti integrali mediante il metodo di integrazione per parti

$$\int (x - 3x^2)\mathrm{e}^{3x}\, dx, \qquad \int_1^{\mathrm{e}} x^2 \ln x\, dx, \qquad \int \mathrm{e}^{-x} \cos(3x)\, dx.$$

$\boxed{\mathbf{3}}$ Determinare la soluzione del problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' = 3y + t \\ y(0) = 1 \end{cases} \qquad t \in \mathbb{R}.$$

$\boxed{\mathbf{4}}$ Determinare la soluzione del problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' = \dfrac{\sqrt{7+y^2}}{yt} \\ y(\mathrm{e}) = 3 \end{cases} \qquad t > 1.$$

$\boxed{\mathbf{5}}$ Determinare la soluzione del problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' = \dfrac{y - t^4 \operatorname{sen} y}{\mathrm{e}^y + t^2} \\ y(0) = 0 \end{cases} \qquad t \in \mathbb{R}.$$

Soluzioni degli esercizi del 20 gennaio 2011

$\boxed{1}$ Per il teorema fondamentale del calcolo si ha

$$\int_{-2}^{1}(4x^3+2x^2-1)\,dx=\Big[x^4+\frac{2}{3}x^3-x\Big]_{-2}^{1}=\Big(1+\frac{2}{3}-1\Big)-\Big(16-\frac{16}{3}+2\Big)=-12.$$

Relativamente al secondo integrale, utilizzando la seconda tabella si ottiene

$$\int\frac{1-3x}{4+x^2}\,dx=\int\frac{1}{4+x^2}\,dx-\frac{3}{2}\int\frac{(4+x^2)'}{4+x^2}\,dx=\frac{1}{2}\operatorname{arctg}(x/2)-\frac{3}{2}\ln(4+x^2)+c,$$

dunque $\frac{1}{2}\operatorname{arctg}(x/2)-\frac{3}{2}\ln(4+x^2)$ è una primitiva della funzione integranda e, sempre per il teorema fondamentale del calcolo si ha

$$\int_0^2\frac{1-3x}{4+x^2}\,dx=\Big[\frac{1}{2}\operatorname{arctg}(x/2)-\frac{3}{2}\ln(4+x^2)\Big]_0^2=\big(\frac{1}{2}\frac{\pi}{4}-\frac{3}{2}\ln 8\big)-\big(0-\frac{3}{2}\ln 4\big)=\frac{\pi-12\ln 2}{8}.$$

$\boxed{2}$ Poiché $H(x)=\mathrm{e}^{3x}/3$ è una primitiva della funzione $h(x)=\mathrm{e}^{3x}$, mediante il metodo per parti si ottiene

$$\begin{aligned}\int(x-3x^2)\mathrm{e}^{3x}\,dx&=(x-3x^2)\frac{\mathrm{e}^{3x}}{3}-\int(1-6x)\frac{\mathrm{e}^{3x}}{3}\,dx\\&=(x-3x^2)\frac{\mathrm{e}^{3x}}{3}-\Big((1-6x)\frac{\mathrm{e}^{3x}}{9}-\int(-6)\frac{\mathrm{e}^{3x}}{9}\,dx\Big)\\&=(x-3x^2)\frac{\mathrm{e}^{3x}}{3}-(1-6x)\frac{\mathrm{e}^{3x}}{9}-\frac{6}{27}\mathrm{e}^{3x}+c=\Big(-x^2+x-\frac{1}{3}\Big)\mathrm{e}^{3x}+c.\end{aligned}$$

Il secondo integrale

$$\int_1^{\mathrm{e}}x^2\ln x\,dx=\Big[\frac{x^3}{3}\ln x\Big]_1^{\mathrm{e}}-\int_1^{\mathrm{e}}\frac{x^3}{3}\frac{1}{x}\,dx=\frac{\mathrm{e}^3}{3}-\int_1^{\mathrm{e}}\frac{x^2}{3}\,dx=\frac{\mathrm{e}^3}{3}-\Big[\frac{x^3}{9}\Big]_1^{\mathrm{e}}=\frac{\mathrm{e}^3+1}{9}.$$

Poiché $H(x)=-\mathrm{e}^{-x}$ è una primitiva della funzione $h(x)=\mathrm{e}^{-x}$, applicando due volte il metodo per parti al terzo integrale si ottiene

$$\begin{aligned}\int\mathrm{e}^{-x}\cos(3x)\,dx&=-\mathrm{e}^{-x}\cos(3x)-\int(-\mathrm{e}^{-x})(-\operatorname{sen}(3x)\cdot 3)\,dx\\&=-\mathrm{e}^{-x}\cos(3x)-3\int\mathrm{e}^{-x}\operatorname{sen}(3x)\,dx\\&=-\mathrm{e}^{-x}\cos(3x)-3\Big(-\mathrm{e}^{-x}\operatorname{sen}(3x)-\int(-\mathrm{e}^{-x})\cos(3x)3\,dx\Big)\\&=-\mathrm{e}^{-x}\cos(3x)+3\mathrm{e}^{-x}\operatorname{sen}(3x)-9\int\mathrm{e}^{-x}\cos(3x)\,dx.\end{aligned}$$

L'integrale cercato $I:=\int\mathrm{e}^{-x}\cos(3x)\,dx$ è quindi soluzione dell'equazione

$$I=-\mathrm{e}^{-x}\cos(3x)+3\mathrm{e}^{-x}\operatorname{sen}(3x)-9I\qquad\Longrightarrow\qquad I=\frac{1}{10}\mathrm{e}^{-x}\big(3\operatorname{sen}(3x)-\cos(3x)\big)+c.$$

$\boxed{3}$ Si ricorda che la soluzione generale dell'equazione lineare $y'=a(t)y+b(t)$ con $a(t),b(t)$ funzioni continue, è

$$y(t)=\mathrm{e}^{A(t)}\int\mathrm{e}^{-A(t)}b(t)\,dt$$

dove $A(t)$ è una primitiva di $a(t)$. Nel nostro caso $a(t) = 3$ e una sua primitiva è ad esempio $A(t) = 3t$. La soluzione generale è dunque

$$y(t) = \mathrm{e}^{3t} \int \mathrm{e}^{-3t} t\, dt.$$

Applicando il metodo per parti si calcola

$$\int \mathrm{e}^{-3t} t\, dt = \frac{\mathrm{e}^{-3t}}{-3} t - \int \frac{\mathrm{e}^{-3t}}{-3}\, dt = -\frac{\mathrm{e}^{-3t}}{3} t - \frac{\mathrm{e}^{-3t}}{9} + c,$$

con c generica costante d'integrazione, perciò

$$y(t) = \mathrm{e}^{3t}\Big(-\frac{\mathrm{e}^{-3t}}{3} t - \frac{\mathrm{e}^{-3t}}{9} + c\Big) = -\frac{t}{3} - \frac{1}{9} + c\,\mathrm{e}^{3t}.$$

Imponendo ora la condizione iniziale $y(0) = 1$, si ottiene l'equazione $1 = -\frac{1}{9} + c$ quindi $c = 10/9$ e la soluzione del problema di Cauchy assegnato è data da $y(t) = -\frac{t}{3} - \frac{1}{9} + \frac{10}{9}\mathrm{e}^{3t}$.

$\boxed{4}$ Scrivendo $y' = \frac{dy}{dt}$ e utilizzando il metodo di separazione delle variabili si ha

$$\frac{y}{\sqrt{7+y^2}}\, dy = \frac{1}{t}\, dt$$

e integrando, ricordando che $t > 1$, si ottiene

$$\int \frac{y}{\sqrt{7+y^2}}\, dy = \int \frac{1}{t}\, dt \qquad \Longrightarrow \qquad \sqrt{7+y^2} = \ln t + c \tag{1}$$

dove c è la generica costante d'integrazione. Affinché l'equazione abbia senso il secondo membro dovrà essere ≥ 0 per ogni $t > 1$, il che accade se e solo se $c \geq 0$. Risolvendo allora l'ultima equazione nell'incognita y si ottiene

$$7 + y^2 = (\ln t + c)^2 \qquad \Longrightarrow \qquad y^2 = (\ln t + c)^2 - 7.$$

Affinché l'equazione abbia senso il secondo membro dovrà essere ≥ 0 per ogni $t > 1$, il che accade se e solo se $c \geq \sqrt{7}$. Osservando che per la condizione iniziale $y(\mathrm{e}) = 3$ si deduce che y dovrà essere positiva in un intorno di $y_0 = \mathrm{e}$, si ottiene infine la soluzione generale

$$y = y(t) = \sqrt{(\ln t + c)^2 - 7}, \qquad c \geq \sqrt{7}$$

Imponendo ora la condizione $y(\mathrm{e}) = 3$ in (1) (oppure in quest'ultima equazione, con la condizione $c \geq \sqrt{7}$) si ottiene $\sqrt{7+9} = \ln \mathrm{e} + c$ da cui $c = 3$. La soluzione è quindi

$$y(t) = \sqrt{(\ln t + 3)^2 - 7} = \sqrt{\ln^2 t + 6 \ln t + 2}.$$

Alternativamente, si poteva utilizzare direttamente la formula risolutiva per le equazioni a variabili separabili (insieme alla formula fondamentale del calcolo integrale)

$$\int_3^y \frac{z}{\sqrt{7+z^2}}\, dz = \int_{\mathrm{e}}^t \frac{1}{s}\, ds \quad \Longrightarrow \quad \Big[\sqrt{7+z^2}\Big]_3^y = [\ln s]_{\mathrm{e}}^t \quad \Longrightarrow \quad \sqrt{7+y^2} - 4 = \ln t - 1$$

che risolta rispetto a y fornisce la soluzione cercata.

$\boxed{5}$ La funzione $f(t, y) = \frac{y - t^4 \operatorname{sen} y}{\mathrm{e}^y + t^2}$ è definita per ogni t, y e derivabile rispetto a y e t dunque l'equazione differenziale ammette un'unica soluzione. Si osservi che la funzione nulla $y(t) \equiv 0$ per ogni t, è soluzione dell'equazione e verifica le condizioni iniziali, dunque è la soluzione cercata.