Università degli Studi di Udine — Anno Accademico 2010/2011

Facoltà di Agraria
Corsi di Laurea in VIT e STAL

Esercitazioni di Matematica

14 dicembre 2010

1 Data la funzione

$$g(x) = \frac{2x^2 - 2x + 5}{(x-1)^2}$$

a) determinare il dominio;

b) studiare il segno di g;

c) calcolare i limiti agli estremi del dominio;

d) determinare gli intervalli dove la funzione è crescente e quelli dove la funzione è decrescente, gli eventuali punti di massimo/minimo relativo e/o assoluto;

e) calcolare l'equazione della retta tangente al grafico nel punto di ascissa $x_0 = 2$;

f) determinare gli intervalli dove la funzione è concava e quelli dove la funzione è convessa;

g) tracciare l'andamento qualitativo del grafico di g.

2 Data la funzione

$$g(x) = x\mathrm{e}^{-x^2}$$

a) determinare il dominio;

b) studiare il segno di g;

c) calcolare i limiti di g negli eventuali punti di discontinuità e agli estremi del dominio;

d) determinare gli intervalli dove la funzione è crescente e quelli dove la funzione è decrescente, gli eventuali punti di massimo/minimo relativo e/o assoluto;

e) studiare gli eventuali asintoti di g;

f) determinare gli intervalli dove la funzione è concava e quelli dove la funzione è convessa;

g) tracciare l'andamento qualitativo del grafico di g.

Soluzioni degli esercizi del 14 dicembre 2010

$\boxed{1}$ a) Il dominio è dato dagli $x \in \mathbb{R}$ per cui $(x-1)^2 \neq 0$, ovvero $\mathcal{D} = \mathbb{R} \setminus \{1\}$. La funzione (razionale) è ivi continua e derivabile.

b) Il numeratore è ≥ 0 se e solo se $2x^2 - 2x + 5 > 0$, disuguaglianza sempre vera. Il denominatore è positivo nel dominio. Allora la funzione è sempre positiva.

c) Ha senso andare a studiare i limiti in 1 e a $\pm\infty$. Utilizzando anche il punto b) si ottiene

$$\lim_{x\to\pm\infty} g(x) = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{2-2x+5/x^2}{(1-1/x)^2} = 2, \qquad \lim_{x\to 1^\pm} g(x) = \left[\frac{5}{0^+}\right] = +\infty,$$

quindi la funzione non ammette massimo.

d) La derivata prima è

$$\begin{aligned} g'(x) &= \frac{(4x-2)(x-1)^2 - (2x^2-2x+5)2(x-1)}{(x-1)^4} \\ &= \frac{(4x-2)(x-1) - (2x^2-2x+5)2}{(x-1)^3} = \frac{-2x-8}{(x-1)^3}. \end{aligned}$$

Il numeratore è ≥ 0 se e solo se $x \leq -4$, il denominatore è positivo se $x > 1$, quindi

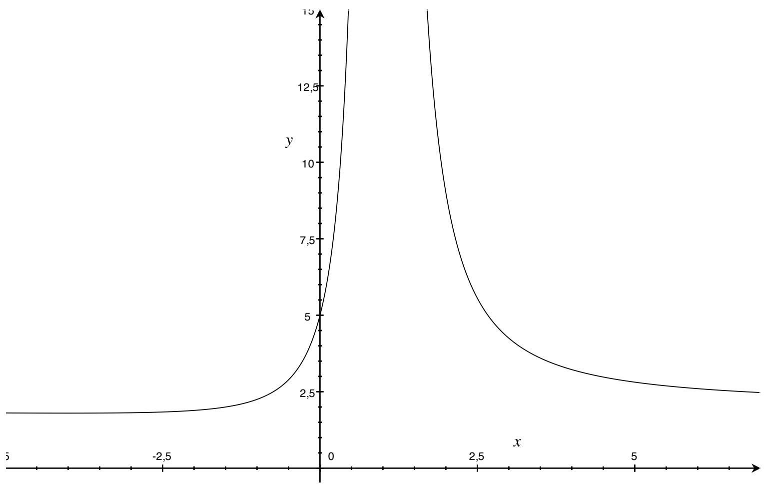
$$g'(x) = \begin{cases} > 0, & \text{se } x \in]-4, 1[, \\ = 0, & \text{se } x = -4, \\ < 0, & \text{se } x \in]-\infty, -4[\cup]1, +\infty[. \end{cases}$$

La funzione è dunque crescente in $]-4, -1[$, decrescente in $]-\infty, -4[$ e in $]1, +\infty[$. Per $x = -4$ ammette un punto di minimo relativo ed assoluto.

e) L'equazione della retta tangente al grafico nel generico punto $(x_0, g(x_0))$ è

$$y = (x - x_0)g'(x_0) + g(x_0).$$

Poiché $g(2) = 9$ e $g'(2) = -12$, l'equazione della retta cercata è $y = -12(x-2) + 9$.



f) La derivata seconda è

$$g''(x) = \frac{-2(x-1)^3 - (-2x-8)3(x-1)^2}{(x-1)^6} = \frac{-2(x-1) - (-2x-8)3}{(x-1)^4} = \frac{4x+26}{(x-1)^4}.$$

Si ha che $g''(x) > 0$ se e solo se $4x + 26 > 0$ ovvero se $x > -13/2$, quindi

$$g''(x) = \begin{cases} > 0, & \text{se } x \in]-13/2, 1[\cup]1, +\infty[, \\ = 0, & \text{se } x = -13/2, \\ < 0, & \text{se } x \in]-\infty, -13/2[. \end{cases}$$

La funzione è dunque convessa in $]-13/2, 1[$ e in $]1, +\infty[$, mentre è concava in $]-\infty, -13/2[$. Per $x = -13/2$ ammette un punto di flesso.

2 a) Il dominio è chiaramente $\mathcal{D} = \mathbb{R}$ e la funzione è continua e derivabile. Si noti che è una funzione pari.

b) L'esponenziale è una funzione strettamente positiva per cui $g(x) \geq 0$ se e solo se $x \geq 0$.

c) Ha senso calcolare solo i limiti a $\pm\infty$. Si ha

$$\lim_{x\to\pm\infty} g(x) = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{x}{e^{x^2}} = \left[\frac{\pm\infty}{+\infty}\right] \overset{H}{=} \lim_{x\to\pm\infty} \frac{1}{2xe^{x^2}} = \left[\frac{1}{\pm\infty}\right] = 0.$$

d) La derivata prima è

$$g'(x) = e^{-x^2} + x\big(e^{-x^2}(-2x)\big) = (1 - 2x^2)e^{-x^2}.$$

Si ha $g'(x) \geq 0$ se e solo se $1 - 2x^2 \geq 0$ ovvero $-1/\sqrt{2} \leq x \leq 1/\sqrt{2}$. Si ottiene

$$g'(x) \begin{cases} < 0, & \text{se } x \in]-\infty, -1/\sqrt{2}[\cup]1/\sqrt{2}, +\infty[, \\ = 0, & \text{se } x = -1/\sqrt{2} \text{ oppure } x = 1/\sqrt{2} \\ > 0, & \text{se } x \in]-1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2}[, \end{cases}$$

quindi la funzione è crescente in $]-1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2}[$, decrescente in $]-\infty, -1/\sqrt{2}[$ e in $]1/\sqrt{2}, +\infty[$. Per $x = -1/\sqrt{2}$ e $x = 1/\sqrt{2}$ ammette rispettivamente un minimo ed un massimo assoluto.

e) Poiché $\lim_{x\to\pm\infty} g(x) = 0$ la retta $y = 0$ è asintoto orizzontale a $-\infty$ e a $+\infty$.

f) La derivata seconda è

$$g''(x) = -4xe^{-x^2} + (1 - 2x^2)\big(e^{-x^2}(-2x)\big) = 2x(3 - 2x^2)e^{-x^2},$$

per cui $g''(x) \geq 0$ se e solo se $x(3 - 2x^2) \geq 0$. Si ottiene

$$g''(x) \begin{cases} > 0, & \text{se } x \in]-\sqrt{3/2}, 0[\cup]\sqrt{3/2}, +\infty[, \\ = 0, & \text{se } x = -\sqrt{3/2} \text{ oppure } x = 0 \text{ oppure } x = \sqrt{3/2}, \\ < 0, & \text{se } x \in]-\infty, -\sqrt{3/2}[\cup]0, \sqrt{3/2}[. \end{cases}$$

In conclusione la funzione è concava in $]-\infty, -\sqrt{3/2}[$ e in $]0, \sqrt{3/2}[$, convessa in $]-\infty, -\sqrt{3/2}[$ e in $]\sqrt{3/2}, +\infty[$. Per $x = -\sqrt{3/2}$, $x = 0$ e $x = \sqrt{3/2}$ la funzione ammette dei flessi.