



Scritto		Voto
Teoria	Esercizi	

**Istruzioni:** apporre nome, cognome e numero di matricola su ogni foglio. Prima della consegna indicare nell'apposito spazio il numero totale di fogli di cui è composto l'elaborato. Svolgere solamente uno tra 10-b) e 11. Allegare lo svolgimento completo degli esercizi 9, 10 e 11. **Non è ammesso l'uso di libri, appunti e calcolatrici grafiche o programmabili.**

Cognome		Nome	
Corso di Laurea	<input type="checkbox"/> VIT <input type="checkbox"/> STAL	Matricola	
Vecchio ordinamento	<input type="checkbox"/> SI <input type="checkbox"/> NO	n. fogli allegati	

<p><b>1</b> Se <math>\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = +\infty</math> e <math>\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = -3</math>, allora <math>\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)}</math> è</p> <p><input type="checkbox"/> A <math>-\infty</math></p> <p><input type="checkbox"/> B <math>+\infty</math></p> <p><input type="checkbox"/> C 0</p> <p><input type="checkbox"/> D non ci sono elementi sufficienti per rispondere</p>	<p><b>2</b> Se <math>f</math> è una funzione derivabile due volte in <math>]a, b[</math> e vale <math>f''(x) &gt; 0</math> per ogni <math>x \in ]a, b[</math>, allora</p> <p><input type="checkbox"/> A <math>f</math> è crescente</p> <p><input type="checkbox"/> B <math>f</math> è decrescente</p> <p><input type="checkbox"/> C <math>f</math> è concava</p> <p><input type="checkbox"/> D <math>f</math> è convessa</p>
<p><b>3</b> L'equazione differenziale <math>y' = t^5 y - \ln t</math> è</p> <p><input type="checkbox"/> A un'equazione lineare del primo ordine</p> <p><input type="checkbox"/> B un'equazione lineare del secondo ordine</p> <p><input type="checkbox"/> C un'equazione non lineare del primo ordine</p> <p><input type="checkbox"/> D un'equazione non lineare del secondo ordine</p>	<p><b>4</b> Il grafico della funzione <math>f(x) = \frac{3-7x}{1-4x}</math> rappresenta</p> <p><input type="checkbox"/> A una retta</p> <p><input type="checkbox"/> B una parabola</p> <p><input type="checkbox"/> C un'iperbole</p> <p><input type="checkbox"/> D nessuna delle precedenti</p>

<p><b>5</b> Per la funzione <math>f(x) = \operatorname{tg} x</math>, scrivere il dominio <math>\mathcal{D}</math>, l'immagine <math>\mathcal{I}</math>, e rappresentare qualitativamente il grafico.</p> <p><math>\mathcal{D} =</math></p> <p><math>\mathcal{I} =</math></p>	<p>Grafico</p>
--	----------------

**6** Per definizione, una primitiva di una funzione  $f(x)$  in  $]a, b[$  è:

**7** Enunciare il teorema dei punti critici.

**8** Rappresentare il grafico di una funzione  $g$  che verifichi contemporaneamente le seguenti proprietà:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = -1 \qquad \lim_{x \rightarrow 1^-} g(x) = +\infty \qquad \lim_{x \rightarrow 1^+} g(x) = -\infty \qquad \lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = -\infty$$

**9** Data la funzione

$$g(x) = \frac{2 - x^2}{x^2 - x + 3}$$

a) determinare il dominio  $\mathcal{D}$ ; b) studiare il segno di  $g$ ; c) calcolare i limiti agli estremi del dominio; d) determinare gli intervalli in cui la funzione è crescente, quelli in cui è decrescente, e gli eventuali punti di massimo/minimo relativo; e) determinare gli eventuali asintoti; f) determinare l'equazione della retta tangente al grafico nel punto di ascissa  $x_0 = 0$ ; g) disegnare un grafico approssimativo di  $g$ .

**10** Dato il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' = (t^2 \cos(t^3) - 2)y^4 \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

- a) dire se la funzione  $y(t) = \cos(2t^2 - t)$  è soluzione del problema;  
b) determinare una soluzione del problema nel caso in cui non lo sia la funzione di cui al punto precedente.

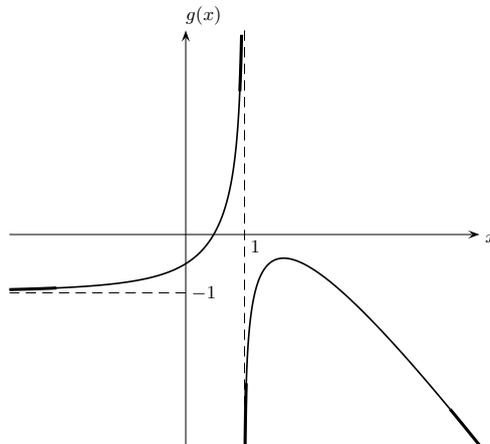
**11** Calcolare i seguenti integrali

$$\int \left( x\sqrt{x} + \frac{5}{4+x^2} \right) dx, \qquad \int_0^{\pi/4} \frac{\sin x}{\cos^2 x} dx.$$

**IMPORTANTE! Risolvere solamente uno tra 10-b) e 11.**

## Soluzioni dei quesiti dell'esame del 30 giugno 2011

- 1 A; 2 D; 3 A; 4 A; 5-6-7 consultare il libro di testo; 8 in neretto si evidenziano le informazioni date dai limiti. Il grafico della funzione è quindi completato a piacere (linea sottile), ad esempio:



- 9 a) La funzione è definita se  $x^2 - x + 3 \neq 0$ ; avendo il discriminante negativo, l'equazione di secondo grado non ha soluzioni, dunque il denominatore non si annulla mai e il dominio è  $\mathcal{D} = \mathbb{R}$ . La funzione (razionale) è ivi continua e derivabile.
- b) Poiché il denominatore è sempre positivo nel dominio, la funzione è  $\geq 0$  se e solo se  $2 - x^2 \geq 0$  cioè  $-\sqrt{2} \leq x \leq \sqrt{2}$ . È dunque negativa se  $x < -\sqrt{2}$  oppure  $x > \sqrt{2}$ , mentre si annulla in  $x = -\sqrt{2}$  e  $x = \sqrt{2}$ .
- c) Ha senso andare a studiare i limiti a  $\pm\infty$ . Si ha

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{2/x^2 - 2}{1 - 1/x + 3/x^2} = \left[ \frac{0 - 1}{1 - 0 + 0} \right] = -1,$$

quindi la funzione ammette un asintoto orizzontale a  $\pm\infty$ .

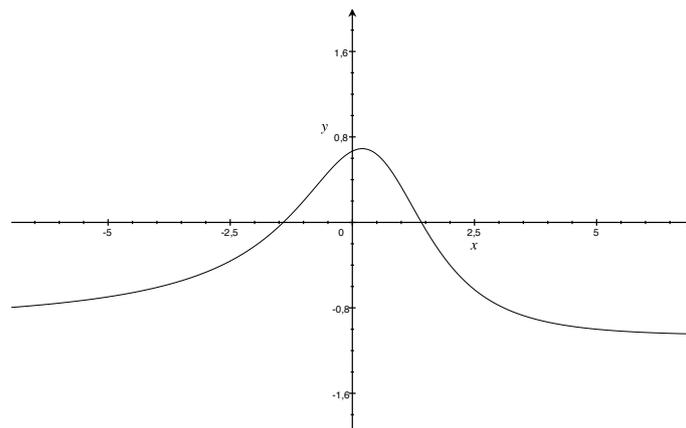
d) La derivata prima è

$$g'(x) = \frac{-2x(x^2 - x + 3) - (2 - x^2)(2x - 1)}{(x^2 - x + 3)^2} = \frac{x^2 - 10x + 2}{(x^2 - x + 3)^2}.$$

Il numeratore è  $\geq 0$  se e solo se  $x^2 - 10x + 2 \geq 0$  ovvero se  $x \leq 5 - \sqrt{23}$  oppure  $x \geq 5 + \sqrt{23}$ , dunque

$$g'(x) \begin{cases} < 0, & \text{se } x \in ]5 - \sqrt{23}, 5 + \sqrt{23}[ , \\ = 0, & \text{se } x = 5 - \sqrt{23} \text{ oppure } x = 5 + \sqrt{23}, \\ > 0, & \text{se } x \in ]-\infty, 5 - \sqrt{23}[ \cup ]5 + \sqrt{23}, +\infty[ , \end{cases}$$

perciò la funzione è decrescente in  $]5 - \sqrt{23}, 5 + \sqrt{23}[$ , mentre è crescente in  $] -\infty, 5 - \sqrt{23}[$  e in  $]5 + \sqrt{23}, +\infty[$ . In  $x = 5 - \sqrt{23}$  e in  $x = 5 + \sqrt{23}$  ammette, rispettivamente, un massimo assoluto ed un minimo assoluto.



e) Dal punto c) segue immediatamente che la retta  $x = -1$  è un asintoto orizzontale, dunque non possono esserci asintoti obliqui. Poiché la funzione è definita e continua su tutto  $\mathbb{R}$  non ci possono neanche essere asintoti verticali.

f) L'equazione della retta tangente al grafico nel generico punto  $(x_0, g(x_0))$  è

$$y = (x - x_0)g'(x_0) + g(x_0).$$

Poiché  $g(0) = 2/3$  e  $g'(0) = 2/9$ , l'equazione della retta cercata è

$$y = \frac{2}{9}x + \frac{2}{3}.$$

**10** a) Si ha  $y'(t) = -(4t - 1)\sin(2t^2 - t)$  e sostituendo si ottiene l'equazione

$$-(4t - 1)\sin(2t^2 - t) = (t^2 \cos(t^3) - 2)\cos^4(2t^2 - t)$$

che non è identicamente soddisfatta per  $t \in \mathbb{R}$  (ad esempio, per  $t = 0$  si ha  $0 \neq -2$ ). La funzione non è dunque soluzione. La funzione soddisfa invece la seconda condizione, essendo  $y(0) = 1$ .

b) Scrivendo  $y' = \frac{dy}{dt}$  e utilizzando il metodo di separazione delle variabili si ha

$$\frac{1}{y^4} dy = (t^2 \cos(t^3) - 2) dt$$

e integrando (utilizzando le tabelle)

$$\int y^{-4} dy = \int (t^2 \cos(t^3) - 2) dt \quad \Longrightarrow \quad \frac{y^{-3}}{-3} = \frac{1}{3} \sin(t^3) - 2t + c,$$

dove  $c$  è la generica costante d'integrazione; il secondo integrale è stato calcolato con la seconda tabella:

$$\int t^2 \cos(t^3) dt = \frac{1}{3} \int 3t^2 \cos(t^3) dt = \frac{1}{3} \int (t^3)' \cos(t^3) dt = \frac{1}{3} \sin(t^3) + c.$$

Si ottiene quindi

$$y^{-3} = 6t - \sin(t^3) - 3c \quad \Longleftrightarrow \quad y = \sqrt[3]{\frac{1}{6t - \sin(t^3) - 3c}}.$$

Imponendo la condizione  $y(0) = 1$  (nella prima delle due equazioni qui sopra) si ha

$$1 = -3c,$$

da cui si ricava  $c = -\frac{1}{3}$ . La soluzione è quindi

$$y(t) = \sqrt[3]{\frac{1}{6t - \sin(t^3) + 1}}.$$

Alternativamente, si poteva utilizzare direttamente la formula risolutiva per le equazioni a variabili separabili (insieme alla formula fondamentale del calcolo integrale)

$$\begin{aligned} \int_1^y z^{-4} dz &= \int_0^t (s^2 \cos(s^3) - 2) ds \quad \Longrightarrow \quad \left[ \frac{z^{-3}}{-3} \right]_1^y = \left[ \frac{1}{3} \sin(s^3) - 2s \right]_0^t \\ &\Longrightarrow \quad -\frac{1}{3y^3} + \frac{1}{3} = \frac{1}{3} \sin(t^3) - 2t \end{aligned}$$

che risolta rispetto a  $y$  fornisce la soluzione cercata.

**11** Dalla prima tabella si ottiene

$$\int \left( x\sqrt{x} + \frac{5}{4+x^2} \right) dx = \int x^{3/2} dx + 5 \int \frac{1}{4+x^2} dx = \frac{x^{5/2}}{5/2} + \frac{5}{2} \operatorname{arctg} \frac{x}{2} + c,$$

con  $c$  costante arbitraria, mentre dalla seconda tabella si ha

$$\int_0^{\pi/4} \frac{\sin x}{\cos^2 x} dx = - \int_0^{\pi/4} (\cos x)' (\cos x)^{-2} dx = - \left[ \frac{(\cos x)^{-1}}{-1} \right]_0^{\pi/4} = \frac{1}{1/\sqrt{2}} - 1 = \sqrt{2} - 1.$$