Facoltà di Agraria

Corsi di Laurea in VIT e STAL
Modulo di Matematica
Esame del 16/02/2011
A.A. 2010/2011

Scritto		Voto
Teoria	Esercizi	

Istruzioni: apporre nome, cognome e numero di matricola su ogni foglio. Prima della consegna indicare nell'apposito spazio il numero totale di fogli di cui è composto l'elaborato. Svolgere solamente uno tra 10-b) e 11. Allegare lo svolgimento completo degli esercizi 9, 10 e 11. **Non è ammesso l'uso di libri, appunti e calcolatrici grafiche o programmabili.**

Cognome	Nome
Corso di Laurea $\boxed{VIT}$ $\boxed{STAL}$	Matricola
Vecchio ordinamento $\boxed{SI}$ $\boxed{NO}$	n. fogli allegati

1 Se $\lim_{x\to x_0} f(x) = +\infty$ e $\lim_{x\to x_0} g(x) = -\infty$, allora $\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)}$ è

- A $-\infty$
- B $+\infty$
- C -1
- D non ci sono elementi sufficienti per rispondere

2 Se f è una funzione derivabile due volte in $]a,b[$ e vale $f'(x_0) = 0$ e $f''(x_0) > 0$ con $x_0 \in]a,b[$, allora

- A x_0 è sempre punto di minimo relativo per f
- B x_0 è sempre punto di massimo relativo per f
- C x_0 è sempre punto di flesso relativo per f
- D nessuna delle precedenti

3 L'equazione differenziale $y'' = y\ln(t^3+5) = \frac{y'}{t^2+1}$ è

- A un'equazione lineare del primo ordine
- B un'equazione lineare del secondo ordine
- C un'equazione non lineare del primo ordine
- D un'equazione non lineare del secondo ordine

4 Il grafico della funzione $f(x) = \dfrac{2e-1}{\pi+3}$ rappresenta

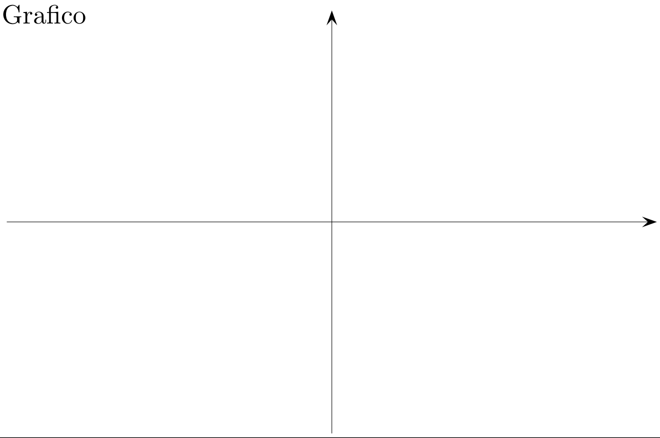
- A una retta
- B una parabola
- C un'iperbole
- D nessuna delle precedenti

5 Per la funzione $f(x) = \operatorname{tg} x$, scrivere il dominio $\mathcal{D}$, l'immagine $\mathcal{I}$, e rappresentare qualitativamente il grafico.

$\mathcal{D} =$

$\mathcal{I} =$

Grafico



$\boxed{\mathbf{6}}$ Per definizione, la derivata di una funzione $f(x)$ in x_0 è:

$\boxed{\mathbf{7}}$ Enunciare il teorema fondamentale del calcolo integrale

$\boxed{\mathbf{8}}$ Rappresentare il grafico di una funzione g che verifichi contemporaneamente le seguenti proprietà:

$$\lim_{x\to-\infty} g(x) = -1 \qquad \lim_{x\to-3^-} g(x) = -\infty \qquad \lim_{x\to-3^+} g(x) = +\infty \qquad \lim_{x\to+\infty} g(x) = -\infty$$

$\boxed{\mathbf{9}}$ Data la funzione

$$g(x) = \frac{1-3x}{(2x-1)^2}$$

a) determinare il dominio $\mathcal{D}$, b) studiare il segno di g; c) calcolare i limiti agli estremi del dominio; d) determinare gli intervalli in cui la funzione è crescente, quelli in cui è decrescente, e gli eventuali punti di massimo/minimo relativo; e) determinare gli intervalli in cui la funzione è convessa e quelli in cui è concava; f) determinare gli eventuali asintoti; g) disegnare un grafico approssimativo di g.

$\boxed{\mathbf{10}}$ Dato il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' = -2y + 3t^2 \\ y(2) = 0 \end{cases}$$

a) dire se la funzione $y(t) = (t-2)\mathrm{e}^{-2t}$ è soluzione del problema;

b) determinare una soluzione del problema nel caso in cui non lo sia la funzione di cui al punto precedente.

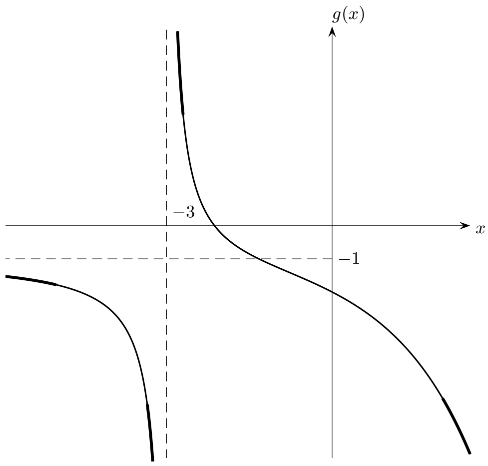
$\boxed{\mathbf{11}}$ Calcolare i seguenti integrali

$$\int \Big(\frac{7}{\sqrt{16-x^2}} - \frac{\sqrt[3]{x}+2x}{x^3}\Big)\,dx, \qquad \int_{-1}^{0} (2x-x^2)\mathrm{e}^{-3x}\,dx.$$

IMPORTANTE! Risolvere solamente uno tra 10-b) e 11.

Soluzioni dei quesiti dell'esame del 16 febbraio 2011

$\boxed{1}$ D; $\boxed{2}$ A; $\boxed{3}$ B; $\boxed{4}$ A; $\boxed{5}$-$\boxed{6}$-$\boxed{7}$ consultare il libro di testo; $\boxed{8}$ in neretto si evidenziano le informazioni date dai limiti. Il grafico della funzione è quindi completato a piacere (linea sottile), ad esempio:



$\boxed{9}$ a) La funzione è definita se $2x-1 \neq 0$ cioè $x \neq 1/2$, perciò il dominio è $\mathcal{D} = \mathbb{R} \setminus \{1/2\}$ e la funzione (razionale) è ivi continua e derivabile.

b) Poiché il denominatore è sempre positivo nel dominio, la funzione è positiva se e solo se $1-3x > 0$ cioè $x < 1/3$, mentre si annulla in $x = 1/3$ ed è negativa per $x > 1/3$.

c) Ha senso andare a studiare i limiti in $1/2$ e a $\pm\infty$. Si ha

$$\lim_{x\to\pm\infty} g(x) = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{1}{x}\frac{1/x-3}{(2-1/x)^2} = \left[0 \cdot \frac{-3}{4}\right] = 0, \qquad \lim_{x\to(1/2)^\pm} g(x) = \left[\frac{-1/2}{0^+}\right] = -\infty,$$

quindi la funzione non ammette minimo.

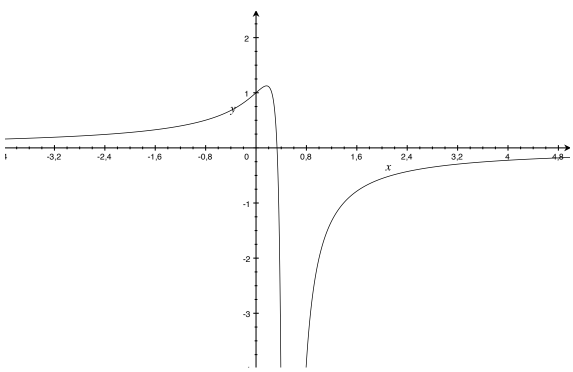
d) La derivata prima è

$$g'(x) = \frac{-3(2x-1)^2 - (1-3x)2(2x-1)2}{(2x-1)^4} = \frac{-3(2x-1) - (1-3x)4}{(2x-1)^3} = \frac{6x-1}{(2x-1)^3}.$$

Il numeratore è ≥ 0 se e solo se $6x-1 \geq 0$ ovvero $x \geq 1/6$; il denominatore è positivo se $(2x-1)^3 > 0$ cioè $2x-1 > 0$, dunque $x > 1/2$. In definitiva

$$g'(x) \begin{cases} > 0, & \text{se } x \in]-\infty, 1/6[\cup]1/2, +\infty[, \\ = 0, & \text{se } x = 1/6, \\ < 0, & \text{se } x \in]1/6, 1/2[, \end{cases}$$

perciò la funzione è crescente in $]-\infty, 1/6[$ e in $]1/2, +\infty[$, mentre è decrescente in $]1/6, 1/2[$. In $x = 1/6$ ammette un massimo relativo ed assoluto.



e) La derivata seconda è

$$g''(x) = \frac{6(2x-1)^3 - (6x-1)3(2x-1)^2 2}{(2x-1)^6} = \frac{6(2x-1) - (6x-1)6}{(2x-1)^4} = \frac{-24x}{(2x-1)^4}.$$

Poiché il denominatore è sempre positivo nel dominio, la derivata seconda è ≥ 0 se e solo se $x \leq 0$, quindi

$$g''(x) \begin{cases} < 0, & \text{se } x \in]0, 1/2[\cup]1/2, +\infty[\\ = 0, & \text{se } x = 0, \\ > 0, & \text{se } x \in]-\infty, 0[, \end{cases}$$

perciò la funzione è concava in $]0, 1/2[$ e in $]1/2, +\infty[$, mentre è convessa in $]-\infty, 0[$. In $x = 0$ ammette un punto di flesso.

f) Dal punto c) segue immediatamente che la retta $x = 1/2$ è un asintoto verticale, mentre la retta $y = 0$ è un asintoto orizzontale.

10 a) Si ha $y'(t) = \mathrm{e}^{-2t} + (t-2)\mathrm{e}^{-2t}(-2) = (5-2t)\mathrm{e}^{-2t}$ e sostituendo si ottiene l'equazione

$$(5-2t)\mathrm{e}^{-2t} = -2(t-2)\mathrm{e}^{-2t} + 3t^2$$

che non è identicamente soddisfatta per $t \in \mathbb{R}$ (ad esempio, per $t = 0$ si ha $5 \neq 4$). La funzione non è dunque soluzione. La funzione soddisfa invece la seconda condizione, essendo $y(2) = 0$.

b) Si tratta di un'equazione lineare del primo ordine a coefficienti non costanti, del tipo

$$y' = a(t)y + b(t)$$

le cui soluzioni sono date da

$$y(t) = \mathrm{e}^{A(t)} \int \mathrm{e}^{-A(t)} b(t)\, dt$$

dove $A(t)$ è una primitiva di $a(t)$. In questo caso $A(t) = -2t$ e integrando per parti due volte si ottiene

$$\begin{aligned} y(t) &= \mathrm{e}^{-2t} \int \mathrm{e}^{2t} 3t^2\, dt = \mathrm{e}^{-2t}\left(\frac{\mathrm{e}^{2t}}{2}3t^2 - \int \frac{\mathrm{e}^{2t}}{2}6t\, dt\right) = \mathrm{e}^{-2t}\left(\frac{\mathrm{e}^{2t}}{2}3t^2 - 3\left(\frac{\mathrm{e}^{2t}}{2}t - \int \frac{\mathrm{e}^{2t}}{2}\, dt\right)\right) \\ &= \mathrm{e}^{-2t}\left(\frac{\mathrm{e}^{2t}}{2}3t^2 - \frac{3\mathrm{e}^{2t}}{2}t + \frac{3\mathrm{e}^{2t}}{4} + c\right) = c\,\mathrm{e}^{-2t} + \frac{3}{2}t^2 - \frac{3}{2}t + \frac{3}{4}, \end{aligned}$$

dove c è la generica costante d'integrazione. Imponendo la condizione $y(2) = 0$ si ricava $0 = c\mathrm{e}^{-4} + 15/4$ cioè $c = -15\mathrm{e}^4/4$. La soluzione è quindi

$$y(t) = -\frac{15}{4}\mathrm{e}^{-2(t-2)} + \frac{3}{2}t^2 - \frac{3}{2}t + \frac{3}{4}.$$

Alternativamente, si poteva utilizzare direttamente la formula risolutiva (insieme alla formula fondamentale del calcolo integrale)

$$y(t) = \mathrm{e}^{A(t)}\left(\int_2^t \mathrm{e}^{-A(s)} b(s)\, ds + y(2)\right)$$

dove $A(t) = \int_2^t a(s)\, ds$. In questo caso $A(t) = -2(t-2)$ e

$$\begin{aligned} y(t) &= \mathrm{e}^{-2(t-2)}\left(\int_2^t \mathrm{e}^{2(s-2)} 3s^2\, ds + 0\right) \\ &= \mathrm{e}^{-2(t-2)}\left(\frac{3\mathrm{e}^{2(t-2)}}{2}t^2 - \frac{3\mathrm{e}^{2(t-2)}}{2}t + \frac{3\mathrm{e}^{2(t-2)}}{4} - \left(6 - 3 + \frac{3}{4}\right)\right) = -\frac{15}{4}\mathrm{e}^{-2(t-2)} + \frac{3}{2}t^2 - \frac{3}{2}t + \frac{3}{4}. \end{aligned}$$

11 Dalle tabelle si ottiene

$$\int \left(\frac{7}{\sqrt{16-x^2}} - \frac{\sqrt[3]{x} + 2x}{x^3}\right) dx = 7\int \frac{1}{\sqrt{16-x^2}}\, dx - \int x^{-8/3}\, dx - 2\int x^{-2}\, dx = 7 \operatorname{arcsen} \frac{x}{4} - \frac{x^{-5/3}}{-5/3} + \frac{2}{x} + c,$$

con c costante arbitraria. Utilizzando invece il metodo di integrazione per parti si ha

$$\begin{aligned} \int_{-1}^0 (2x - x^2)\mathrm{e}^{-3x}\, dx &= \left[(2x - x^2)\frac{\mathrm{e}^{-3x}}{-3}\right]_{-1}^0 - \int_{-1}^0 (2-2x)\frac{\mathrm{e}^{-3x}}{-3}\, dx = -\mathrm{e}^3 + \frac{2}{3}\left(\left[(1-x)\frac{\mathrm{e}^{-3x}}{-3}\right]_{-1}^0 + \right. \\ &\left. - \int_{-1}^0 (-1)\frac{\mathrm{e}^{-3x}}{-3}\, dx\right) = -\mathrm{e}^3 + \frac{2}{3}\left(-\frac{1}{3} - \left(-\frac{2\mathrm{e}^3}{3}\right)\right) - \frac{2}{9}\left[\frac{\mathrm{e}^{-3x}}{-3}\right]_{-1}^0 = \frac{37\mathrm{e}^3 - 4}{27}. \end{aligned}$$