Facoltà di Agraria

Corsi di Laurea in VIT e STAL
Modulo di Matematica
Esame del 30/06/2011
A.A. 2010/2011

Scritto		Voto
Teoria	Esercizi	

Istruzioni: apporre nome, cognome e numero di matricola su ogni foglio. Prima della consegna indicare nell'apposito spazio il numero totale di fogli di cui è composto l'elaborato. Svolgere solamente uno tra 10-b) e 11. Allegare lo svolgimento completo degli esercizi 9, 10 e 11. **Non è ammesso l'uso di libri, appunti e calcolatrici grafiche o programmabili.**

Cognome	Nome
Corso di Laurea $\boxed{VIT}$ $\boxed{STAL}$	Matricola
Vecchio ordinamento $\boxed{SI}$ $\boxed{NO}$	n. fogli allegati

1 Se $\lim_{x\to x_0} f(x) = 1$ e $\lim_{x\to x_0} g(x) = 0$, allora $\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)}$ è

- A 1
- B $+\infty$
- C 0
- D non ci sono elementi sufficienti per rispondere

2 Se f è una funzione derivabile in $]a, b[$ e vale $f'(x) < 0$ per ogni $x \in]a, b[$, allora

- A f è crescente
- B f è decrescente
- C f è concava
- D f è convessa

3 L'equazione differenziale $y'' = t \operatorname{sen}(y + y')$ è

- A un'equazione lineare del primo ordine
- B un'equazione lineare del secondo ordine
- C un'equazione non lineare del primo ordine
- D un'equazione non lineare del secondo ordine

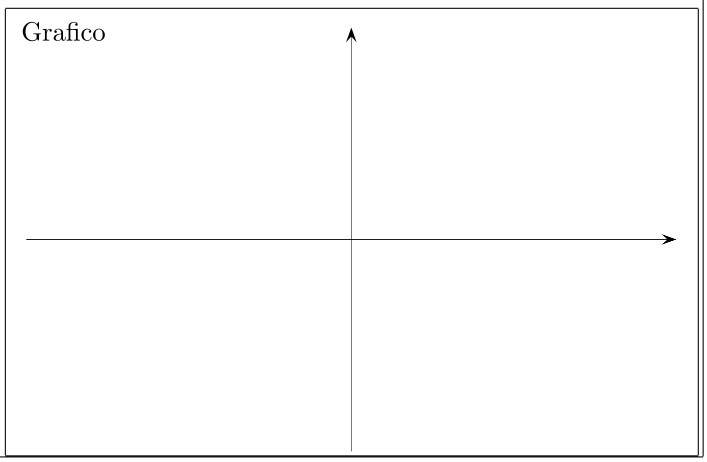
4 Il grafico della funzione $f(x) = \dfrac{2x-1}{3+x^4}$ rappresenta

- A una retta
- B una parabola
- C un'iperbole
- D nessuna delle precedenti

5 Per la funzione $f(x) = \log_{1/7} x$, scrivere il dominio $\mathcal{D}$, l'immagine $\mathcal{I}$, e rappresentare qualitativamente il grafico.

$\mathcal{D} =$

$\mathcal{I} =$



6 La derivata di una funzione f nel punto x_0 rappresenta geometricamente:

7 Enunciare il teorema fondamentale del calcolo integrale.

8 Rappresentare il grafico di una funzione g che verifichi contemporaneamente le seguenti proprietà:

$$\lim_{x\to-\infty} g(x) = +\infty \qquad \lim_{x\to(-1)^-} g(x) = -\infty \qquad \lim_{x\to(-1)^+} g(x) = 2 \qquad \lim_{x\to+\infty} g(x) = -1$$

9 Data la funzione

$$g(x) = \frac{2x^2 - 1}{3x^2 + 2x + 1}$$

a) determinare il dominio $\mathcal{D}$, b) studiare il segno di g; c) calcolare i limiti agli estremi del dominio; d) determinare gli intervalli in cui la funzione è crescente, quelli in cui è decrescente, e gli eventuali punti di massimo/minimo relativo; e) determinare gli eventuali asintoti; f) determinare l'equazione della retta tangente al grafico nel punto di ascissa $x_0 = 0$; g) disegnare un grafico approssimativo di g.

10 Dato il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' = (3 + t\,\mathrm{sen}(t^2))y^6 \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

a) dire se la funzione $y(t) = \cos(t + t^3)$ è soluzione del problema;

b) determinare una soluzione del problema nel caso in cui non lo sia la funzione di cui al punto precedente.

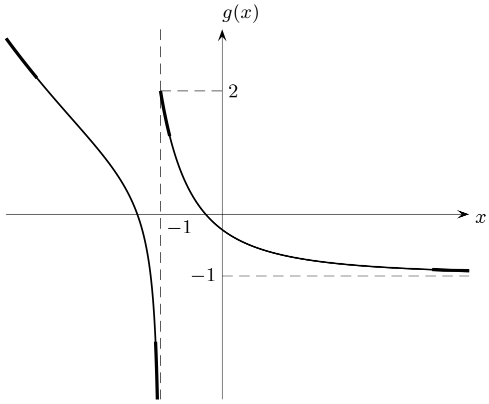
11 Calcolare i seguenti integrali

$$\int \left(x^2 \sqrt[3]{x} - \frac{2}{\sqrt{9 - x^2}} \right) dx, \qquad \int_{\pi/4}^{\pi/2} \frac{\cos x}{\mathrm{sen}^3\, x}\, dx.$$

IMPORTANTE! Risolvere solamente uno tra 10-b) e 11.

Soluzioni dei quesiti dell'esame del 30 giugno 2011

1 D; **2** B; **3** D; **4** D; **5**-**6**-**7** consultare il libro di testo; **8** in neretto si evidenziano le informazioni date dai limiti. Il grafico della funzione è quindi completato a piacere (linea sottile), ad esempio:



9 a) La funzione è definita se $3x^2+2x+1 \neq 0$; avendo il discriminante negativo, l'equazione di secondo grado non ha soluzioni, dunque il denominatore non si annulla mai e il dominio è $\mathcal{D}=\mathbb{R}$. La funzione (razionale) è ivi continua e derivabile.

b) Poiché il denominatore è sempre positivo nel dominio, la funzione è ≥ 0 se e solo se $2x^2-1 \geq 0$ cioè $x \geq 1/\sqrt{2}$ oppure $x \leq -1/\sqrt{2}$. È dunque negativa se $-1/\sqrt{2} < x < 1/\sqrt{2}$, mentre si annulla in $x=-1/\sqrt{2}$ e $x=1/\sqrt{2}$.

c) Ha senso andare a studiare i limiti a $\pm\infty$. Si ha

$$\lim_{x\to\pm\infty} g(x) = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{2-1/x^2}{3+2/x+1/x^2} = \left[\frac{2-0}{3+0+0}\right] = \frac{2}{3},$$

quindi la funzione ammette un asintoto orizzontale a $\pm\infty$.

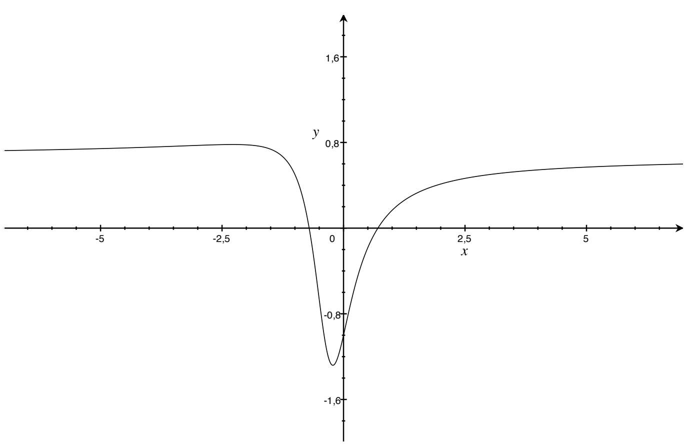
d) La derivata prima è

$$g'(x) = \frac{4x(3x^2+2x+1)-(2x^2-1)(6x+2)}{(3x^2+2x+1)^2} = \frac{2(2x^2+5x+1)}{(3x^2+2x+1)^2}.$$

Il numeratore è ≥ 0 se e solo se $2x^2+5x+1 \geq 0$ ovvero se $x \leq \frac{-5-\sqrt{17}}{4}$ oppure $x \geq \frac{-5+\sqrt{17}}{4}$, dunque

$$g'(x) \begin{cases} <0, & \text{se } x \in \left]\frac{-5-\sqrt{17}}{4}, \frac{-5+\sqrt{17}}{4}\right[, \\ =0, & \text{se } x = \frac{-5-\sqrt{17}}{4} \text{ oppure } x = \frac{-5+\sqrt{17}}{4}, \\ >0, & \text{se } x \in \left]-\infty, \frac{-5-\sqrt{17}}{4}\right[\cup \left]\frac{-5+\sqrt{17}}{4}, +\infty\right[, \end{cases}$$

perciò la funzione è decrescente in $\left]\frac{-5-\sqrt{17}}{4}, \frac{-5+\sqrt{17}}{4}\right[$, mentre è crescente in $\left]-\infty, \frac{-5-\sqrt{17}}{4}\right[$ e in $\left]\frac{-5+\sqrt{17}}{4}, +\infty\right[$. In $x=\frac{-5-\sqrt{17}}{4}$ e in $x=\frac{-5+\sqrt{17}}{4}$ ammette, rispettivamente, un massimo assoluto ed un minimo assoluto.



e) Dal punto c) segue immediatamente che la retta $x = 2/3$ è un asintoto orizzontale, dunque non possono esserci asintoti obliqui. Poiché la funzione è definita e continua su tutto $\mathbb{R}$ non ci possono neanche essere asintoti verticali.

f) L'equazione della retta tangente al grafico nel generico punto $(x_0, g(x_0))$ è

$$y = (x - x_0)g'(x_0) + g(x_0).$$

Poiché $g(0) = -1$ e $g'(0) = 2$, l'equazione della retta cercata è

$$y = 2x - 1.$$

10 a) Si ha $y'(t) = -(1 + 3t^2)\operatorname{sen}(t + t^3)$ e sostituendo si ottiene l'equazione

$$-(1 + 3t^2)\operatorname{sen}(t + t^3) = (3 + t\operatorname{sen}(t^2))\cos^6(t + t^3)$$

che non è identicamente soddisfatta per $t \in \mathbb{R}$ (ad esempio, per $t = 0$ si ha $0 \neq 3$). La funzione non è dunque soluzione. La funzione soddisfa invece la seconda condizione, essendo $y(0) = 1$.

b) Scrivendo $y' = \frac{dy}{dt}$ e utilizzando il metodo di separazione delle variabili si ha

$$\frac{1}{y^6}\,dy = (3 + t\operatorname{sen}(t^2))\,dt$$

e integrando (utilizzando le tabelle)

$$\int y^{-6}\,dy = \int (3 + t\operatorname{sen}(t^2))\,dt \qquad \Longrightarrow \qquad \frac{y^{-5}}{-5} = 3t - \frac{1}{2}\cos(t^2) + c,$$

dove c è la generica costante d'integrazione; il secondo integrale è stato calcolato con la seconda tabella:

$$\int t\operatorname{sen}(t^2)\,dt = \frac{1}{2}\int 2t\operatorname{sen}(t^2)\,dt = \frac{1}{2}\int (t^2)'\operatorname{sen}(t^2)\,dt = -\frac{1}{2}\cos(t^2) + c.$$

Si ottiene quindi

$$y^{-5} = \frac{5\cos(t^2) - 30t - 10c}{2} \qquad \Longleftrightarrow \qquad y = \sqrt[5]{\frac{2}{5\cos(t^2) - 30t - 10c}}.$$

Imponendo la condizione $y(0) = 1$ (nella prima delle due equazioni qui sopra) si ha

$$1 = \frac{5 - 10c}{2},$$

da cui si ricava $c = \frac{3}{10}$. La soluzione è quindi

$$y(t) = \sqrt[5]{\frac{2}{5\cos(t^2) - 30t - 3}}.$$

Alternativamente, si poteva utilizzare direttamente la formula risolutiva per le equazioni a variabili separabili (insieme alla formula fondamentale del calcolo integrale)

$$\begin{aligned}\int_1^y z^{-6}\,dz = \int_0^t (3 + s\operatorname{sen}(s^2))\,ds \quad &\Longrightarrow \quad \left[\frac{z^{-5}}{-5}\right]_1^y = \left[3s - \frac{1}{2}\cos(s^2)\right]_0^t \\ &\Longrightarrow \quad -\frac{1}{5y^5} + \frac{1}{5} = 3t - \frac{1}{2}\cos(t^2) + \frac{1}{2}\end{aligned}$$

che risolta rispetto a y fornisce la soluzione cercata.

11 Dalla prima tabella si ottiene

$$\int \left(x^2\sqrt[3]{x} - \frac{2}{\sqrt{9 - x^2}}\right)dx = \int x^{7/3}\,dx - 2\int \frac{1}{\sqrt{9 - x^2}}\,dx = \frac{x^{10/3}}{10/3} - 2\operatorname{arcsen}\frac{x}{3} + c,$$

con c costante arbitraria, mentre dalla seconda tabella si ha

$$\int_{\pi/4}^{\pi/2} \frac{\cos x}{\operatorname{sen}^3 x}\,dx = \int_{\pi/4}^{\pi/2} (\operatorname{sen} x)'(\operatorname{sen} x)^{-3}\,dx = \left[\frac{(\operatorname{sen} x)^{-2}}{-2}\right]_{\pi/4}^{\pi/2} = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2(1/\sqrt{2})^2} = \frac{1}{2}.$$