Facoltà di Agraria

Corsi di Laurea in VIT e STAL
Modulo di Matematica
Esame del 16/02/2011
A.A. 2010/2011

Scritto		Voto
Teoria	Esercizi	

Istruzioni: apporre nome, cognome e numero di matricola su ogni foglio. Prima della consegna indicare nell'apposito spazio il numero totale di fogli di cui è composto l'elaborato. Svolgere solamente uno tra 10-b) e 11. Allegare lo svolgimento completo degli esercizi 9, 10 e 11. **Non è ammesso l'uso di libri, appunti e calcolatrici grafiche o programmabili.**

Cognome	Nome
Corso di Laurea $\boxed{VIT}$ $\boxed{STAL}$	Matricola
Vecchio ordinamento $\boxed{SI}$ $\boxed{NO}$	n. fogli allegati

1 Se $\lim_{x\to x_0} f(x) = 0^+$ e $\lim_{x\to x_0} g(x) = 0^-$, allora $\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)}$ è

- A $-\infty$
- B $+\infty$
- C 1
- D non ci sono elementi sufficienti per rispondere

2 Se f è una funzione derivabile due volte in $]a,b[$ e vale $f'(x) < 0$ per ogni $x \in]a,b[$, allora

- A f è decrescente in $[a,b]$
- B f è crescente in $[a,b]$
- C f è concava in $[a,b]$
- D f è convessa in $[a,b]$

3 L'equazione differenziale $y' = 3t - 5\,\mathrm{tg}\, y$ è

- A un'equazione lineare del primo ordine
- B un'equazione lineare del secondo ordine
- C un'equazione non lineare del primo ordine
- D un'equazione non lineare del secondo ordine

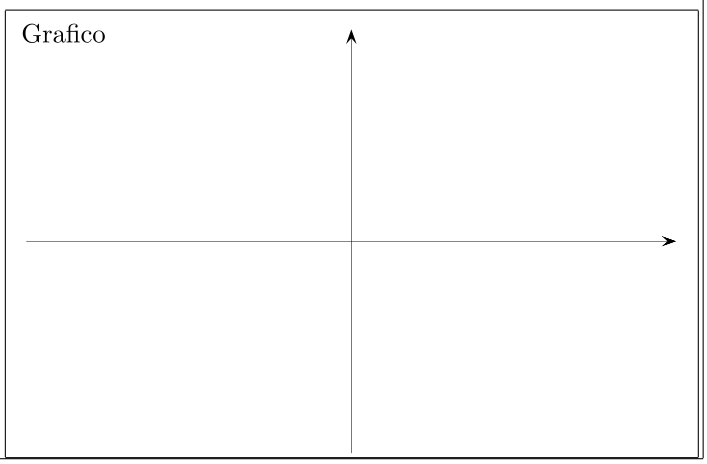
4 Il grafico della funzione $f(x) = \frac{130}{7} - \frac{27x}{2}$ rappresenta

- A una retta
- B una parabola
- C un'iperbole
- D nessuna delle precedenti

5 Per la funzione $f(x) = \sqrt[8]{x}$, scrivere il dominio $\mathcal{D}$, l'immagine $\mathcal{I}$, e rappresentare qualitativamente il grafico.

$\mathcal{D} =$

$\mathcal{I} =$



$\boxed{\mathbf{6}}$ L'integrale definito di una funzione positiva f su $[a, b]$ rappresenta:

$\boxed{\mathbf{7}}$ Descrivere con precisione le relazioni che intercorrono tra la derivata di una funzione e le sue proprietà di monotonia.

$\boxed{\mathbf{8}}$ Rappresentare il grafico di una funzione g che verifichi contemporaneamente le seguenti proprietà:

$$\lim_{x\to-\infty} g(x) = -\infty \qquad \lim_{x\to 2^-} g(x) = +\infty \qquad \lim_{x\to 2^+} g(x) = -\infty \qquad \lim_{x\to+\infty} g(x) = 4$$

$\boxed{\mathbf{9}}$ Data la funzione

$$g(x) = \frac{1-4x}{(3x+1)^2}$$

a) determinare il dominio $\mathcal{D}$, b) studiare il segno di g; c) calcolare i limiti agli estremi del dominio; d) determinare gli intervalli in cui la funzione è crescente, quelli in cui è decrescente, e gli eventuali punti di massimo/minimo relativo; e) determinare gli intervalli in cui la funzione è convessa e quelli in cui è concava; f) determinare gli eventuali asintoti; g) disegnare un grafico approssimativo di g.

$\boxed{\mathbf{10}}$ Dato il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' = 3y - t^2 \\ y(-2) = 0 \end{cases}$$

a) dire se la funzione $y(t) = (t+2)\mathrm{e}^{3t}$ è soluzione del problema;

b) determinare una soluzione del problema nel caso in cui non lo sia la funzione di cui al punto precedente.

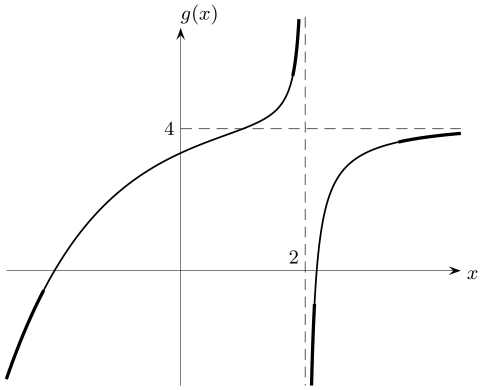
$\boxed{\mathbf{11}}$ Calcolare i seguenti integrali

$$\int \Big(\frac{\sqrt{x}+5}{x^2} - \frac{6}{\cos^2 x} \Big)\, dx, \qquad \int_0^1 (2x^2 - 3x)\mathrm{e}^{2x}\, dx.$$

IMPORTANTE! Risolvere solamente uno tra 10-b) e 11.

Soluzioni dei quesiti dell'esame del 16 febbraio 2011

1 D; **2** A; **3** C; **4** A; **5**-**6**-**7** consultare il libro di testo; **8** in neretto si evidenziano le informazioni date dai limiti. Il grafico della funzione è quindi completato a piacere (linea sottile), ad esempio:



9 a) La funzione è definita se $3x+1 \neq 0$ cioè $x \neq -1/3$, perciò il dominio è $\mathcal{D} = \mathbb{R} \setminus \{-1/3\}$ e la funzione (razionale) è ivi continua e derivabile.

b) Poiché il denominatore è sempre positivo nel dominio, la funzione è positiva se e solo se $1-4x > 0$ cioè $x < 1/4$, mentre si annulla in $x = 1/4$ ed è negativa per $x > 1/4$.

c) Ha senso andare a studiare i limiti in $-1/3$ e a $\pm\infty$. Si ha

$$\lim_{x\to\pm\infty} g(x) = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{1}{x}\frac{1/x-4}{(3+1/x)^2} = \left[0 \cdot \frac{-4}{9}\right] = 0, \qquad \lim_{x\to(-1/3)^\pm} g(x) = \left[\frac{7/3}{0^+}\right] = +\infty,$$

quindi la funzione non ammette massimo.

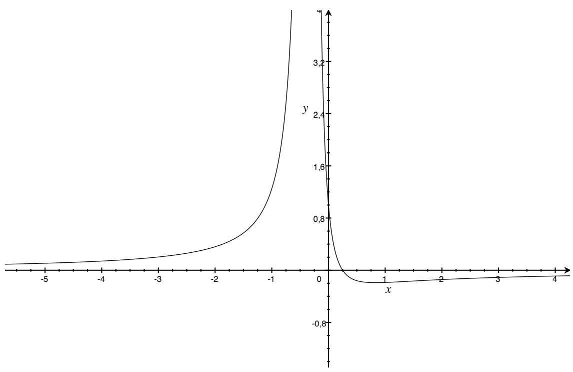
d) La derivata prima è

$$g'(x) = \frac{-4(3x+1)^2 - (1-4x)2(3x+1)3}{(3x+1)^4} = \frac{-4(3x+1)-(1-4x)6}{(3x+1)^3} = \frac{2(6x-5)}{(3x+1)^3}.$$

Il numeratore è ≥ 0 se e solo se $6x-5 \geq 0$ ovvero $x \geq 5/6$; il denominatore è positivo se $(3x+1)^3 > 0$ cioè $3x+1 > 0$, dunque $x > -1/3$. In definitiva

$$g'(x) \begin{cases} > 0, & \text{se } x \in]-\infty, -1/3[\cup]5/6, +\infty[, \\ = 0, & \text{se } x = 5/6, \\ < 0, & \text{se } x \in]-1/3, 5/6[, \end{cases}$$

perciò la funzione è crescente in $]-\infty,-1/3[$ e in $]5/6,+\infty[$, mentre è decrescente in $]-1/3,5/6[$. In $x = 5/6$ ammette un minimo relativo ed assoluto.



e) La derivata seconda è

$$g''(x) = 2\frac{6(3x+1)^3 - (6x-5)3(3x+1)^2 3}{(3x+1)^6} = 2\frac{6(3x+1)-(6x-5)9}{(3x+1)^4} = \frac{6(17-12x)}{(3x+1)^4}.$$

Poiché il denominatore è sempre positivo nel dominio, la derivata seconda è ≥ 0 se e solo se $17-12x \geq 0$, quindi

$$g''(x) \begin{cases} > 0, & \text{se } x \in]-\infty, -1/3[\cup]-1/3, 17/12[\\ = 0, & \text{se } x = 17/12, \\ < 0, & \text{se } x \in]17/12, +\infty[, \end{cases}$$

perciò la funzione è convessa in $]-\infty, -1/3[$ e in $]-1/3, 17/12[$, mentre è concava in $]17/12, +\infty[$. In $x = 17/12$ ammette un punto di flesso.

f) Dal punto c) segue immediatamente che la retta $x = -1/3$ è un asintoto verticale, mentre la retta $y = 0$ è un asintoto orizzontale.

$\boxed{\mathbf{10}}$ a) Si ha $y'(t) = \mathrm{e}^{3t} + (t+2)\mathrm{e}^{3t}3 = (3t+7)\mathrm{e}^{3t}$ e sostituendo si ottiene l'equazione

$$(3t+7)\mathrm{e}^{3t} = 3(t+2)\mathrm{e}^{3t} - t^2$$

che non è identicamente soddisfatta per $t \in \mathbb{R}$ (ad esempio, per $t = 0$ si ha $7 \neq 6$). La funzione non è dunque soluzione. La funzione soddisfa invece la seconda condizione, essendo $y(-2) = 0$.

b) Si tratta di un'equazione lineare del primo ordine a coefficienti non costanti, del tipo

$$y' = a(t)y + b(t)$$

le cui soluzioni sono date da

$$y(t) = \mathrm{e}^{A(t)} \int \mathrm{e}^{-A(t)} b(t)\, dt$$

dove $A(t)$ è una primitiva di $a(t)$. In questo caso $A(t) = 3t$ e integrando per parti due volte si ottiene

$$\begin{aligned} y(t) &= \mathrm{e}^{3t} \int \mathrm{e}^{-3t}(-t^2)\, dt = \mathrm{e}^{3t} \left(\frac{\mathrm{e}^{-3t}}{-3}(-t^2) - \int \frac{\mathrm{e}^{-3t}}{-3}(-2t)\, dt \right) = \mathrm{e}^{3t} \left(\frac{\mathrm{e}^{-3t}}{3} t^2 - \frac{2}{3} \Big(\frac{\mathrm{e}^{-3t}}{-3} t - \int \frac{\mathrm{e}^{-3t}}{-3}\, dt \Big) \right) \\ &= \mathrm{e}^{3t} \left(\frac{\mathrm{e}^{-3t}}{3} t^2 + \frac{2\mathrm{e}^{-3t}}{9} t + \frac{2\mathrm{e}^{-3t}}{27} + c \right) = c\,\mathrm{e}^{3t} + \frac{t^2}{3} + \frac{2}{9}t + \frac{2}{27}, \end{aligned}$$

dove c è la generica costante d'integrazione. Imponendo la condizione $y(-2) = 0$ si ricava $0 = c\mathrm{e}^{-6} + 26/27$ cioè $c = -26\mathrm{e}^6/27$. La soluzione è quindi

$$y(t) = -\frac{26}{27}\mathrm{e}^{3(t+2)} + \frac{t^2}{3} + \frac{2}{9}t + \frac{2}{27}.$$

Alternativamente, si poteva utilizzare direttamente la formula risolutiva (insieme alla formula fondamentale del calcolo integrale)

$$y(t) = \mathrm{e}^{A(t)} \left(\int_{-2}^{t} \mathrm{e}^{-A(s)} b(s)\, ds + y(-2) \right)$$

dove $A(t) = \int_{-2}^{t} a(s)\, ds$. In questo caso $A(t) = 3(t+2)$ e

$$\begin{aligned} y(t) &= \mathrm{e}^{3(t+2)} \left(\int_{-2}^{t} \mathrm{e}^{-3(s+2)}(-s^2)\, ds + 0 \right) \\ &= \mathrm{e}^{3(t+2)} \left(\frac{\mathrm{e}^{-3(t+2)}}{3} t^2 + \frac{2\mathrm{e}^{-3(t+2)}}{9} t + \frac{2\mathrm{e}^{-3(t+2)}}{27} - \Big(\frac{4}{3} - \frac{4}{9} + \frac{2}{27} \Big) \right) = -\frac{26}{27}\mathrm{e}^{3(t+2)} + \frac{t^2}{3} + \frac{2}{9}t + \frac{2}{27}. \end{aligned}$$

$\boxed{\mathbf{11}}$ Dalle tabelle si ottiene

$$\int \Big(\frac{\sqrt{x}+5}{x^2} - \frac{6}{\cos^2 x} \Big)\, dx = \int x^{-3/2}\, dx + 5 \int x^{-2}\, dx - 6 \int \frac{1}{\cos^2 x}\, dx = \frac{x^{-1/2}}{-1/2} - \frac{5}{x} - 6 \operatorname{tg} x + c,$$

con c costante arbitraria. Utilizzando invece il metodo di integrazione per parti si ha

$$\begin{aligned} \int_0^1 (2x^2 - 3x)\mathrm{e}^{2x}\, dx &= \Big[(2x^2 - 3x)\frac{\mathrm{e}^{2x}}{2} \Big]_0^1 - \int_0^1 (4x-3)\frac{\mathrm{e}^{2x}}{2}\, dx = -\frac{\mathrm{e}^2}{2} - \frac{1}{2} \left(\Big[(4x-3)\frac{\mathrm{e}^{2x}}{2} \Big]_0^1 + \right. \\ & \left. - \int_0^1 4\frac{\mathrm{e}^{2x}}{2}\, dx \right) = -\frac{\mathrm{e}^2}{2} - \frac{1}{2}\Big(\frac{\mathrm{e}^2}{2} - (-\frac{3}{2}) \Big) + \Big[\frac{\mathrm{e}^{2x}}{2} \Big]_0^1 = -\frac{\mathrm{e}^3 + 5}{4}. \end{aligned}$$