Facoltà di Agraria

Corsi di Laurea in VIT e STAL
Modulo di Matematica
Esame del 13/07/2011
A.A. 2010/2011

Scritto		Voto
Teoria	Esercizi	

Istruzioni: apporre nome, cognome e numero di matricola su ogni foglio. Prima della consegna indicare nell'apposito spazio il numero totale di fogli di cui è composto l'elaborato. Svolgere solamente uno tra 10-b) e 11. Allegare lo svolgimento completo degli esercizi 9, 10 e 11. **Non è ammesso l'uso di libri, appunti e calcolatrici grafiche o programmabili.**

Cognome	Nome
Corso di Laurea $\boxed{VIT}$ $\boxed{STAL}$	Matricola
Vecchio ordinamento $\boxed{SI}$ $\boxed{NO}$	n. fogli allegati

1 Se $\lim_{x\to x_0} f(x) = +\infty$ e $\lim_{x\to x_0} g(x) = -3$, allora $\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)}$ è

- A $-\infty$
- B $+\infty$
- C 0
- D non ci sono elementi sufficienti per rispondere

2 Se f è una funzione derivabile due volte in $]a,b[$ e vale $f'(x) < 0$ e $f''(x) > 0$ in $]a,b[$, allora

- A f è decrescente e concava in $]a,b[$
- B f è crescente e convessa in $]a,b[$
- C f è decrescente e convessa in $]a,b[$
- D f è crescente e concava in $]a,b[$

3 L'equazione differenziale $y'' = y' - \operatorname{sen}(ty)$ è

- A un'equazione lineare del primo ordine
- B un'equazione lineare del secondo ordine
- C un'equazione non lineare del primo ordine
- D un'equazione non lineare del secondo ordine

4 Il grafico della funzione $f(x) = \frac{2}{3}x - 5x^2$ rappresenta

- A una retta
- B una parabola
- C un'iperbole
- D nessuna delle precedenti

5 Per la funzione $f(x) = \sqrt[5]{x}$, scrivere il dominio $\mathcal{D}$, l'immagine $\mathcal{I}$, e rappresentare qualitativamente il grafico.

$\mathcal{D} =$

$\mathcal{I} =$

Grafico

$\boxed{6}$ Per definizione, la derivata di una funzione $f(x)$ in x_0 è:

$\boxed{7}$ Enunciare il teorema fondamentale del calcolo integrale.

$\boxed{8}$ Rappresentare il grafico di una funzione g che verifichi contemporaneamente le seguenti proprietà:

$$\lim_{x\to-\infty} g(x) = +\infty \qquad \lim_{x\to 2^-} g(x) = +\infty \qquad \lim_{x\to 2^+} g(x) = -\infty \qquad \lim_{x\to+\infty} g(x) = -2$$

$\boxed{9}$ Data la funzione

$$g(x) = (x^2 - x)\mathrm{e}^{-2x}$$

a) determinare il dominio $\mathcal{D}$, b) studiare il segno di g; c) calcolare i limiti agli estremi del dominio; d) determinare gli intervalli in cui la funzione è crescente, quelli in cui è decrescente, e gli eventuali punti di massimo/minimo relativo; e) determinare gli intervalli in cui la funzione è convessa e quelli in cui è concava; f) disegnare un grafico approssimativo di g.

$\boxed{10}$ Dato il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' = \dfrac{3t\mathrm{e}^{-2t} + 4t^3}{y^2} \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

a) dire se la funzione $y(t) = \mathrm{e}^{3t^3}$ è soluzione del problema;

b) determinare una soluzione del problema nel caso in cui non lo sia la funzione di cui al punto precedente.

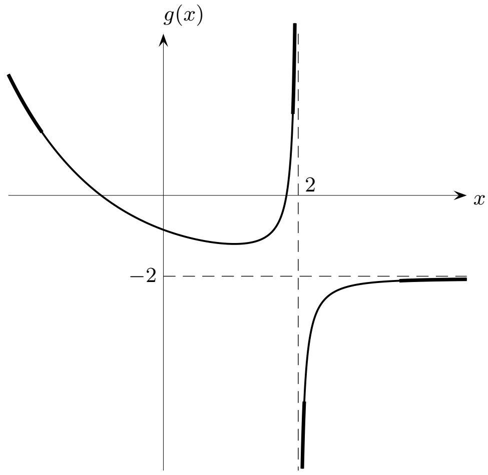
$\boxed{11}$ Calcolare i seguenti integrali

$$\int \Big(\frac{2}{9+x^2} - \frac{3x^2 \operatorname{sen}^2 x + 5}{\operatorname{sen}^2 x} \Big)\, dx, \qquad \int_0^1 (x^2 - 3x)\mathrm{e}^{-x}\, dx.$$

IMPORTANTE! Risolvere solamente uno tra 10-b) e 11.

Soluzioni dei quesiti dell'esame del 13 luglio 2011

$\boxed{\mathbf{1}}$ A; $\boxed{\mathbf{2}}$ C; $\boxed{\mathbf{3}}$ D; $\boxed{\mathbf{4}}$ B; $\boxed{\mathbf{5}}$-$\boxed{\mathbf{6}}$-$\boxed{\mathbf{7}}$ consultare il libro di testo; $\boxed{\mathbf{8}}$ in neretto si evidenziano le informazioni date dai limiti. Il grafico della funzione è quindi completato a piacere (linea sottile), ad esempio:



$\boxed{\mathbf{9}}$ a) Il dominio è banalmente $\mathcal{D} = \mathbb{R}$. La funzione, prodotto di funzioni continue e derivabili, è ivi continua e derivabile.

b) Poiché la funzione esponenziale è sempre strettamente positiva, $g(x) \geq 0$ se e solo se $x^2 - x \geq 0$ cioè $x \leq 0$ oppure $x \geq 1$. È dunque negativa se $0 < x < 1$, mentre si annulla in $x = 0$ e $x = 1$.

c) Ha senso andare a studiare i limiti a $\pm\infty$. Si ha

$$\lim_{x\to-\infty} g(x) = \lim_{x\to-\infty} (x^2 - x)\mathrm{e}^{-2x} = [+\infty \cdot +\infty] = +\infty,$$

$$\lim_{x\to+\infty} g(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^2 - x}{\mathrm{e}^{2x}} = 0,$$

dove nell'ultimo limite si è usato il ben noto fatto che la funzione esponenziale tende all'infinito più rapidamente di un qualsiasi polinomio per $x \to +\infty$. In particolare, dallo studio dei limiti segue che la funzione non ammette massimo, e ha un asintoto orizzontale a $+\infty$.

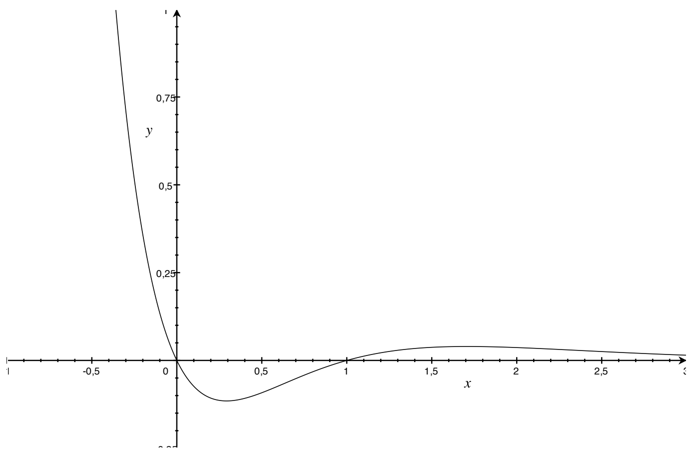
d) La derivata prima è

$$g'(x) = (2x - 1)\mathrm{e}^{-2x} + (x^2 - x)\mathrm{e}^{-2x}(-2) = (-2x^2 + 4x - 1)\mathrm{e}^{-2x}.$$

La derivata prima è ≥ 0 se e solo se $-2x^2 + 4x - 1 \geq 0$ ovvero se $1 - \frac{\sqrt{2}}{2} \leq x \leq 1 + \frac{\sqrt{2}}{2}$, dunque

$$g'(x) \begin{cases} > 0, & \text{se } x \in]1 - \frac{\sqrt{2}}{2}, 1 + \frac{\sqrt{2}}{2}[, \\ = 0, & \text{se } x = 1 - \frac{\sqrt{2}}{2} \text{ oppure } x = 1 + \frac{\sqrt{2}}{2}, \\ < 0, & \text{se } x \in]-\infty, 1 - \frac{\sqrt{2}}{2}[\cup]1 + \frac{\sqrt{2}}{2}, +\infty[, \end{cases}$$

perciò la funzione è crescente in $]1-\frac{\sqrt{2}}{2}, 1+\frac{\sqrt{2}}{2}[$, mentre è decrescente in $]-\infty, 1-\frac{\sqrt{2}}{2}[$ e in $]1+\frac{\sqrt{2}}{2}, +\infty[$. In $x = 1 + \frac{\sqrt{2}}{2}$ ammette un massimo relativo mentre in $x = 1 - \frac{\sqrt{2}}{2}$ ammette un minimo relativo e assoluto.



e) La derivata seconda è

$$g''(x) = (-4x+4)\mathrm{e}^{-2x} - 2(-2x^2+4x-1)\mathrm{e}^{-2x} = 2(2x^2-6x+3)\mathrm{e}^{-2x}.$$

La derivata seconda è ≥ 0 se e solo se $2x^2-6x+3 \geq 0$ cioè se $x \leq \frac{3-\sqrt{3}}{2}$ oppure $x \geq \frac{3+\sqrt{3}}{2}$, quindi

$$g''(x) \begin{cases} < 0, & \text{se } x \in]\frac{3-\sqrt{3}}{2}, \frac{3+\sqrt{3}}{2}[, \\ = 0, & \text{se } x = \frac{3-\sqrt{3}}{2} \text{ oppure } x = \frac{3+\sqrt{3}}{2}, \\ > 0, & \text{se } x \in]-\infty, \frac{3-\sqrt{3}}{2}[\cup]\frac{3+\sqrt{3}}{2}, +\infty[, \end{cases}$$

perciò la funzione è concava in $]\frac{3-\sqrt{3}}{2}, \frac{3+\sqrt{3}}{2}[$, mentre è convessa in $]-\infty, \frac{3-\sqrt{3}}{2}[$ e in $]\frac{3+\sqrt{3}}{2}, +\infty[$. In $x = \frac{3-\sqrt{3}}{2}$ e in $x = \frac{3+\sqrt{3}}{2}$ ammette due punti di flesso.

10 a) Si ha $y'(t) = 9t^2\mathrm{e}^{3t^3}$ e sostituendo si ottiene l'equazione

$$9t^2\mathrm{e}^{3t^3} = \frac{3t\mathrm{e}^{-2t}+4t^3}{\mathrm{e}^{6t^3}}$$

che non è identicamente soddisfatta per $t \in \mathbb{R}$ (ad esempio, per $t=1$ si ha $9\mathrm{e}^3 \neq (3\mathrm{e}^{-2}+4)/\mathrm{e}^6$). La funzione non è dunque soluzione. La funzione soddisfa invece la seconda condizione, essendo $y(0)=1$.
b) Scrivendo $y' = \frac{dy}{dt}$ e utilizzando il metodo di separazione delle variabili si ha

$$y^2\,dy = (3t\mathrm{e}^{-2t}+4t^3)\,dt$$

e integrando (utilizzando le tabelle)

$$\int y^2\,dy = \int (3t\mathrm{e}^{-2t}+4t^3)\,dt \qquad \Longrightarrow \qquad \frac{y^3}{3} = -\frac{3}{4}(2t+1)\mathrm{e}^{-2t} + t^4 + c,$$

dove c è la generica costante d'integrazione; il secondo integrale è stato calcolato per parti:

$$\int 3t\mathrm{e}^{-2t}\,dt = 3t\frac{\mathrm{e}^{-2t}}{-2} - \int 3\frac{\mathrm{e}^{-2t}}{-2}\,dt = -\frac{3}{2}t\mathrm{e}^{-2t} + \frac{3}{2}\int \mathrm{e}^{-2t}\,dt = -\frac{3}{2}t\mathrm{e}^{-2t} - \frac{3}{4}\mathrm{e}^{-2t}.$$

Si ottiene quindi

$$y^3 = -\frac{9}{4}(2t+1)\mathrm{e}^{-2t} + 3t^4 + 3c \qquad \Longleftrightarrow \qquad y = \sqrt[3]{-\frac{9}{4}(2t+1)\mathrm{e}^{-2t} + 3t^4 + 3c}.$$

Imponendo la condizione $y(0)=1$ (nella prima delle due equazioni qui sopra) si ha

$$1 = -\frac{9}{4} + 3c,$$

da cui si ricava $c = \frac{13}{12}$. La soluzione è quindi

$$y(t) = \sqrt[3]{-\frac{9}{4}(2t+1)\mathrm{e}^{-2t} + 3t^4 + \frac{13}{4}}.$$

Alternativamente, si poteva utilizzare direttamente la formula risolutiva per le equazioni a variabili separabili (insieme alla formula fondamentale del calcolo integrale)

$$\int_1^y z^2\,dz = \int_0^t (3s\mathrm{e}^{-2s}+4s^3)\,ds \quad \Longrightarrow \quad \left[\frac{z^3}{3}\right]_1^y = \left[-\frac{3}{4}(2s+1)\mathrm{e}^{-2s} + s^4\right]_0^t$$

$$\Longrightarrow \quad \frac{y^3}{3} - \frac{1}{3} = -\frac{3}{4}(2t+1)\mathrm{e}^{-2t} + t^4 + \frac{3}{4}$$

che risolta rispetto a y fornisce la soluzione cercata.

11 Dalla prima tabella si ottiene

$$\int \Big(\frac{2}{9+x^2} - \frac{3x^2\,\mathrm{sen}^2\,x+5}{\mathrm{sen}^2\,x}\Big)\,dx = 2\int \frac{1}{9+x^2}\,dx - 3\int x^2\,dx - 5\int \frac{1}{\mathrm{sen}^2\,x}\,dx = \frac{2}{3}\,\mathrm{arctg}\,\frac{x}{3} - x^3 + 5\cot x + c,$$

con c costante arbitraria, mentre integrando per parti si ha

$$\int_0^1 (x^2-3x)\mathrm{e}^{-x}\,dx = \big[-(x^2-3x)\mathrm{e}^{-x}\big]_0^1 + \int_0^1 (2x-3)\mathrm{e}^{-x}\,dx = 2\mathrm{e}^{-1} + \big[-(2x-3)\mathrm{e}^{-x}\big]_0^1 + \int_0^1 2\mathrm{e}^{-x}\,dx$$

$$= 2\mathrm{e}^{-1} + (\mathrm{e}^{-1}-3) + \big[-2\mathrm{e}^{-x}\big]_0^1 = 3\mathrm{e}^{-1} - 3 - 2\mathrm{e}^{-1} + 2 = \frac{1-\mathrm{e}}{\mathrm{e}}.$$