Facoltà di Agraria

Corsi di Laurea in VIT e STAL
Modulo di Matematica
Esame del 16/02/2011
A.A. 2010/2011

Scritto		Voto
Teoria	Esercizi	

Istruzioni: apporre nome, cognome e numero di matricola su ogni foglio. Prima della consegna indicare nell'apposito spazio il numero totale di fogli di cui è composto l'elaborato. Svolgere solamente uno tra 10-b) e 11. Allegare lo svolgimento completo degli esercizi 9, 10 e 11. **Non è ammesso l'uso di libri, appunti e calcolatrici grafiche o programmabili.**

Cognome	Nome
Corso di Laurea $\boxed{VIT}$ $\boxed{STAL}$	Matricola
Vecchio ordinamento $\boxed{SI}$ $\boxed{NO}$	n. fogli allegati

1 Se $\lim_{x\to x_0} f(x) = 0$ e $\lim_{x\to x_0} g(x) = -\infty$, allora $\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)}$ è

- A $-\infty$
- B $+\infty$
- C 0
- D non ci sono elementi sufficienti per rispondere

2 Se f è una funzione derivabile due volte in $]a,b[$ e vale $f'(x) < 0$ e $f''(x) < 0$ in $]a,b[$, allora

- A f è decrescente e concava in $]a,b[$
- B f è crescente e convessa in $]a,b[$
- C f è decrescente e convessa in $]a,b[$
- D f è crescente e concava in $]a,b[$

3 L'equazione differenziale $y'' = 2te^y + 7y'$ è

- A un'equazione lineare del primo ordine
- B un'equazione lineare del secondo ordine
- C un'equazione non lineare del primo ordine
- D un'equazione non lineare del secondo ordine

4 Il grafico della funzione $f(x) = \dfrac{2x^2 - x - 1}{3x + 2}$ rappresenta

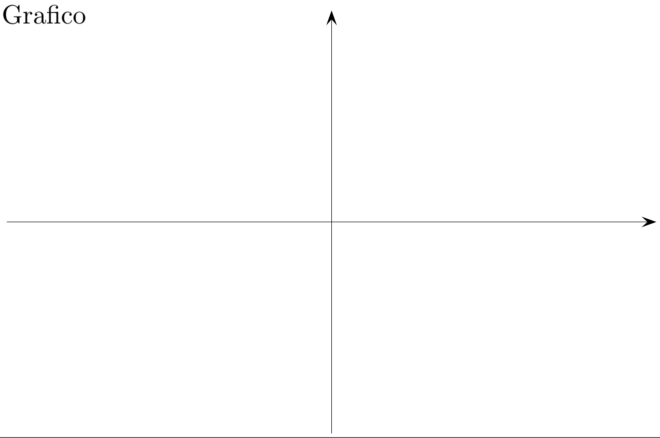
- A una retta
- B una parabola
- C un'iperbole
- D nessuna delle precedenti

5 Per la funzione $f(x) = \log_{1/4} x$, scrivere il dominio $\mathcal{D}$, l'immagine $\mathcal{I}$, e rappresentare qualitativamente il grafico.

$\mathcal{D} =$

$\mathcal{I} =$

Grafico



$\boxed{\textbf{6}}$ Per definizione, una primitiva di una funzione $f(x)$ in $]a, b[$ è:

$\boxed{\textbf{7}}$ Descrivere precisamente le relazioni che esistono tra la derivata seconda e il grafico di una funzione f

$\boxed{\textbf{8}}$ Rappresentare il grafico di una funzione g che verifichi contemporaneamente le seguenti proprietà:

$$\lim_{x\to-\infty} g(x) = 5 \qquad \lim_{x\to 2^-} g(x) = -\infty \qquad \lim_{x\to 2^+} g(x) = +\infty \qquad \lim_{x\to+\infty} g(x) = 1$$

$\boxed{\textbf{9}}$ Data la funzione

$$g(x) = \frac{2x-1}{(2x+1)^2}$$

a) determinare il dominio $\mathcal{D}$, b) studiare il segno di g; c) calcolare i limiti agli estremi del dominio; d) determinare gli intervalli in cui la funzione è crescente, quelli in cui è decrescente, e gli eventuali punti di massimo/minimo relativo; e) determinare gli intervalli in cui la funzione è convessa e quelli in cui è concava; f) determinare gli eventuali asintoti; g) disegnare un grafico approssimativo di g.

$\boxed{\textbf{10}}$ Dato il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' = -3y - 2t^2 \\ y(-1) = 0 \end{cases}$$

a) dire se la funzione $y(t) = (t+1)\mathrm{e}^{-3t}$ è soluzione del problema;

b) determinare una soluzione del problema nel caso in cui non lo sia la funzione di cui al punto precedente.

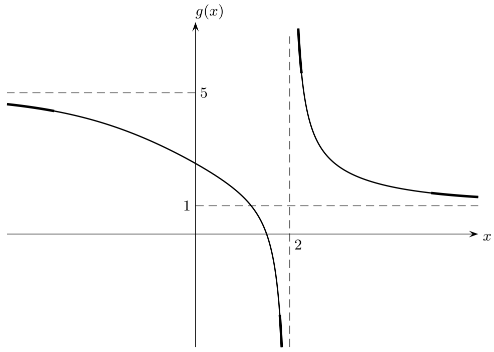
$\boxed{\textbf{11}}$ Calcolare i seguenti integrali

$$\int \Big(\frac{3}{\operatorname{sen}^2 x} + \frac{2x^4 - \sqrt[3]{x}}{3x}\Big)\,dx, \qquad \int_{-1}^{0} (x+3x^2)\mathrm{e}^{-2x}\,dx.$$

IMPORTANTE! Risolvere solamente uno tra 10-b) e 11.

Soluzioni dei quesiti dell'esame del 16 febbraio 2011

$\boxed{1}$ C; $\boxed{2}$ A; $\boxed{3}$ D; $\boxed{4}$ D; $\boxed{5}$-$\boxed{6}$-$\boxed{7}$ consultare il libro di testo; $\boxed{8}$ in neretto si evidenziano le informazioni date dai limiti. Il grafico della funzione è quindi completato a piacere (linea sottile), ad esempio:



$\boxed{9}$ a) La funzione è definita se $2x+1 \neq 0$ cioè $x \neq -1/2$, perciò il dominio è $\mathcal{D} = \mathbb{R} \setminus \{-1/2\}$ e la funzione (razionale) è ivi continua e derivabile.

b) Poiché il denominatore è sempre positivo nel dominio, la funzione è positiva se e solo se $2x - 1 > 0$ cioè $x > 1/2$, mentre si annulla in $x = 1/2$ ed è negativa per $x < 1/2$.

c) Ha senso andare a studiare i limiti in $-1/2$ e a $\pm\infty$. Si ha

$$\lim_{x\to\pm\infty} g(x) = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{1}{x}\frac{2-1/x}{(2+1/x)^2} = \left[0 \cdot \frac{2}{4}\right] = 0, \qquad \lim_{x\to(-1/2)^\pm} g(x) = \left[\frac{-2}{0^+}\right] = -\infty,$$

quindi la funzione non ammette minimo.

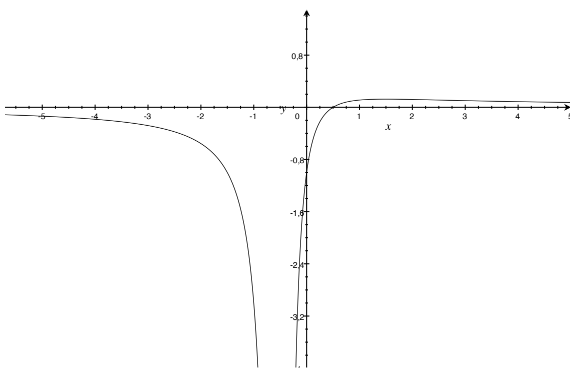
d) La derivata prima è

$$g'(x) = \frac{2(2x+1)^2 - (2x-1)2(2x+1)2}{(2x+1)^4} = \frac{2(2x+1) - (2x-1)4}{(2x+1)^3} = \frac{2(3-2x)}{(2x+1)^3}.$$

Il numeratore è ≥ 0 se e solo se $3 - 2x \geq 0$ ovvero $x \leq 3/2$; il denominatore è positivo se $(2x+1)^3 > 0$ cioè $2x + 1 > 0$, dunque $x > -1/2$. In definitiva

$$g'(x) \begin{cases} < 0, & \text{se } x \in]-\infty, -1/2[\cup]3/2, +\infty[, \\ = 0, & \text{se } x = 3/2, \\ > 0, & \text{se } x \in]-1/2, 3/2[, \end{cases}$$

perciò la funzione è decrescente in $]-\infty, -1/2[$ e in $]3/2, +\infty[$, mentre è crescente in $]-1/2, 3/2[$. In $x = 3/2$ ammette un massimo relativo ed assoluto.



e) La derivata seconda è

$$g''(x) = 2\frac{-2(2x+1)^3 - (3-2x)3(2x+1)^2 2}{(2x+1)^6} = 2\frac{-2(2x+1) - (3-2x)6}{(2x+1)^4} = \frac{8(2x-5)}{(2x+1)^4}.$$

Poiché il denominatore è sempre positivo nel dominio, la derivata seconda è ≥ 0 se e solo se $2x-5 \geq 0$, quindi

$$g''(x) \begin{cases} < 0, & \text{se } x \in]-\infty, -1/2[\cup]-1/2, 5/2[\\ = 0, & \text{se } x = 5/2, \\ > 0, & \text{se } x \in]5/2, +\infty[, \end{cases}$$

perciò la funzione è concava in $]-1/2, 5/2[$ e in $]-\infty, -1/2[$, mentre è convessa in $]5/2, +\infty[$. In $x = 5/2$ ammette un punto di flesso.

f) Dal punto c) segue immediatamente che la retta $x = -1/2$ è un asintoto verticale, mentre la retta $y = 0$ è un asintoto orizzontale.

10 a) Si ha $y'(t) = \mathrm{e}^{-3t} + (t+1)\mathrm{e}^{-3t}(-3) = -(3t+2)\mathrm{e}^{-3t}$ e sostituendo si ottiene l'equazione

$$-(3t+2)\mathrm{e}^{-3t} = -3(t+1)\mathrm{e}^{-3t} - 2t^2$$

che non è identicamente soddisfatta per $t \in \mathbb{R}$ (ad esempio, per $t = 0$ si ha $-2 \neq -3$). La funzione non è dunque soluzione. La funzione soddisfa invece la seconda condizione, essendo $y(-1) = 0$.

b) Si tratta di un'equazione lineare del primo ordine a coefficienti non costanti, del tipo

$$y' = a(t)y + b(t)$$

le cui soluzioni sono date da

$$y(t) = \mathrm{e}^{A(t)} \int \mathrm{e}^{-A(t)} b(t)\, dt$$

dove $A(t)$ è una primitiva di $a(t)$. In questo caso $A(t) = -3t$ e integrando per parti due volte si ottiene

$$\begin{aligned} y(t) &= \mathrm{e}^{-3t} \int \mathrm{e}^{3t}(-2t^2)\, dt = \mathrm{e}^{-3t}\Big(\frac{\mathrm{e}^{3t}}{3}(-2t^2) + \int \frac{\mathrm{e}^{3t}}{3} 4t\, dt\Big) = \mathrm{e}^{-3t}\Big(-\frac{2\mathrm{e}^{3t}}{3}t^2 + \frac{4}{3}\Big(\frac{\mathrm{e}^{3t}}{3}t - \int \frac{\mathrm{e}^{3t}}{3}\, dt\Big)\Big) \\ &= \mathrm{e}^{-3t}\Big(-\frac{2\mathrm{e}^{3t}}{3}t^2 + \frac{4\mathrm{e}^{3t}}{9}t - \frac{4\mathrm{e}^{3t}}{27} + c\Big) = c\,\mathrm{e}^{-3t} - \frac{2}{3}t^2 + \frac{4}{9}t - \frac{4}{27}, \end{aligned}$$

dove c è la generica costante d'integrazione. Imponendo la condizione $y(-1) = 0$ si ricava $0 = c\mathrm{e}^3 - 34/27$ cioè $c = 34/(27\mathrm{e}^3)$. La soluzione è quindi

$$y(t) = \frac{34}{27}\mathrm{e}^{-3(t+1)} - \frac{2}{3}t^2 + \frac{4}{9}t - \frac{4}{27}.$$

Alternativamente, si poteva utilizzare direttamente la formula risolutiva (insieme alla formula fondamentale del calcolo integrale)

$$y(t) = \mathrm{e}^{A(t)}\Big(\int_{-1}^{t} \mathrm{e}^{-A(s)} b(s)\, ds + y(-1)\Big)$$

dove $A(t) = \int_{-1}^{t} a(s)\, ds$. In questo caso $A(t) = -3(t+1)$ e

$$\begin{aligned} y(t) &= \mathrm{e}^{-3(t+1)}\Big(\int_{-1}^{t} \mathrm{e}^{3(s+1)}(-2s^2)\, ds + 0\Big) \\ &= \mathrm{e}^{-3(t+1)}\Big(-\frac{2\mathrm{e}^{3(t+1)}}{3}t^2 + \frac{4\mathrm{e}^{3(t+1)}}{9}t - \frac{4\mathrm{e}^{3(t+1)}}{27} - \Big(-\frac{2}{3} - \frac{4}{9} - \frac{4}{27}\Big)\Big) = \frac{34}{27}\mathrm{e}^{-3(t+1)} - \frac{2}{3}t^2 + \frac{4}{9}t - \frac{4}{27}. \end{aligned}$$

11 Dalle tabelle si ottiene

$$\int \Big(\frac{3}{\operatorname{sen}^2 x} + \frac{2x^4 - \sqrt[3]{x}}{3x}\Big)\, dx = 3\int \frac{1}{\operatorname{sen}^2 x}\, dx + \frac{2}{3}\int x^3\, dx - \frac{1}{3}\int x^{-2/3}\, dx = -3\cot x + \frac{x^4}{6} - \frac{1}{3}\frac{x^{1/3}}{1/3} + c,$$

con c costante arbitraria. Utilizzando invece il metodo di integrazione per parti si ha

$$\begin{aligned} \int_{-1}^{0} (x+3x^2)\mathrm{e}^{-2x}\, dx &= \Big[(x+3x^2)\frac{\mathrm{e}^{-2x}}{-2}\Big]_{-1}^{0} - \int_{-1}^{0} (1+6x)\frac{\mathrm{e}^{-2x}}{-2}\, dx = -2\mathrm{e}^2 + \frac{1}{2}\Big(\Big[(1+6x)\frac{\mathrm{e}^{-2x}}{-2}\Big]_{-1}^{0} + \\ &\quad - \int_{-1}^{0} 6\frac{\mathrm{e}^{-2x}}{-2}\, dx\Big) = -2\mathrm{e}^2 + \frac{1}{2}\Big(-\frac{1}{2} - \frac{5\mathrm{e}^2}{2}\Big) + \frac{3}{2}\Big[\frac{\mathrm{e}^{-2x}}{-2}\Big]_{-1}^{0} = -\frac{3}{2}\mathrm{e}^2 - 1. \end{aligned}$$