Università degli Studi di Udine — Anno Accademico 2010/2011

Facoltà di Agraria
Corsi di Laurea in VIT e STAL

Esercitazioni di Matematica

11 gennaio 2011

1 Calcolare i seguenti integrali

$$\int (4x^5 - 3x + 8x^7)\,dx, \qquad \int \left(2\cos x - \frac{3}{\sqrt{1-x^2}} - 5^x\right) dx, \qquad \int \left(\sqrt{x} - \frac{1}{\sqrt{x}}\right)^2 dx,$$

$$\int \frac{3-5x}{1+x^2}\,dx, \qquad \int \cos^3 x \,\mathrm{sen}\, x\,dx, \qquad \int 3x\sqrt{x^2+1}\,dx, \qquad \int \frac{\ln^2 x}{x}\,dx.$$

2 Data l'equazione differenziale

$$y' = \frac{\mathrm{e}^t - 2t}{y^4}$$

dire se la funzione $y(t) = 3t + 1$ è soluzione dell'equazione in $]0, +\infty[$;

3 Dato il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' = 2y + 5 \\ y(0) = 1 \end{cases} \qquad t \in \mathbb{R}$$

a) dire se la funzione $y(t) = -\frac{5}{2}$ è soluzione del problema;

b) determinare la soluzione del problema, qualora non lo sia la funzione di cui al punto a).

Soluzioni degli esercizi del 11 gennaio 2011

$\boxed{\mathbf{1}}$ Per la proprietà di linearità e consultando la prima tabella si ottiene

$$\int (4x^5 - 3x + 8x^7)\,dx = 4\int x^5\,dx - 3\int x\,dx + 8\int x^7\,dx = 4\frac{x^6}{6} - 3\frac{x^2}{2} + 8\frac{x^8}{8} + c,$$

$$\begin{aligned}\int \Big(2\cos x - \frac{3}{\sqrt{1-x^2}} - 5^x\Big)\,dx &= 2\int \cos x\,dx - 3\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx - \int 5^x\,dx \\ &= 2\,\mathrm{sen}\,x - 3\,\mathrm{arcsen}\,x - \frac{5^x}{\ln 5} + c,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\int \Big(\sqrt{x} - \frac{1}{\sqrt{x}}\Big)^2 dx &= \int \Big(x - 2 + \frac{1}{x}\Big)\,dx = \int x\,dx - \int 2\,dx + \int \frac{1}{x}\,dx \\ &= \frac{x^2}{2} - 2x + \ln|x| + c.\end{aligned}$$

Utilizzando anche la seconda tabella si ha

$$\begin{aligned}\int \frac{3-5x}{1+x^2}\,dx &= 3\int \frac{1}{1+x^2}\,dx - \frac{5}{2}\int \frac{2x}{1+x^2}\,dx \\ &= 3\,\mathrm{arctg}\,x - \frac{5}{2}\int \frac{(1+x^2)'}{1+x^2}\,dx = 3\,\mathrm{arctg}\,x - \frac{5}{2}\ln(1+x^2) + c,\end{aligned}$$

$$\int \cos^3 x\,\mathrm{sen}\,x\,dx = -\int \cos^3 x\,(\cos x)'\,dx = -\frac{\cos^4 x}{4} + c,$$

$$\begin{aligned}\int 3x\sqrt{x^2+1}\,dx &= \frac{3}{2}\int 2x\sqrt{x^2+1}\,dx = \frac{3}{2}\int (x^2+1)'(x^2+1)^{1/2}\,dx \\ &= \frac{3}{2}\frac{(x^2+1)^{3/2}}{3/2} + c = \sqrt{(x^2+1)^3} + c,\end{aligned}$$

$$\int \frac{\ln^2 x}{x}\,dx = \int (\ln x)^2(\ln x)'\,dx = \frac{(\ln x)^3}{3} + c.$$

$\boxed{\mathbf{2}}$ Si ha $y'(t) = 3$ e sostituendo si ottiene l'equazione

$$3 = \frac{e^t - 2t}{(3t+1)^4}$$

che non è identicamente vera per $t > 0$ (ad esempio, per $t = 1$ si ottiene $3 \neq \frac{e-2}{4^4} < 1$). La funzione non è dunque soluzione.

$\boxed{\mathbf{3}}$ a) Si ha $y'(t) = 0$ e sostituendo si ottiene

$$0 = 2\big(-\frac{5}{2}\big) + 5$$

che è identicamente soddisfatta per $t \in \mathbb{R}$. La funzione è dunque soluzione della prima equazione. Tuttavia $y(0) \neq 1$ perciò non verifica le condizioni iniziali, quindi non è soluzione del problema di Cauchy.

b) Si ricorda che la soluzione generale dell'equazione lineare a coefficienti costanti

$$y' = ay + b$$

con $a, b \in \mathbb{R}$, è

$$y(t) = c\mathrm{e}^{at} - \frac{b}{a}$$

al variare di $c \in \mathbb{R}$. Nel caso in considerazione si trova $y(t) = c\mathrm{e}^{2t} - \frac{5}{2}$. Imponendo la condizione iniziale si ottiene l'equazione $1 = c - \frac{5}{2}$ da cui $c = \frac{7}{2}$. La soluzione del problema di Cauchy è dunque

$$y(t) = \frac{7}{2}\mathrm{e}^{2t} - \frac{5}{2}.$$