Università degli Studi di Udine | Anno Accademico 2010/2011

Facoltà di Agraria
Corsi di Laurea in VIT e STAL

Esercitazioni di Matematica

7 dicembre 2010

$\boxed{\mathbf{1}}$ Calcolare la derivata delle seguenti funzioni

$$f_1(x) = \frac{3x^2 - 2x + 1}{x^2 - 4x + 3}, \qquad f_2(x) = \frac{3\log_2 x + \sqrt[3]{x}}{\cos x} + (x4^x - \operatorname{tg} x)^2,$$

$$f_3(x) = \operatorname{arcsen}(1 - x^2), \qquad f_4(x) = \operatorname{sen} \frac{1}{\ln(\mathrm{e}^x + 1)}.$$

$\boxed{\mathbf{2}}$ Risolvere i seguenti limiti, dopo aver verificato che valgono le ipotesi del Teorema di de l'Hôpital

$$\textbf{a)} \quad \lim_{x\to 0} \frac{5\operatorname{sen} x - 5x^3 + x2^x}{3^x - \cos x + 4x^2} \qquad \textbf{b)} \quad \lim_{x\to 0} \frac{3x^2 + \mathrm{e}^x \cos x - \sqrt{1 + 2x}}{5\operatorname{sen}(x^2) - x\ln(1 + 2x)}.$$

$\boxed{\mathbf{3}}$ Data la funzione

$$g(x) = \frac{x^2 + 2}{2x + 1}$$

a) determinare il dominio;

b) determinare gli intervalli dove la funzione è crescente e quelli dove la funzione è decrescente, gli eventuali punti di massimo/minimo relativo e/o assoluto;

c) determinare gli intervalli dove la funzione è concava e quelli dove la funzione è convessa;

d) calcolare l'equazione della retta tangente al grafico nel punto di ascissa $x_0 = 0$.

Soluzioni degli esercizi del 7 dicembre 2010

$\boxed{1}$ Utilizzando la regola di derivazione del quoziente:

$$f_1'(x) = \frac{(6x-2)(x^2-4x+3)-(3x^2-2x+1)(2x-4)}{(x^2-4x+3)^2} = \frac{-10x^2+16x-2}{(x^2-4x+3)^2}.$$

Utilizzando la regola di derivazione del prodotto del quoziente e della funzione composta si ottiene:

$$f_2'(x) = \frac{(\frac{3\log_2 \mathrm{e}}{x}+\frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}})\cos x-(3\log_2 x+\sqrt[3]{x})(-\operatorname{sen} x)}{\cos^2 x}+2(x4^x-\operatorname{tg} x)\Big(4^x+x4^x\ln 4-\frac{1}{\cos^2 x}\Big)$$

La funzione è derivabile per $-\sqrt{2}<x<\sqrt{2}$; utilizzando la regola di derivazione della funzione composta si ha

$$f_3'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-(1-x^2)^2}}(-2x) = \frac{-2x}{\sqrt{2x^2-x^4}} = \frac{-2x}{|x|\sqrt{2-x^2}} = \frac{-2\operatorname{sgn}(x)}{\sqrt{2-x^2}}.$$

Utilizzando la regola di derivazione della funzione composta si ottiene infine:

$$\begin{aligned} f_4'(x) &= \cos\Big(\frac{1}{\ln(\mathrm{e}^x+1)}\Big)\Big(\frac{1}{\ln(\mathrm{e}^x+1)}\Big)' = \cos\Big(\frac{1}{\ln(\mathrm{e}^x+1)}\Big)\Big(-\frac{\big(\ln(\mathrm{e}^x+1)\big)'}{\ln^2(\mathrm{e}^x+1)}\Big) \\ &= -\cos\Big(\frac{1}{\ln(\mathrm{e}^x+1)}\Big)\cdot\frac{1}{\ln^2(\mathrm{e}^x+1)}\cdot\frac{\mathrm{e}^x}{\mathrm{e}^x+1}. \end{aligned}$$

$\boxed{2}$ a) Il limite si presenta nella forma d'indeterminazione [0/0]. Applicando de l'Hôpital si ottiene

$$\lim_{x\to 0}\frac{5\operatorname{sen} x-5x^3+x2^x}{3^x-\cos x+4x^2} \overset{H}{=} \lim_{x\to 0}\frac{5\cos x-15x^2+2^x+x2^x\ln 2}{3^x\ln 3+\operatorname{sen} x+8x} = \frac{6}{\ln 3}.$$

Per de l'Hôpital il limite cercato vale allora $\frac{6}{\ln 3}$.

b) Il limite si presenta nella forma d'indeterminazione [0/0]. Applicando de l'Hôpital due volte consecutivamente si ottiene

$$\begin{aligned} &\lim_{x\to 0}\frac{3x^2+\mathrm{e}^x\cos x-\sqrt{1+2x}}{5\operatorname{sen}(x^2)-x\ln(1+2x)} \overset{H}{=} \lim_{x\to 0}\frac{6x+\mathrm{e}^x\cos x-\mathrm{e}^x\operatorname{sen} x-\frac{1}{\sqrt{1+2x}}}{10x\cos(x^2)-\ln(1+2x)-\frac{2x}{1+2x}} = \left[\frac{0}{0}\right] \\ &\overset{H}{=} \lim_{x\to 0}\frac{6+\mathrm{e}^x\cos x-2\mathrm{e}^x\operatorname{sen} x-\mathrm{e}^x\cos x+\frac{1}{\sqrt{(1+2x)^3}}}{10\cos(x^2)-20x^2\operatorname{sen}(x^2)-\frac{2}{1+2x}-\frac{2}{(1+2x)^2}} = \frac{6+1-0-1+1}{10-0-2-2} = \frac{7}{6}. \end{aligned}$$

Per de l'Hôpital il limite cercato è $\frac{7}{6}$.

$\boxed{3}$ a) Il dominio è dato dagli $x\in\mathbb{R}$ per cui $2x+1\neq 0$, ovvero $\mathcal{D}=\mathbb{R}\setminus\{-1/2\}$. La funzione (razionale) è ivi continua e derivabile.

b) Ha senso andare a studiare i limiti in $-1/2$ e a $\pm\infty$. Si osservi che il numeratore è sempre positivo, dunque g è positiva se $x>-1/2$, negativa se $x<-1/2$. Utilizzando anche queste informazioni si ottiene

$$\lim_{x\to\pm\infty} g(x) = \lim_{x\to\pm\infty}\Big(x\,\frac{1+2/x^2}{2+1/x}\Big) = \left[\pm\infty\cdot\frac{1}{2}\right] = \pm\infty, \qquad \lim_{x\to -1/2^\pm} g(x) = \left[\frac{9/4}{0^\pm}\right] = \pm\infty,$$

quindi la funzione non ammette massimo né minimo.

c) La derivata prima è

$$g'(x) = \frac{2x(2x+1) - (x^2+2)2}{(2x+1)^2} = \frac{2(x^2+x-2)}{(2x+1)^2}.$$

Poiché il denominatore è sempre positivo nel dominio, la derivata prima è positiva se e solo se $x^2 + x - 2 \geq 0$ cioè se e solo se $x \leq -2$ oppure $x \geq 1$. Più precisamente

$$g'(x) = \begin{cases} > 0, & \text{se } x \in]-\infty, -2[\cup]1, +\infty[, \\ = 0, & \text{se } x = -2 \text{ oppure } x = 1, \\ < 0, & \text{se } x \in]-2, -1/2[\cup]-1/2, 1[. \end{cases}$$

La funzione è dunque crescente in $]-\infty, -2[$ e in $]1, +\infty[$, decrescente in $]-2, -1/2[$ e in $]-1/2, 1[$. I punti $x = -2$ e $x = 1$ sono rispettivamente punti di massimo e minimo relativo.

d) La derivata seconda è

$$g'(x) = 2\frac{(2x+1)(2x+1)^2 - (x^2+x-2)2(2x+1)2}{(2x+1)^4} = 2\frac{(2x+1)^2 - (x^2+x-2)4}{(2x+1)^3} = \frac{18}{(2x+1)^3}.$$

La derivata seconda è positiva se e solo se $(2x+1)^3 > 0$ cioè se e solo se $2x + 1 > 0$ ovvero $x > -1/2$. Dunque

$$g''(x) = \begin{cases} < 0, & \text{se } x \in]-\infty, -1/2[, \\ > 0, & \text{se } x \in]-1/2, +\infty[. \end{cases}$$

La funzione è dunque concava in $]-\infty, -1/2[$, convessa in $]-1/2, +\infty[$.

e) L'equazione della retta tangente al grafico nel generico punto $(x_0, g(x_0))$ è

$$y = (x - x_0)g'(x_0) + g(x_0).$$

Poiché $g(0) = 2$ e $g'(0) = -4$, l'equazione della retta cercata è

$$y = -4x + 2.$$