



Scritto		Voto
Teoria	Esercizi	

Istruzioni: apporre nome, cognome e numero di matricola su ogni foglio. Prima della consegna indicare nell'apposito spazio il numero totale di fogli di cui è composto l'elaborato. Svolgere solamente uno tra 10-b) e 11. Allegare lo svolgimento completo degli esercizi 9, 10 e 11. **Non è ammesso l'uso di libri, appunti e calcolatrici grafiche o programmabili.**

Cognome		Nome	
Corso di Laurea	<input type="checkbox"/> VIT <input type="checkbox"/> STAL	Matricola	
Vecchio ordinamento	<input type="checkbox"/> SI <input type="checkbox"/> NO	n. fogli allegati	

<p>1 Se $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = +\infty$ e $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = +\infty$, allora $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) - g(x)$ è</p> <p><input type="checkbox"/> A $-\infty$</p> <p><input type="checkbox"/> B $+\infty$</p> <p><input type="checkbox"/> C 0</p> <p><input type="checkbox"/> D non ci sono elementi sufficienti per rispondere</p>	<p>2 Se f è una funzione derivabile due volte in $]a, b[$ e vale $f''(x_0) = 0$ e $f'(x_0) > 0$ con $x_0 \in]a, b[$, allora</p> <p><input type="checkbox"/> A x_0 è sempre punto di minimo relativo per f</p> <p><input type="checkbox"/> B x_0 è sempre punto di massimo relativo per f</p> <p><input type="checkbox"/> C x_0 è sempre punto di flesso per f</p> <p><input type="checkbox"/> D nessuna delle precedenti</p>
<p>3 L'equazione differenziale $y' = \sin(t) - t^2y$ è</p> <p><input type="checkbox"/> A un'equazione lineare del primo ordine</p> <p><input type="checkbox"/> B un'equazione lineare del secondo ordine</p> <p><input type="checkbox"/> C un'equazione non lineare del primo ordine</p> <p><input type="checkbox"/> D un'equazione non lineare del secondo ordine</p>	<p>4 Il grafico della funzione $f(x) = \frac{3x^3 + 1}{2x^3 - 3}$ rappresenta</p> <p><input type="checkbox"/> A una retta</p> <p><input type="checkbox"/> B una parabola</p> <p><input type="checkbox"/> C un'iperbole</p> <p><input type="checkbox"/> D nessuna delle precedenti</p>

<p>5 Per la funzione $f(x) = (4/5)^x$, scrivere il dominio \mathcal{D}, l'immagine \mathcal{I}, e rappresentare qualitativamente il grafico.</p> <p>$\mathcal{D} =$</p> <p>$\mathcal{I} =$</p>	<p>Grafico</p>
--	----------------

6 Per definizione, una primitiva di una funzione $f(x)$ in $]a, b[$ è:

7 Enunciare il teorema dei punti critici.

8 Rappresentare il grafico di una funzione g che verifichi contemporaneamente le seguenti proprietà:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = -1 \qquad \lim_{x \rightarrow -3^-} g(x) = -\infty \qquad \lim_{x \rightarrow -3^+} g(x) = +\infty \qquad \lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = -\infty$$

9 Data la funzione

$$g(x) = (x^2 - x)e^{-2x}$$

a) determinare il dominio \mathcal{D} ; b) studiare il segno di g ; c) calcolare i limiti agli estremi del dominio; d) determinare gli intervalli in cui la funzione è crescente, quelli in cui è decrescente, e gli eventuali punti di massimo/minimo relativo; e) determinare gli intervalli in cui la funzione è convessa e quelli in cui è concava; f) disegnare un grafico approssimativo di g .

10 Dato il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' = \frac{3t^2 - 2te^{-t}}{y^4} \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

- a) dire se la funzione $y(t) = e^{2t^2}$ è soluzione del problema;
b) determinare una soluzione del problema nel caso in cui non lo sia la funzione di cui al punto precedente.

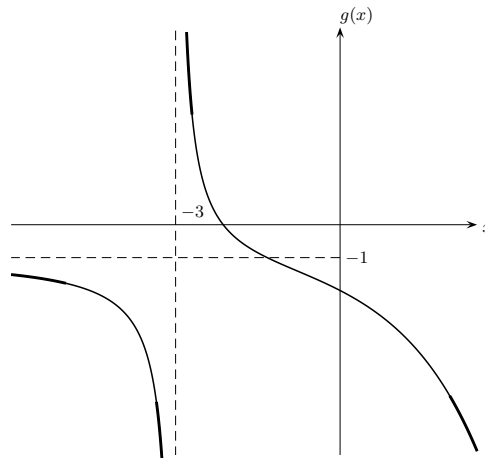
11 Calcolare i seguenti integrali

$$\int \left(\frac{4x^3 \cos^2 x - 3}{\cos^2 x} + \frac{6}{\sqrt{4 - x^2}} \right) dx, \qquad \int_0^1 (x - 2x^2)e^{-3x} dx.$$

IMPORTANTE! Risolvere solamente uno tra 10-b) e 11.

Soluzioni dei quesiti dell'esame del 13 luglio 2011

- 1 D; 2 D; 3 A; 4 D; 5-6-7 consultare il libro di testo; 8 in neretto si evidenziano le informazioni date dai limiti. Il grafico della funzione è quindi completato a piacere (linea sottile), ad esempio:



- 9 a) Il dominio è banalmente $\mathcal{D} = \mathbb{R}$. La funzione, prodotto di funzioni continue e derivabili, è ivi continua e derivabile.
 b) Poiché la funzione esponenziale è sempre strettamente positiva, $g(x) \geq 0$ se e solo se $x^2 - x \geq 0$ cioè $x \leq 0$ oppure $x \geq 1$. È dunque negativa se $0 < x < 1$, mentre si annulla in $x = 0$ e $x = 1$.
 c) Ha senso andare a studiare i limiti a $\pm\infty$. Si ha

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} (x^2 - x)e^{-2x} = [+ \infty \cdot + \infty] = + \infty,$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 - x}{e^{2x}} = 0,$$

dove nell'ultimo limite si è usato il ben noto fatto che la funzione esponenziale tende all'infinito più rapidamente di un qualsiasi polinomio per $x \rightarrow +\infty$. In particolare, dallo studio dei limiti segue che la funzione non ammette massimo, e ha un asintoto orizzontale a $+\infty$.

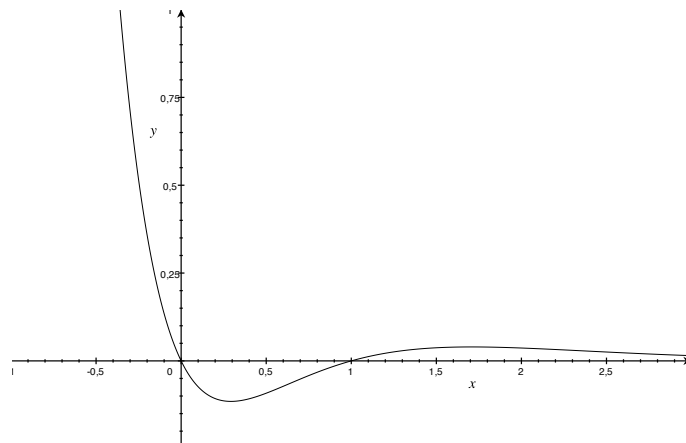
d) La derivata prima è

$$g'(x) = (2x - 1)e^{-2x} + (x^2 - x)e^{-2x}(-2) = (-2x^2 + 4x - 1)e^{-2x}.$$

La derivata prima è ≥ 0 se e solo se $-2x^2 + 4x - 1 \geq 0$ ovvero se $1 - \frac{\sqrt{2}}{2} \leq x \leq 1 + \frac{\sqrt{2}}{2}$, dunque

$$g'(x) \begin{cases} > 0, & \text{se } x \in]1 - \frac{\sqrt{2}}{2}, 1 + \frac{\sqrt{2}}{2}[, \\ = 0, & \text{se } x = 1 - \frac{\sqrt{2}}{2} \text{ oppure } x = 1 + \frac{\sqrt{2}}{2}, \\ < 0, & \text{se } x \in]-\infty, 1 - \frac{\sqrt{2}}{2}[\cup]1 + \frac{\sqrt{2}}{2}, +\infty[, \end{cases}$$

perciò la funzione è crescente in $]1 - \frac{\sqrt{2}}{2}, 1 + \frac{\sqrt{2}}{2}[$, mentre è decrescente in $] -\infty, 1 - \frac{\sqrt{2}}{2}[$ e in $]1 + \frac{\sqrt{2}}{2}, +\infty[$. In $x = 1 + \frac{\sqrt{2}}{2}$ ammette un massimo relativo mentre in $x = 1 - \frac{\sqrt{2}}{2}$ ammette un minimo relativo e assoluto.



e) La derivata seconda è

$$g''(x) = (-4x + 4)e^{-2x} - 2(-2x^2 + 4x - 1)e^{-2x} = 2(2x^2 - 6x + 3)e^{-2x}.$$

La derivata seconda è ≥ 0 se e solo se $2x^2 - 6x + 3 \geq 0$ cioè se $x \leq \frac{3-\sqrt{3}}{2}$ oppure $x \geq \frac{3+\sqrt{3}}{2}$, quindi

$$g''(x) \begin{cases} < 0, & \text{se } x \in]\frac{3-\sqrt{3}}{2}, \frac{3+\sqrt{3}}{2}[, \\ = 0, & \text{se } x = \frac{3-\sqrt{3}}{2} \text{ oppure } x = \frac{3+\sqrt{3}}{2}, \\ > 0, & \text{se } x \in]-\infty, \frac{3-\sqrt{3}}{2}[\cup]\frac{3+\sqrt{3}}{2}, +\infty[, \end{cases}$$

perciò la funzione è concava in $] \frac{3-\sqrt{3}}{2}, \frac{3+\sqrt{3}}{2} [$, mentre è convessa in $] -\infty, \frac{3-\sqrt{3}}{2} [$ e in $] \frac{3+\sqrt{3}}{2}, +\infty [$. In $x = \frac{3-\sqrt{3}}{2}$ e in $x = \frac{3+\sqrt{3}}{2}$ ammette due punti di flesso.

10 a) Si ha $y'(t) = 4te^{2t^2}$ e sostituendo si ottiene l'equazione

$$4te^{2t^2} = \frac{3t^2 - 2te^{-t}}{e^{8t^2}}$$

che non è identicamente soddisfatta per $t \in \mathbb{R}$ (ad esempio, per $t = 1$ si ha $4e^2 \neq (3 - 2e^{-1})/e^8$). La funzione non è dunque soluzione. La funzione soddisfa invece la seconda condizione, essendo $y(0) = 1$.

b) Scrivendo $y' = \frac{dy}{dt}$ e utilizzando il metodo di separazione delle variabili si ha

$$y^4 dy = (3t^2 - 2te^{-t}) dt$$

e integrando (utilizzando le tabelle)

$$\int y^4 dy = \int (3t^2 - 2te^{-t}) dt \quad \Longrightarrow \quad \frac{y^5}{5} = t^3 - 2(t+1)e^{-t} + c,$$

dove c è la generica costante d'integrazione; il secondo integrale è stato calcolato per parti:

$$\int 2te^{-t} dt = -2te^{-t} + \int 2e^{-t} dt = -2te^{-t} - 2e^{-t}.$$

Si ottiene quindi

$$y^5 = 5t^3 - 10(t+1)e^{-t} + 5c \quad \Longleftrightarrow \quad y = \sqrt[5]{5t^3 - 10(t+1)e^{-t} + 5c}.$$

Imponendo la condizione $y(0) = 1$ (nella prima delle due equazioni qui sopra) si ha

$$1 = -10 + 5c,$$

da cui si ricava $c = \frac{11}{5}$. La soluzione è quindi

$$y(t) = \sqrt[5]{5t^3 - 10(t+1)e^{-t} + 11}.$$

Alternativamente, si poteva utilizzare direttamente la formula risolutiva per le equazioni a variabili separabili (insieme alla formula fondamentale del calcolo integrale)

$$\begin{aligned} \int_1^y z^4 dz &= \int_0^t (3s^2 - 2se^{-s}) ds \quad \Longrightarrow \quad \left[\frac{z^5}{5} \right]_1^y = [s^3 - 2(s+1)e^{-s}]_0^t \\ &\Longrightarrow \quad \frac{y^5}{5} - \frac{1}{5} = t^3 - 2(t+1)e^{-t} + 2 \end{aligned}$$

che risolta rispetto a y fornisce la soluzione cercata.

11 Dalla prima tabella si ottiene

$$\int \left(\frac{4x^3 \cos^2 x - 3}{\cos^2 x} + \frac{6}{\sqrt{4-x^2}} \right) dx = 4 \int x^3 dx - 3 \int \frac{1}{\cos^2 x} dx + 6 \int \frac{1}{\sqrt{4-x^2}} dx = x^4 - 3 \operatorname{tg} x + 6 \arcsen \frac{x}{2} + c,$$

con c costante arbitraria, mentre integrando per parti si ha

$$\begin{aligned} \int_0^1 (x - 2x^2)e^{-3x} dx &= \left[(x - 2x^2) \frac{e^{-3x}}{-3} \right]_0^1 - \int_0^1 (1 - 4x) \frac{e^{-3x}}{-3} dx = \frac{e^{-3}}{3} - \left[(1 - 4x) \frac{e^{-3x}}{9} \right]_0^1 + \int_0^1 -4 \frac{e^{-3x}}{9} dx \\ &= \frac{e^{-3}}{3} + \frac{1}{3}e^{-3} + \frac{1}{9} + \left[4 \frac{e^{-3x}}{27} \right]_0^1 = \frac{2}{3}e^{-3} + \frac{1}{9} + \frac{4}{27}e^{-3} - \frac{4}{27} = \frac{22 - e^3}{27e^3}. \end{aligned}$$