Università degli Studi di Udine — Anno Accademico 2010/2011

Facoltà di Agraria
Corsi di Laurea in VIT e STAL

Esercitazioni di Matematica

26 ottobre 2010

1 Trovare le soluzioni della seguente disequazione:

$$\frac{1}{x-1} - 1 > \frac{1}{2x+1}$$

2 Trovare le soluzioni della seguente disequazione:

$$\log_2 |1-2x| \leq 2 \log_4 (3x+1)$$

3 Trovare le soluzioni della seguente disequazione:

$$3^{\sqrt{x^2-1}} \geq 9 \cdot 3^x$$

Soluzioni degli esercizi del 26 ottobre 2010

$\boxed{\mathbf{1}}$ Affinché le funzioni che compaiono nella disequazione siano definite deve essere $x-1 \neq 0$ e $2x+1 \neq 0$ cioè $x \neq 1$, $x \neq -1/2$. Con semplici calcoli si ottiene

$$\frac{1}{x-1} - 1 > \frac{1}{2x+1} \iff \frac{1}{x-1} - 1 - \frac{1}{2x+1} > 0 \iff$$

$$\iff \frac{(2x+1)-(x-1)(2x+1)-(x-1)}{(x-1)(2x+1)} > 0 \iff \frac{-2x^2+2x+3}{(x-1)(2x+1)} > 0.$$

Studiamo separatamente il segno del numeratore e del denominatore. Il numeratore è ≥ 0 se e solo se $-2x^2+2x+3 \geq 0$ cioè se e solo se $\frac{1-\sqrt{7}}{2} \leq x \leq \frac{1+\sqrt{7}}{2}$. In definitiva il numeratore è positivo se $\frac{1-\sqrt{7}}{2} < x < \frac{1+\sqrt{7}}{2}$, negativo se $x < \frac{1-\sqrt{7}}{2}$ oppure $x > \frac{1+\sqrt{7}}{2}$e si annulla se $x = \frac{1-\sqrt{7}}{2}$ oppure $x = \frac{1+\sqrt{7}}{2}$.

Analogamente si verifica che il denominatore è positivo se $x < -1/2$ oppure $x > 1$, negativo se $-1/2 < x < 1$.

La disequazione ha soluzione quando numeratore e denominatore hanno segno discorde, dunque se $\frac{1-\sqrt{7}}{2} < x < -1/2$ oppure $1 < x < \frac{1+\sqrt{7}}{2}$. L'insieme delle soluzioni è quindi

$$S = \left]\frac{1-\sqrt{7}}{2}, -\frac{1}{2}\right[\cup \left]1, \frac{1+\sqrt{7}}{2}\right[$$

$\boxed{\mathbf{2}}$ Anzitutto la disequazione ha senso quando gli argomenti del logaritmi sono positivi, cioè

$$\begin{cases} |1-2x| > 0 \\ (3x+1) > 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x \neq 1/2 \\ x > -1/3 \end{cases}$$

Utilizzando la formula del cambiamento di base dei logaritmi si ottiene

$$\log_4(3x+1) = \frac{\log_2(3x+1)}{\log_2 4} = \frac{\log_2(3x+1)}{2}$$

perciò la disequazione equivale a

$$\log_2|1-2x| \leq \log_2(3x+1)$$

Poiché la funzione logaritmica in base 2 è crescente, quest'ultima equivale a

$$|1-2x| \leq (3x+1)$$

Distinguiamo due casi: se $1-2x > 0$ ovvero se $x < 1/2$, la disequazione equivale a $1-2x \leq 3x+1$ che ha come soluzioni gli $x \geq 0$, e in definitiva, gli $0 \leq x < 1/2$.

Nel secondo caso, se $1-2x < 0$ ovvero se $x > 1/2$, la disequazione equivale a $-(1-2x) \leq 3x+1$ che ha come soluzioni gli $x \geq -2$, e in definitiva, gli $x > 1/2$.

Ricordandoci delle condizioni di esistenza, l'insieme delle soluzioni è

$$S = [0, 1/2[\cup]1/2, +\infty[$$

$\boxed{\mathbf{3}}$ La disequazione ha senso quando l'argomento della radice quadrata è non negativo, cioè se $x^2 - 1 \geq 0$ ovvero $x \leq -1$ oppure $x \geq 1$. Poiché inoltre $9 = 3^2$ la disequazione può essere scritta nella forma

$$3^{\sqrt{x^2-1}} \geq 3^{2+x}$$

e utilizzando la proprietà di crescenza della funzione esponenziale di base 3 si ottiene equivalentemente

$$\sqrt{x^2 - 1} \geq 2 + x$$

Si distinguono 2 casi: se $2+x < 0$ ovvero $x < -2$, la disequazione ha sempre soluzione, poiché il membro sinistro è positivo, quello destro negativo.

Nel secondo caso, se $2 + x \geq 0$ ovvero $x \geq -2$, entrambi i membri sono positivi e si può elevare al quadrato, ottenendo

$$x^2 - 1 \geq 4 + 4x + x^2 \iff -5 \geq 4x \iff -5/4 \geq x$$

ottenendo quindi le soluzioni $-2 \leq x \leq -5/4$.

Ricordandoci delle condizioni d'esistenza si ottiene che l'insieme delle soluzione è dato da

$$S =]-\infty, -5/4]$$