Università degli Studi di Udine   Anno Accademico 2010/2011

Facoltà di Agraria
Corsi di Laurea in VIT e STAL

Esercitazioni di Matematica

16 novembre 2010

1 Trovare le soluzioni della seguente disequazione:

$$\ln^2 x - |\ln x| - 2 \leq 0$$

2 Trovare le soluzioni della seguente disequazione:

$$\log_{1/2}\left(2 - |x-2|\right) \geq \log_{1/2}(3-x) - 1$$

3 Rappresentare il grafico di una funzione g che verifichi contemporaneamente le seguenti proprietà:

$$\lim_{x\to-\infty} g(x) = +\infty \qquad \lim_{x\to-3^-} g(x) = +\infty \qquad \lim_{x\to-3^+} g(x) = 1 \qquad \lim_{x\to+\infty} g(x) = 3$$

4 Calcolare, qualora possibile, il valore dei seguenti limiti:

a) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{5-3x^4-8x^5}{3x^5-2x^4+3}$, **b)** $\displaystyle\lim_{z\to+\infty} \frac{7z^4-z^2-2}{z^3+3-z^9}$, **c)** $\displaystyle\lim_{y\to-\infty} \frac{3y^5-5y+1}{2y^3+3y-4}$.

5 Calcolare, qualora possibile, il valore dei seguenti limiti:

f) $\displaystyle\lim_{y\to1} \frac{4y^2+y-2}{y^2-4y+3}$, **g)** $\displaystyle\lim_{x\to0} \frac{\operatorname{tg}(x+\pi/4)}{x\ln(1-3x)}$.

Soluzioni degli esercizi del 16 novembre 2010

$\boxed{1}$ Affinché le funzioni che compaiono nella disequazione siano definite deve essere $x > 0$. Mediante la sostituzione $y = \ln x$ si ottiene la disequazione equivalente $y^2 - |y| - 2 \leq 0$ nell'incognita y. Distinguiamo due casi, a seconda che l'argomento del valore assoluto sia positivo oppure negativo: quest'ultima disequazione è dunque equivalente a

$$\begin{cases} y \geq 0 \\ y^2 - y - 2 \leq 0, \end{cases} \quad \cup \quad \begin{cases} y < 0 \\ y^2 + y - 2 \leq 0. \end{cases}$$

La disequazione $y^2 - y - 2 \leq 0$ ha come soluzioni $-1 \leq y \leq 2$ perciò il primo sistema ha soluzioni $0 \leq y \leq 2$; la disequazione $y^2 + y - 2 \leq 0$ ha come soluzioni $-2 \leq y \leq 1$ perciò il secondo sistema ha soluzioni $-2 \leq y < 0$. Unendo le soluzioni dei due sistemi si ha dunque $-2 \leq y \leq 2$. Ritornando alle variabili x si ottiene la disequazione $-2 \leq \ln x \leq 2$ che ha come insieme delle soluzioni

$$S = [\mathrm{e}^{-2}, \mathrm{e}^2]$$

Alternativamente, ricordando che $|z|^2 = z^2$ si poteva utilizzare la sostituzione $z = |\ln x|$ ottenendo la disequazione $z^2 - z - 2 \leq 0$ le cui soluzioni sono $-1 \leq z \leq 2$. Ritornando alla variabile x si ottiene $-1 \leq |\ln x| \leq 2$ che è vera (essendo la prima disuguaglianza sempre verificata) se e solo se $|\ln x| \leq 2$ ovvero $-2 \leq \ln x \leq 2$, da cui nuovamente la soluzione finale.

$\boxed{2}$ Innanzitutto affinché le funzioni che compaiono nella disequazione siano definite deve essere

$$\begin{cases} 2 - |x-2| > 0 \\ 3 - x > 0 \end{cases} \iff \begin{cases} 2 > |x-2| \\ x < 3 \end{cases} \iff \begin{cases} 2 > x - 2 > -2 \\ x < 3 \end{cases} \iff \begin{cases} 4 > x > 0 \\ x < 3 \end{cases}$$

quindi $0 < x < 3$. Osservato che $-1 = \log_{1/2} 2$, utilizzando le proprietà dei logaritmi si ottiene che la disequazione è equivalente a

$$\log_{1/2}\big(2 - |x-2|\big) \geq \log_{1/2}(3-x) + \log_{1/2} 2 \quad \iff \quad \log_{1/2}\big(2 - |x-2|\big) \geq \log_{1/2}(6-2x).$$

Poiché la funzione logaritmica in base $1/2$ è decrescente, quest'ultima equivale a

$$2 - |x-2| \leq 6 - 2x$$

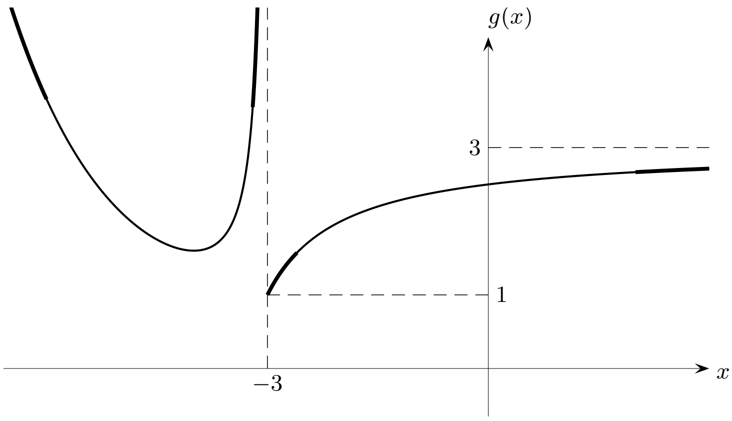
Distinguiamo due casi, a seconda che l'argomento del valore assoluto sia positivo oppure negativo. Perciò la disequazione è equivalente a

$$\begin{cases} x - 2 \geq 0 \\ 2 - (x-2) \leq 6 - 2x, \end{cases} \quad \cup \quad \begin{cases} x - 2 < 0 \\ 2 + (x-2) \leq 6 - 2x. \end{cases}$$

Il primo sistema ha come soluzione $x = 2$, il secondo $x < 2$. Ricordandoci delle condizioni di esistenza, l'insieme delle soluzioni è

$$S =]0, 2]$$

$\boxed{3}$ In neretto si evidenziano le informazioni date dai limiti. Il grafico della funzione è quindi completato a piacere (linea sottile), ad esempio:



4 a) È un limite di una funzione razionale all'infinito:

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{5-3x^4-8x^5}{3x^5-2x^4+3} = \lim_{x\to+\infty} \frac{5/x^5-3/x-8}{3-2/x+3/x^5} = \left[\frac{0-0-8}{3-0+0}\right] = -\frac{8}{3}.$$

b) È un limite di una funzione razionale all'infinito:

$$\lim_{z\to+\infty} \frac{7z^4-z^2-2}{z^3+3-z^9} = \lim_{z\to+\infty} \frac{z^4(7-1/z^2-2/z^4)}{z^9(1/z^6+3/z^9-1)} = \lim_{z\to+\infty} \left(\frac{1}{z^5}\cdot\frac{7-1/z^2-2/z^4}{1/z^6+3/z^9-1}\right)$$
$$= \left[0\cdot\frac{7-0-0}{0+0-1}\right] = 0.$$

c) È un limite di una funzione razionale all'infinito:

$$\lim_{y\to-\infty} \frac{3y^5-5y+1}{2y^3+3y-4} = \lim_{y\to-\infty} \frac{y^5(3-5/y^4+1/y^5)}{y^3(2+3/y^2-4/y^3)} = \lim_{y\to-\infty} \left(y^2\cdot\frac{3-5/y^4+1/y^5}{2+3/y^2-4/y^3}\right)$$
$$= \left[+\infty\cdot\frac{3-0-0}{2+0-0}\right] = +\infty.$$

5 f) Il limite si presenta nella forma indeterminata $[\frac{3}{0}]$. Studiamo quindi il segno della funzione in un intorno di $y_0 = 1$. Il numeratore tende a 3 e quindi è positivo per gli y vicini a 1. Poiché y^2-4y+3 è positivo per gli $y < 1$ e per gli $y > 3$ si ottiene che la funzione è positiva per gli $y < 1$ e negativa per gli $y > 1$ e vicini a 1, quindi

$$\lim_{y\to1^-} \frac{4y^2+y-2}{y^2-4y+3} = \left[\frac{3}{0^+}\right] = +\infty, \qquad \lim_{y\to1^+} \frac{4y^2+y-2}{y^2-4y+3} = \left[\frac{3}{0^-}\right] = -\infty,$$

quindi il limite cercato non esiste.

g) Il limite si presenta nella forma indeterminata $[\frac{1}{0}]$. Studiamo il segno della funzione in un intorno di $x_0 = 0$. Il numeratore tende a 1, quindi è positivo per gli x vicini a 0. Studiamo il segno del denominatore: si ha $\ln(1-3x) > 0$ se e solo se $1-3x > 1$ cioè $x < 0$. Tenendo conto anche del fattore x si ottiene che il denominatore è sempre negativo nelle vicinanze di $x_0 = 0$ (tranne che in x_0 stesso), perciò

$$\lim_{x\to0} \frac{\mathrm{tg}(x+\pi/4)}{x\ln(1-3x)} = \left[\frac{1}{0^-}\right] = -\infty.$$