Università degli Studi di Udine — Anno Accademico 2010/2011

Facoltà di Agraria
Corsi di Laurea in VIT e STAL

Esercitazioni di Matematica

21 dicembre 2010

$\boxed{1}$ Per l'equazione differenziale

$$y' = \frac{3t^2+1}{y^4}$$

verificare se le seguenti funzioni sono soluzioni in $\mathbb{R}^+$:

a) $y_1(t) = t^3 + t,$ **b)** $y_2(t) = \sqrt[5]{5t^3+5t+1},$

$\boxed{2}$ Verificare che la funzione $y(t) = -t\mathrm{e}^{-2t}$ è soluzione dell'equazione differenziale

$$y'' + 3y' + 2y - \mathrm{e}^{-2t} = 0.$$

Di quale tipo di equazione si tratta?

$\boxed{3}$ Trovare la soluzione del problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' = -2y + 3 \\ y(1) = 4. \end{cases}$$

$\boxed{4}$ Data la funzione

$$g(x) = \frac{x^2}{\ln x}$$

a) determinare il dominio;
b) studiare il segno di g;
c) calcolare i limiti agli estremi del dominio;
d) trovare gli eventuali asintoti;
e) determinare gli intervalli dove la funzione è crescente e quelli dove la funzione è decrescente, gli eventuali punti di massimo/minimo relativo e/o assoluto;
f) determinare gli intervalli dove la funzione è concava e quelli dove la funzione è convessa;
g) tracciare l'andamento qualitativo del grafico di g.

Soluzioni degli esercizi del 21 dicembre 2010

1 a) La funzione $y_1(t)$ è definita e derivabile in $\mathbb{R}^+$ ed è soluzione dell'equazione se verifica $y_1'(t) = \frac{3t^2+1}{y_1^4(t)}$ per ogni $t > 0$. Essendo $y_1'(t) = 3t^2 + 1$, ciò accade se e solo se

$$3t^2 + 1 = \frac{3t^2 + 1}{t^3 + t},$$

per ogni $t > 0$. Si osserva che sostituendo (ad esempio) $t = 1$ si ottiene $4 \neq 2$ quindi y_1 non è soluzione dell'equazione.

b) La funzione $y_2(t)$ è definita e derivabile in $\mathbb{R}^+$ ed è soluzione dell'equazione se verifica $y_2'(t) = \frac{3t^2+1}{y_2^4(t)}$ per ogni $t > 0$. Poiché

$$y_2'(t) = \left((5t^3 + 5t + 1)^{1/5}\right)' = \frac{1}{5}(5t^3 + 5t + 1)^{-4/5}(15t^2 + 5) = \frac{3t^2 + 1}{(\sqrt[5]{5t^3 + 5t + 1})^4},$$

$$\frac{3t^2 + 1}{y_2^4(t)} = \frac{3t^2 + 1}{(\sqrt[5]{5t^3 + 5t + 1})^4},$$

in conclusione si ha che $y_2'(t) = \frac{3t^2+1}{y_2^4(t)}$ per ogni $t \in \mathbb{R}^+$, dunque y_2 è soluzione.

2 a) Si tratta di un'equazione differenziale lineare di ordine 2. Derivando si ottiene

$$y'(t) = -\mathrm{e}^{-2t} - t\mathrm{e}^{-2t}(-2) = (2t - 1)\mathrm{e}^{-2t}, \qquad y''(t) = 2\mathrm{e}^{-2t} + (2t - 1)\mathrm{e}^{-2t}(-2) = (4 - 4t)\mathrm{e}^{-2t},$$

e sostituendo nell'equazione si ha

$$y''(t) + 3y'(t) + 2y(t) - \mathrm{e}^{-2t} = (4 - 4t)\mathrm{e}^{-2t} + 3(2t - 1)\mathrm{e}^{-2t} - 2t\mathrm{e}^{-2t} - \mathrm{e}^{-2t} = 0$$

per ogni $t \in \mathbb{R}$, dunque y è soluzione.

3 La soluzione generale dell'equazione $y' = -2y + 3$ è $y(t) = c\mathrm{e}^{-2t} + \frac{3}{2}$ con $c \in \mathbb{R}$. Imponendo la condizione iniziale si ottiene l'equazione $4 = c\mathrm{e}^{-2} + \frac{3}{2}$ che ha soluzione $c = \frac{5}{2}\mathrm{e}^2$. La soluzione del problema di Cauchy è dunque

$$y(t) = \frac{5}{2}\mathrm{e}^2\mathrm{e}^{-2t} + \frac{3}{2} = \frac{5}{2}\mathrm{e}^{2(1-t)} + \frac{3}{2}.$$

4 a) Le condizioni d'esistenza sono $x > 0$ (esistenza del ln) e $\ln x \neq 0$ (denominatore diverso da 0). Il dominio è quindi $\mathcal{D} =]0, 1[\cup]1, +\infty[$. La funzione è ivi continua e derivabile.

b) Il denominatore è strettamente positivo nel dominio, dunque g è positiva se e solo se $\ln x > 0$ cioè $x > 1$, mentre è negativa per $x \in]0, 1[$.

c) Ha senso calcolare i limiti in $x = 0$, $x = 1$ e a $+\infty$. Si ha

$$\lim_{x \to 1^\pm} \frac{x^2}{\ln x} = \left[\frac{1}{0^\pm}\right] = \pm\infty, \qquad \lim_{x \to 0^+} \frac{x^2}{\ln x} = \left[\frac{0}{-\infty}\right] = 0,$$

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{x^2}{\ln x} = \left[\frac{+\infty}{+\infty}\right] \overset{H}{=} \lim_{x \to +\infty} \frac{2x}{1/x} = +\infty,$$

perciò g non ammette massimo né minimo assoluti.

d) Dal punto c) segue che la retta $x = 1$ è asintoto verticale. Essendo inoltre

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{g(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x}{\ln x} = \left[\frac{+\infty}{+\infty}\right] \stackrel{H}{=} \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{1/x} = +\infty,$$

non ci sono asintoti obliqui a $+\infty$.

e) La derivata prima è

$$g'(x) = \frac{2x\ln x - x^2\frac{1}{x}}{\ln^2 x} = \frac{x(2\ln x - 1)}{\ln^2 x}.$$

Restringendoci al dominio, si ha che $g'(x) \geq 0$ se e solo se $2\ln x - 1 \geq 0$, ovvero $x \geq \mathrm{e}^{1/2}$. Quindi

$$g'(x) \begin{cases} > 0, & \text{se } x \in]\mathrm{e}^{1/2}, +\infty[, \\ = 0, & \text{se } x = \mathrm{e}^{1/2}, \\ < 0, & \text{se } x \in]0, 1[\cup]1, \mathrm{e}^{1/2}[. \end{cases}$$

La funzione è quindi crescente in $]\mathrm{e}^{1/2}, +\infty[$, decrescente in $]0, 1[$ e in $]1, \mathrm{e}^{1/2}[$. In $x = \mathrm{e}^{1/2}$ ammette un minimo relativo.

f) La derivata seconda è

$$g''(x) = \frac{((2\ln x - 1) + x\frac{2}{x})\ln^2 x - (2x\ln x - x)\frac{2\ln x}{x}}{\ln^4 x} = \frac{2\ln^2 x - 3\ln x + 2}{\ln^3 x}.$$

Poiché $2t^2 - 3t + 2 > 0$ per ogni t, si ha che il numeratore è sempre positivo, quindi $g''(x) > 0$ se e solo se $\ln^3 x > 0$ cioè $x > 1$. In definitiva la funzione è concava in $]0, 1[$, mentre è convessa in $]1, +\infty[$.