Facoltà di Agraria

Corsi di Laurea in VIT e STAL
Modulo di Matematica
Esame del 15/09/2011
A.A. 2010/2011

Scritto		Voto
Teoria	Esercizi	

Istruzioni: apporre nome, cognome e numero di matricola su ogni foglio. Prima della consegna indicare nell'apposito spazio il numero totale di fogli di cui è composto l'elaborato. Svolgere solamente uno tra 10-b) e 11. Allegare lo svolgimento completo degli esercizi 9, 10 e 11. **Non è ammesso l'uso di libri, appunti e calcolatrici grafiche o programmabili.**

Cognome	Nome
Corso di Laurea $\boxed{VIT}$ $\boxed{STAL}$	Matricola
Vecchio ordinamento $\boxed{SI}$ $\boxed{NO}$	n. fogli allegati

1 Se $\lim_{x\to x_0} f(x) = 1$ e $\lim_{x\to x_0} g(x) = -\infty$, allora $\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)}$ è

- A $-\infty$
- B $+\infty$
- C 0
- D non ci sono elementi sufficienti per rispondere

2 Se f è una funzione derivabile due volte in $]a,b[$ e vale $f'(x) > 0$ e $f''(x) > 0$ in $]a,b[$, allora

- A f è decrescente e concava in $]a,b[$
- B f è crescente e convessa in $]a,b[$
- C f è decrescente e convessa in $]a,b[$
- D f è crescente e concava in $]a,b[$

3 L'equazione differenziale $y' = 3t^3 y - \cos 3t^2$ è

- A un'equazione lineare del primo ordine
- B un'equazione lineare del secondo ordine
- C un'equazione non lineare del primo ordine
- D un'equazione non lineare del secondo ordine

4 Il grafico della funzione $f(x) = 5x - 1 + x^3$ rappresenta

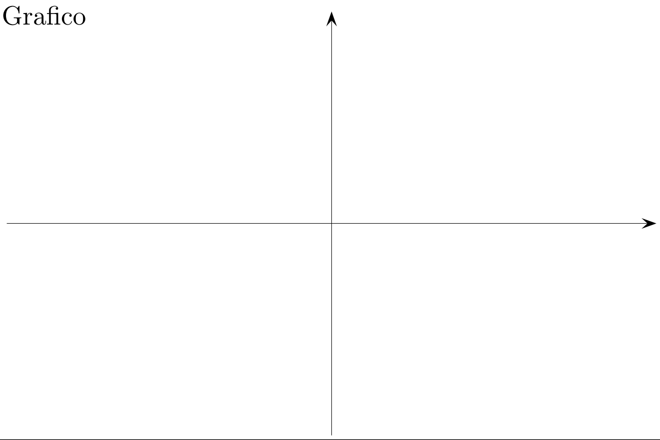
- A una retta
- B una parabola
- C un'iperbole
- D nessuna delle precedenti

5 Per la funzione $f(x) = \log_{2/7} x$, scrivere il dominio $\mathcal{D}$, l'immagine $\mathcal{I}$, e rappresentare qualitativamente il grafico.

$\mathcal{D} =$

$\mathcal{I} =$

Grafico



6 Per definizione, una primitiva di una funzione $f(x)$ in $[a,b]$ è:

7 Enunciare il teorema dei punti critici.

8 Rappresentare il grafico di una funzione g che verifichi contemporaneamente le seguenti proprietà:

$$\lim_{x\to-\infty} g(x) = 2 \qquad \lim_{x\to 1^-} g(x) = -\infty \qquad \lim_{x\to 1^+} g(x) = -1 \qquad \lim_{x\to+\infty} g(x) = -\infty$$

9 Data la funzione

$$g(x) = \frac{x+2}{(2x+3)^2}$$

a) determinare il dominio $\mathcal{D}$, b) studiare il segno di g; c) calcolare i limiti agli estremi del dominio; d) determinare gli intervalli in cui la funzione è crescente, quelli in cui è decrescente, e gli eventuali punti di massimo/minimo relativo; e) determinare gli intervalli in cui la funzione è convessa e quelli in cui è concava; f) disegnare un grafico approssimativo di g.

10 Dato il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' = \dfrac{2^y(3t^2-1)}{t} \\ y(1) = 0 \end{cases}$$

a) dire se la funzione $y(t) = \log_2(3-2t)$ è soluzione del problema;

b) determinare una soluzione del problema nel caso in cui non lo sia la funzione di cui al punto precedente.

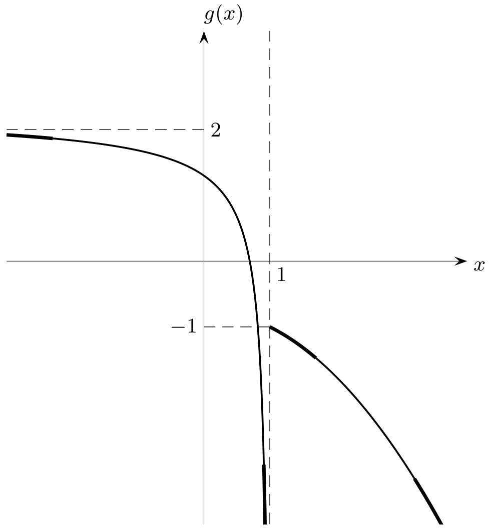
11 Calcolare i seguenti integrali

$$\int \Big(\frac{4}{3\cos^2 x} + \frac{2\sqrt{x}-x^2}{3x\sqrt{x}}\Big)\,dx, \qquad \int_0^{1/2} \frac{5x-1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx.$$

IMPORTANTE! Risolvere solamente uno tra 10-b) e 11.

Soluzioni dei quesiti dell'esame del 15 settembre 2011

$\boxed{\mathbf{1}}$ C; $\boxed{\mathbf{2}}$ B; $\boxed{\mathbf{3}}$ A; $\boxed{\mathbf{4}}$ D; $\boxed{\mathbf{5}}$-$\boxed{\mathbf{6}}$-$\boxed{\mathbf{7}}$ consultare il libro di testo; $\boxed{\mathbf{8}}$ in neretto si evidenziano le informazioni date dai limiti. Il grafico della funzione è quindi completato a piacere (linea sottile), ad esempio:



$\boxed{\mathbf{9}}$ a) Il dominio è costituito dagli x tali che $2x+3 \neq 0$ cioè $\mathcal{D} = \mathbb{R} \setminus \{-3/2\}$. La funzione (razionale) è ivi continua e derivabile.

b) Poiché il denominatore è sempre positivo nel dominio, la funzione è positiva se e solo se $x+2>0$ cioè $x>-2$. Si annulla in $x=-2$.

c) Ha senso andare a studiare i limiti a $\pm\infty$ e in $-3/2$. Si ha

$$\lim_{x\to -3/2} g(x) = \left[\frac{1/2}{0^+}\right] = +\infty, \qquad \lim_{x\to\pm\infty} g(x) = \lim_{x\to\pm\infty}\left(\frac{1}{x}\cdot\frac{1+2/x}{(2+3/x)^2}\right) = \left[0\cdot\frac{1}{4}\right] = 0,$$

quindi la funzione ammette l'asintoto orizzontale $y=0$ a $\pm\infty$ e l'asintoto verticale $x=-3/2$.

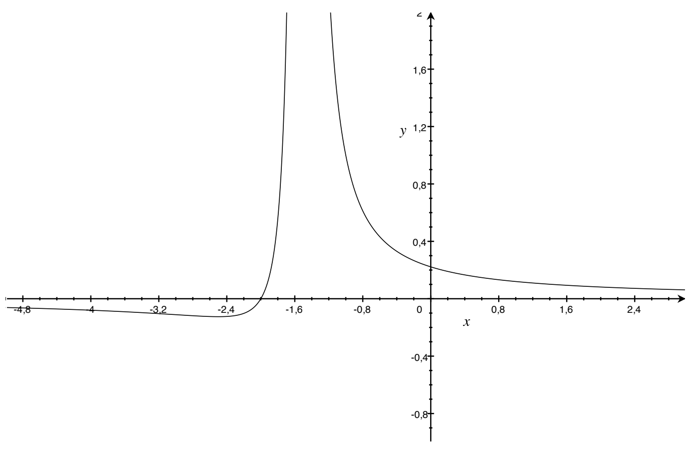
d) La derivata prima è

$$g'(x) = \frac{1\cdot(2x+3)^2-(x+2)2(2x+3)2}{(2x+3)^4} = \frac{(2x+3)-(x+2)4}{(2x+3)^3} = \frac{-(2x+5)}{(2x+3)^3}.$$

Il numeratore è ≥ 0 se e solo se $2x+5 \leq 0$ ovvero se $x \leq -5/2$, il denominatore è positivo se $(2x+3)^3>0$ ovvero $2x+3>0$ cioè $x>-3/2$. Si ottiene dunque

$$g'(x)\begin{cases} <0, & \text{se } x\in\,]-\infty,-5/2[\,\cup\,]-3/2,+\infty[,\\ =0, & \text{se } x=-5/2,\\ >0, & \text{se } x\in\,]-5/2,-3/2[,\end{cases}$$

perciò la funzione è decrescente in $]-\infty,-5/2[$ e in $]-3/2,+\infty[$, mentre è crescente in $]-5/2,-3/2[$. In $x=-5/2$ ammette un minimo assoluto.



e) La derivata seconda è

$$g''(x) = -\frac{2(2x+3)^3 - (2x+5)3(2x+3)^2 2}{(2x+3)^6} = -\frac{2(2x+3) - (2x+5)6}{(2x+3)^4} = \frac{8(x+3)}{(2x+3)^4}.$$

La derivata seconda è ≥ 0 se e solo se $x + 3 \geq 0$ cioè se $x \geq -3$, quindi

$$g''(x) \begin{cases} < 0, & \text{se } x \in]-\infty, -3[, \\ = 0, & \text{se } x = -3, \\ > 0, & \text{se } x \in]-3, -3/2[\cup]-3/2, +\infty[, \end{cases}$$

perciò la funzione è concava in $]-\infty, -3[$, mentre è convessa in $]-3, -3/2[$ e in $]-3/2, +\infty[$. In $x = -3$ ammette un punto di flesso.

10 a) Si ha $y'(t) = \frac{\log_2 e}{3-2t}(-2)$ e sostituendo si ottiene l'equazione

$$\frac{-2\log_2 e}{3-2t} = \frac{2^{\log_2(3-2t)}(3t^2-1)}{t} = \frac{(3-2t)(3t^2-1)}{t}$$

che non è identicamente soddisfatta (ad esempio, per $t = 1$ si ha $-2\log_2 e \neq 2$). La funzione non è dunque soluzione. La funzione soddisfa invece la seconda condizione, essendo $y(1) = 0$.

b) Scrivendo $y' = \frac{dy}{dt}$ e utilizzando il metodo di separazione delle variabili si ha

$$\frac{1}{2^y}\, dy = \frac{3t^2-1}{t}\, dt$$

e integrando (utilizzando le tabelle)

$$\int 2^{-y}\, dy = \int \left(3t - \frac{1}{t}\right) dt \qquad \Longrightarrow \qquad -2^{-y} = \frac{3t^2}{2} - \ln|t| + c,$$

dove c è la generica costante d'integrazione. Si osservi che essendo $t_0 = 1$ si può supporre che $t > 0$ dunque $|t| = t$. Si ottiene quindi

$$2^{-y} = -\frac{3t^2}{2} + \ln|t| - c \qquad \Longleftrightarrow \qquad y = -\log_2\left(\ln t - \frac{3t^2}{2} - c\right).$$

Imponendo la condizione $y(1) = 0$ (nella prima delle due equazioni qui sopra) si ha

$$1 = -\frac{3}{2} - c,$$

da cui si ricava $c = -5/2$. La soluzione è quindi

$$y(t) = -\log_2\left(\frac{5}{2} + \ln t - \frac{3t^2}{2}\right).$$

Alternativamente, si poteva utilizzare direttamente la formula risolutiva per le equazioni a variabili separabili (insieme alla formula fondamentale del calcolo integrale)

$$\int_0^y 2^{-z}\, dz = \int_1^t \left(3s - \frac{1}{s}\right) ds \quad \Longrightarrow \quad \left[-2^{-z}\right]_0^y = \left[\frac{3s^2}{2} - \ln s\right]_1^t$$

$$\Longrightarrow \quad 1 - 2^{-y} = \frac{3t^2}{2} - \ln t - \frac{3}{2}$$

che risolta rispetto a y fornisce la soluzione cercata.

11 Dalla prima tabella si ottiene

$$\int \left(\frac{4}{3\cos^2 x} + \frac{2\sqrt{x} - x^2}{3x\sqrt{x}}\right) dx = \frac{4}{3}\int \frac{1}{\cos^2 x}\, dx + \frac{2}{3}\int \frac{1}{x}\, dx + \frac{2}{3}\int x^{1/2}\, dx$$

$$= \frac{4}{3}\operatorname{tg} x + \frac{2}{3}\ln|x| + \frac{4}{9}x^{3/2} + c,$$

con c costante arbitraria, mentre dalla seconda tabella si ha

$$\int_0^{1/2} \frac{5x-1}{\sqrt{1-x^2}}\, dx = -\frac{5}{2}\int_0^{1/2} \frac{-2x}{\sqrt{1-x^2}}\, dx - \int_0^{1/2} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\, dx$$

$$= \Big[-5\sqrt{1-x^2} - \operatorname{arcsen} x\Big]_0^{1/2} = -5\sqrt{1-(1/2)^2} + 5 - \operatorname{arcsen}\frac{1}{2} = \frac{5}{2}(2-\sqrt{3}) - \frac{\pi}{6}.$$