Facoltà di Agraria

Corsi di Laurea in VIT e STAL
Modulo di Matematica
Esame del 15/09/2011
A.A. 2010/2011

Scritto		Voto
Teoria	Esercizi	

Istruzioni: apporre nome, cognome e numero di matricola su ogni foglio. Prima della consegna indicare nell'apposito spazio il numero totale di fogli di cui è composto l'elaborato. Svolgere solamente uno tra 10-b) e 11. Allegare lo svolgimento completo degli esercizi 9, 10 e 11. **Non è ammesso l'uso di libri, appunti e calcolatrici grafiche o programmabili.**

Cognome	Nome
Corso di Laurea $\boxed{VIT}$ $\boxed{STAL}$	Matricola
Vecchio ordinamento $\boxed{SI}$ $\boxed{NO}$	n. fogli allegati

1 Se $\lim_{x\to x_0} f(x) = +\infty$ e $\lim_{x\to x_0} g(x) = -\infty$, allora $\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)}$ è

A $-\infty$

B $+\infty$

C -1

D non ci sono elementi sufficienti per rispondere

2 Se f è una funzione derivabile due volte in $]a,b[$ e vale $f'(x_0) = 0$ e $f''(x_0) < 0$ con $x_0 \in]a,b[$, allora

A x_0 è sempre punto di minimo relativo per f

B x_0 è sempre punto di massimo relativo per f

C x_0 è sempre punto di flesso per f

D nessuna delle precedenti

3 L'equazione differenziale $y'' = \text{sen}(y + y')$ è

A un'equazione lineare del primo ordine

B un'equazione lineare del secondo ordine

C un'equazione non lineare del primo ordine

D un'equazione non lineare del secondo ordine

4 Il grafico della funzione $f(x) = \frac{1}{1-3x}$ rappresenta

A una retta

B una parabola

C un'iperbole

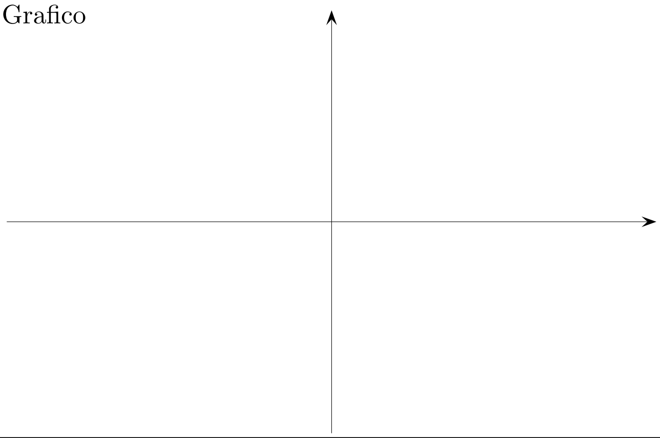
D nessuna delle precedenti

5 Per la funzione $f(x) = (5/7)^x$, scrivere il dominio $\mathcal{D}$, l'immagine $\mathcal{I}$, e rappresentare qualitativamente il grafico.

$\mathcal{D} =$

$\mathcal{I} =$

Grafico



$\boxed{6}$ Per definizione, la derivata di una funzione $f(x)$ in x_0 è:

$\boxed{7}$ Enunciare il teorema fondamentale del calcolo integrale.

$\boxed{8}$ Rappresentare il grafico di una funzione g che verifichi contemporaneamente le seguenti proprietà:

$$\lim_{x\to-\infty} g(x) = +\infty \qquad \lim_{x\to 2^-} g(x) = -\infty \qquad \lim_{x\to 2^+} g(x) = +\infty \qquad \lim_{x\to+\infty} g(x) = -1$$

$\boxed{9}$ Data la funzione

$$g(x) = \frac{x-1}{(2x-1)^2}$$

a) determinare il dominio $\mathcal{D}$, b) studiare il segno di g; c) calcolare i limiti agli estremi del dominio; d) determinare gli intervalli in cui la funzione è crescente, quelli in cui è decrescente, e gli eventuali punti di massimo/minimo relativo; e) determinare gli intervalli in cui la funzione è convessa e quelli in cui è concava; f) disegnare un grafico approssimativo di g.

$\boxed{10}$ Dato il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' = \dfrac{3^y(2+t^2)}{t} \\ y(1) = 0 \end{cases}$$

a) dire se la funzione $y(t) = \log_3(4t-3)$ è soluzione del problema;

b) determinare una soluzione del problema nel caso in cui non lo sia la funzione di cui al punto precedente.

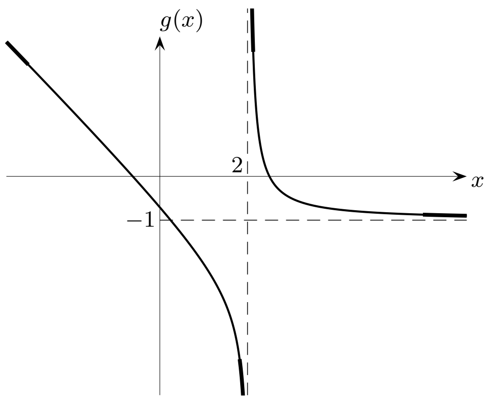
$\boxed{11}$ Calcolare i seguenti integrali

$$\int \Big(\frac{3}{\sqrt{25-x^2}} - \frac{3x\sqrt{x}+5x}{2x^2}\Big)\,dx, \qquad \int_0^1 \frac{3x+1}{x^2+1}\,dx.$$

IMPORTANTE! Risolvere solamente uno tra 10-b) e 11.

Soluzioni dei quesiti dell'esame del 15 settembre 2011

$\boxed{\mathbf{1}}$ D; $\boxed{\mathbf{2}}$ B; $\boxed{\mathbf{3}}$ D; $\boxed{\mathbf{4}}$ C; $\boxed{\mathbf{5}}$-$\boxed{\mathbf{6}}$-$\boxed{\mathbf{7}}$ consultare il libro di testo; $\boxed{\mathbf{8}}$ in neretto si evidenziano le informazioni date dai limiti. Il grafico della funzione è quindi completato a piacere (linea sottile), ad esempio:



$\boxed{\mathbf{9}}$ a) Il dominio è costituito dagli x tali che $2x-1 \neq 0$ cioè $\mathcal{D} = \mathbb{R} \setminus \{1/2\}$. La funzione (razionale) è ivi continua e derivabile.

b) Poiché il denominatore è sempre positivo nel dominio, la funzione è positiva se e solo se $x-1>0$ cioè $x>1$. Si annulla in $x=1$.

c) Ha senso andare a studiare i limiti a $\pm\infty$ e in $1/2$. Si ha

$$\lim_{x\to 1/2} g(x) = \left[\frac{-1/2}{0^+}\right] = -\infty, \qquad \lim_{x\to\pm\infty} g(x) = \lim_{x\to\pm\infty} \left(\frac{1}{x}\cdot\frac{1-1/x}{(2-1/x)^2}\right) = \left[0\cdot\frac{1}{4}\right] = 0,$$

quindi la funzione ammette l'asintoto orizzontale $y=0$ a $\pm\infty$ e l'asintoto verticale $x=1/2$.

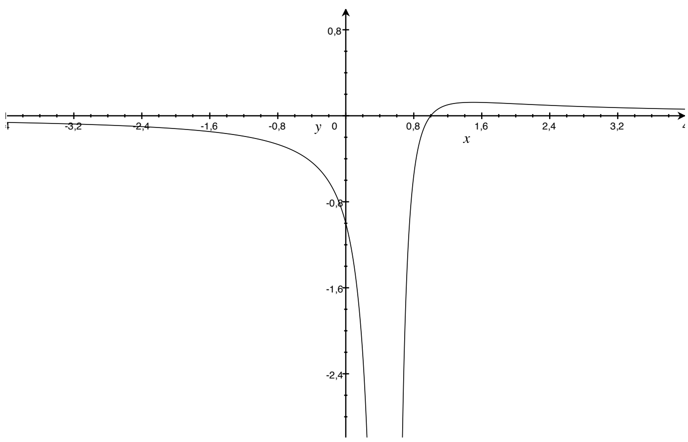
d) La derivata prima è

$$g'(x) = \frac{1\cdot(2x-1)^2-(x-1)2(2x-1)2}{(2x-1)^4} = \frac{(2x-1)-(x-1)4}{(2x-1)^3} = \frac{3-2x}{(2x-1)^3}.$$

Il numeratore è ≥ 0 se e solo se $3-2x \geq 0$ ovvero se $x \leq 3/2$, il denominatore è positivo se $(2x-1)^3>0$ ovvero $2x-1>0$ cioè $x>1/2$. Si ottiene dunque

$$g'(x)\begin{cases} <0, & \text{se } x\in]-\infty,1/2[\cup]3/2,+\infty[, \\ =0, & \text{se } x=3/2, \\ >0, & \text{se } x\in]1/2,3/2[, \end{cases}$$

perciò la funzione è decrescente in $]-\infty,1/2[$ e in $]3/2,+\infty[$, mentre è crescente in $]1/2,3/2[$. In $x=3/2$ ammette un massimo assoluto.



e) La derivata seconda è

$$g''(x) = \frac{-2(2x-1)^3-(3-2x)3(2x-1)^2 2}{(2x-1)^6} = \frac{-2(2x-1)-(3-2x)6}{(2x-1)^4} = \frac{8(x-2)}{(2x-1)^4}.$$

La derivata seconda è ≥ 0 se e solo se $x - 2 \geq 0$ cioè se $x \geq 2$, quindi

$$g''(x) \begin{cases} > 0, & \text{se } x \in]2, +\infty[, \\ = 0, & \text{se } x = 2, \\ < 0, & \text{se } x \in]-\infty, 1/2[\cup]1/2, 2[, \end{cases}$$

perciò la funzione è convessa in $]2, +\infty[$, mentre è concava in $]-\infty, 1/2[$ e in $]1/2, 2[$. In $x = 2$ ammette un punto di flesso.

10 a) Si ha $y'(t) = \frac{\log_3 \mathrm{e}}{4t-3} 4$ e sostituendo si ottiene l'equazione

$$\frac{4 \log_3 \mathrm{e}}{4t - 3} = \frac{3^{\log_3(4t-3)}(2 + t^2)}{t} = \frac{(4t - 3)(2 + t^2)}{t}$$

che non è identicamente soddisfatta (ad esempio, per $t = 1$ si ha $4 \log_3 \mathrm{e} \neq 3$). La funzione non è dunque soluzione. La funzione soddisfa invece la seconda condizione, essendo $y(1) = 0$.

b) Scrivendo $y' = \frac{dy}{dt}$ e utilizzando il metodo di separazione delle variabili si ha

$$\frac{1}{3^y}\, dy = \frac{2 + t^2}{t}\, dt$$

e integrando (utilizzando le tabelle)

$$\int 3^{-y}\, dy = \int \Big(\frac{2}{t} + t\Big)\, dt \qquad \Longrightarrow \qquad -3^{-y} = 2 \ln |t| + \frac{t^2}{2} + c,$$

dove c è la generica costante d'integrazione. Si osservi che essendo $t_0 = 1$ si può supporre che $t > 0$ dunque $|t| = t$. Si ottiene quindi

$$3^{-y} = -2 \ln t - \frac{t^2}{2} - c \qquad \Longleftrightarrow \qquad y = -\log_3 \Big(-2 \ln t - \frac{t^2}{2} - c \Big).$$

Imponendo la condizione $y(1) = 0$ (nella prima delle due equazioni qui sopra) si ha

$$1 = -\frac{1}{2} - c,$$

da cui si ricava $c = -3/2$. La soluzione è quindi

$$y(t) = -\log_3 \Big(\frac{3}{2} - 2 \ln t - \frac{t^2}{2}\Big).$$

Alternativamente, si poteva utilizzare direttamente la formula risolutiva per le equazioni a variabili separabili (insieme alla formula fondamentale del calcolo integrale)

$$\int_0^y 3^{-z}\, dz = \int_1^t \Big(\frac{2}{s} + s\Big)\, ds \quad \Longrightarrow \quad \big[-3^{-z}\big]_0^y = \Big[2 \ln s + \frac{s^2}{2}\Big]_1^t$$
$$\Longrightarrow \quad 1 - 3^{-y} = 2 \ln t + \frac{t^2}{2} - \frac{1}{2}$$

che risolta rispetto a y fornisce la soluzione cercata.

11 Dalla prima tabella si ottiene

$$\int \Big(\frac{3}{\sqrt{25 - x^2}} - \frac{3x\sqrt{x} + 5x}{2x^2}\Big)\, dx = 3 \int \frac{1}{\sqrt{25 - x^2}}\, dx - \frac{3}{2} \int x^{-1/2}\, dx - \frac{5}{2} \int \frac{1}{x}\, dx$$
$$= 3 \operatorname{arcsen} \frac{x}{5} - 3x^{1/2} - \frac{5}{2} \ln |x| + c,$$

con c costante arbitraria, mentre dalla seconda tabella si ha

$$\int_0^1 \frac{3x + 1}{x^2 + 1}\, dx = \frac{3}{2} \int_0^1 \frac{2x}{x^2 + 1}\, dx + \int_0^1 \frac{1}{x^2 + 1}\, dx = \Big[\frac{3}{2} \ln(x^2 + 1) + \operatorname{arctg} x\Big]_0^1 = \frac{3}{2} \ln 2 + \frac{\pi}{4}.$$