Facoltà di Agraria

Corsi di Laurea in VIT e STAL
Modulo di Matematica
Esame del 16/02/2011
A.A. 2010/2011

Scritto		Voto
Teoria	Esercizi	

Istruzioni: apporre nome, cognome e numero di matricola su ogni foglio. Prima della consegna indicare nell'apposito spazio il numero totale di fogli di cui è composto l'elaborato. Svolgere solamente uno tra 10-b) e 11. Allegare lo svolgimento completo degli esercizi 9, 10 e 11. **Non è ammesso l'uso di libri, appunti e calcolatrici grafiche o programmabili.**

Cognome	Nome
Corso di Laurea $\boxed{VIT}$ $\boxed{STAL}$	Matricola
Vecchio ordinamento $\boxed{SI}$ $\boxed{NO}$	n. fogli allegati

1 Se $\lim_{x\to x_0} f(x) = +\infty$ e $\lim_{x\to x_0} g(x) = -3$, allora $\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)}$ è

- A $-\infty$
- B $+\infty$
- C 0
- D non ci sono elementi sufficienti per rispondere

2 Se f è una funzione derivabile due volte in $]a,b[$ e vale $f'(x_0) < 0$ e $f''(x_0) = 0$ con $x_0 \in]a,b[$, allora

- A x_0 è sempre punto di minimo relativo per f
- B x_0 è sempre punto di massimo relativo per f
- C x_0 è sempre punto di flesso relativo per f
- D nessuna delle precedenti

3 L'equazione differenziale $y' = e^t(y + t^2)$ è

- A un'equazione lineare del primo ordine
- B un'equazione lineare del secondo ordine
- C un'equazione non lineare del primo ordine
- D un'equazione non lineare del secondo ordine

4 Il grafico della funzione $f(x) = \dfrac{3-\sqrt{5}x}{\pi x - 1}$ rappresenta

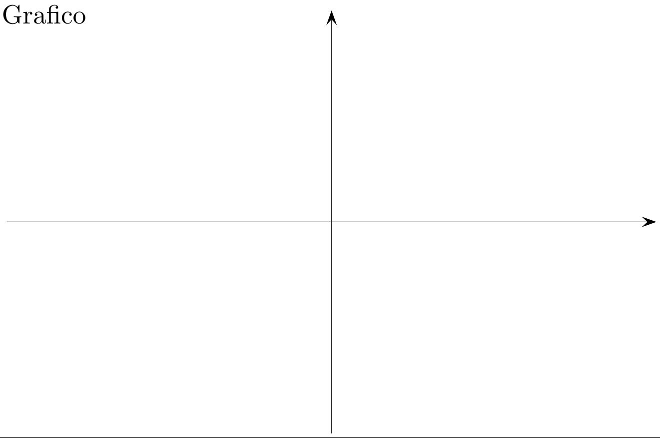
- A una retta
- B una parabola
- C un'iperbole
- D nessuna delle precedenti

5 Per la funzione $f(x) = \cos x$, scrivere il dominio $\mathcal{D}$, l'immagine $\mathcal{I}$, e rappresentare qualitativamente il grafico.

$\mathcal{D} =$

$\mathcal{I} =$

Grafico



$\boxed{\mathbf{6}}$ La derivata di una funzione f nel punto x_0 rappresenta geometricamente:

$\boxed{\mathbf{7}}$ Enunciare il teorema dei punti critici

$\boxed{\mathbf{8}}$ Rappresentare il grafico di una funzione g che verifichi contemporaneamente le seguenti proprietà:

$$\lim_{x\to-\infty} g(x) = +\infty \qquad \lim_{x\to 2^-} g(x) = +\infty \qquad \lim_{x\to 2^+} g(x) = -\infty \qquad \lim_{x\to+\infty} g(x) = -2$$

$\boxed{\mathbf{9}}$ Data la funzione

$$g(x) = \frac{2x+1}{(3x-1)^2}$$

a) determinare il dominio $\mathcal{D}$, b) studiare il segno di g; c) calcolare i limiti agli estremi del dominio; d) determinare gli intervalli in cui la funzione è crescente, quelli in cui è decrescente, e gli eventuali punti di massimo/minimo relativo; e) determinare gli intervalli in cui la funzione è convessa e quelli in cui è concava; f) determinare gli eventuali asintoti; g) disegnare un grafico approssimativo di g.

$\boxed{\mathbf{10}}$ Dato il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' = 2y + t^2 \\ y(1) = 0 \end{cases}$$

a) dire se la funzione $y(t) = (t-1)\mathrm{e}^{2t}$ è soluzione del problema;

b) determinare una soluzione del problema nel caso in cui non lo sia la funzione di cui al punto precedente.

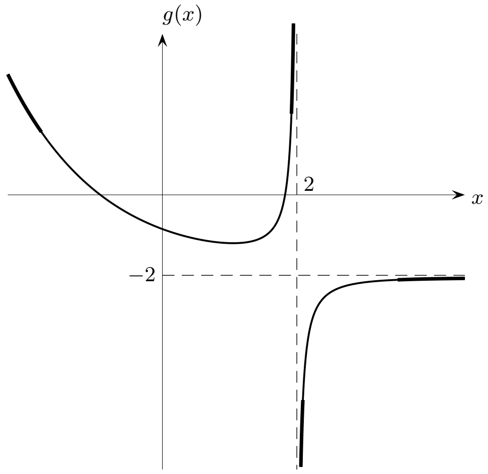
$\boxed{\mathbf{11}}$ Calcolare i seguenti integrali

$$\int \Big(\frac{\sqrt{x}-1}{x} + \frac{2}{x^2+4} \Big)\, dx, \qquad \int_0^1 (x^2 - x)\mathrm{e}^{3x}\, dx.$$

IMPORTANTE! Risolvere solamente uno tra 10-b) e 11.

Soluzioni dei quesiti dell'esame del 16 febbraio 2011

1 A; **2** D; **3** A; **4** C; **5**-**6**-**7** consultare il libro di testo; **8** in neretto si evidenziano le informazioni date dai limiti. Il grafico della funzione è quindi completato a piacere (linea sottile), ad esempio:



9 a) La funzione è definita se $3x-1\neq 0$ cioè $x\neq 1/3$, perciò il dominio è $\mathcal{D}=\mathbb{R}\setminus\{1/3\}$ e la funzione (razionale) è ivi continua e derivabile.

b) Poiché il denominatore è sempre positivo nel dominio, la funzione è positiva se e solo se $2x+1>0$ cioè $x>-1/2$, mentre si annulla in $x=-1/2$ ed è negativa per $x<-1/2$.

c) Ha senso andare a studiare i limiti in $1/3$ e a $\pm\infty$. Si ha

$$\lim_{x\to\pm\infty} g(x)=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{1}{x}\frac{2+1/x}{(3-1/x)^2}=\left[0\cdot\frac{2}{9}\right]=0,\qquad \lim_{x\to(1/3)^\pm} g(x)=\left[\frac{5/3}{0^+}\right]=+\infty,$$

quindi la funzione non ammette massimo.

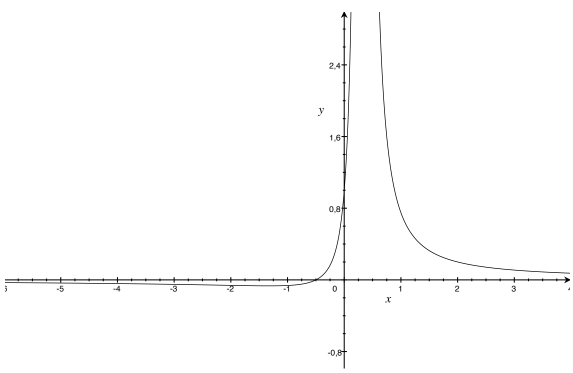
d) La derivata prima è

$$g'(x)=\frac{2(3x-1)^2-(2x+1)2(3x-1)3}{(3x-1)^4}=\frac{2(3x-1)-(2x+1)6}{(3x-1)^3}=\frac{-2(3x+4)}{(3x-1)^3}.$$

Il numeratore è ≥ 0 se e solo se $3x+4\leq 0$ ovvero $x\leq -4/3$; il denominatore è positivo se $(3x-1)^3>0$ cioè $3x-1>0$, dunque $x>1/3$. In definitiva

$$g'(x)\begin{cases} <0, & \text{se } x\in\,]-\infty,-4/3[\cup]1/3,+\infty[,\\ =0, & \text{se } x=-4/3,\\ >0, & \text{se } x\in\,]-4/3,1/3[,\end{cases}$$

perciò la funzione è decrescente in $]-\infty,-4/3[$ e in $]1/3,+\infty[$, mentre è crescente in $]-4/3,1/3[$. In $x=-4/3$ ammette un minimo relativo ed assoluto.



e) La derivata seconda è

$$g''(x)=-2\frac{3(3x-1)^3-(3x+4)3(3x-1)^2 3}{(3x-1)^6}=-2\frac{3(3x-1)-(3x+4)9}{(3x-1)^4}=\frac{6(6x+13)}{(3x-1)^4}.$$

Poiché il denominatore è sempre positivo nel dominio, la derivata seconda è ≥ 0 se e solo se $6x+13 \geq 0$, quindi

$$g''(x) \begin{cases} > 0, & \text{se } x \in]-13/6, 1/3[\cup]1/3, +\infty[\\ = 0, & \text{se } x = -13/6, \\ < 0, & \text{se } x \in]-\infty, -13/6[, \end{cases}$$

perciò la funzione è convessa in $]-13/6, 1/3[$ e in $]1/3, +\infty[$, mentre è concava in $]-\infty, -13/6[$. In $x = -13/6$ ammette un punto di flesso.

f) Dal punto c) segue immediatamente che la retta $x = 1/3$ è un asintoto verticale, mentre la retta $y = 0$ è un asintoto orizzontale.

10 a) Si ha $y'(t) = \mathrm{e}^{2t} + (t-1)\mathrm{e}^{2t}2 = (2t-1)\mathrm{e}^{2t}$ e sostituendo si ottiene l'equazione

$$(2t-1)\mathrm{e}^{2t} = 2(t-1)\mathrm{e}^{2t} + t^2$$

che non è identicamente soddisfatta per $t \in \mathbb{R}$ (ad esempio, per $t = 0$ si ha $-1 \neq -2$). La funzione non è dunque soluzione. La funzione soddisfa invece la seconda condizione, essendo $y(1) = 0$.

b) Si tratta di un'equazione lineare del primo ordine a coefficienti non costanti, del tipo

$$y' = a(t)y + b(t)$$

le cui soluzioni sono date da

$$y(t) = \mathrm{e}^{A(t)} \int \mathrm{e}^{-A(t)} b(t)\, dt$$

dove $A(t)$ è una primitiva di $a(t)$. In questo caso $A(t) = 2t$ e integrando per parti due volte si ottiene

$$\begin{aligned} y(t) &= \mathrm{e}^{2t} \int \mathrm{e}^{-2t} t^2\, dt = \mathrm{e}^{2t} \Big(\frac{\mathrm{e}^{-2t}}{-2} t^2 - \int \frac{\mathrm{e}^{-2t}}{-2} 2t\, dt \Big) = \mathrm{e}^{2t} \Big(-\frac{\mathrm{e}^{-2t}}{2} t^2 + \Big(\frac{\mathrm{e}^{-2t}}{-2} t - \int \frac{\mathrm{e}^{-2t}}{-2}\, dt \Big) \Big) \\ &= \mathrm{e}^{2t} \Big(-\frac{\mathrm{e}^{-2t}}{2} t^2 - \frac{\mathrm{e}^{-2t}}{2} t - \frac{\mathrm{e}^{-2t}}{4} + c \Big) = c\,\mathrm{e}^{2t} - \frac{t^2}{2} - \frac{t}{2} - \frac{1}{4}, \end{aligned}$$

dove c è la generica costante d'integrazione. Imponendo la condizione $y(1) = 0$ si ricava $0 = c\mathrm{e}^2 - 5/4$ cioè $c = 5/(4\mathrm{e}^2)$. La soluzione è quindi

$$y(t) = \frac{5}{4} \mathrm{e}^{2(t-1)} - \frac{t^2}{2} - \frac{t}{2} - \frac{1}{4}.$$

Alternativamente, si poteva utilizzare direttamente la formula risolutiva (insieme alla formula fondamentale del calcolo integrale)

$$y(t) = \mathrm{e}^{A(t)} \Big(\int_1^t \mathrm{e}^{-A(s)} b(s)\, ds + y(1) \Big)$$

dove $A(t) = \int_1^t a(s)\, ds$. In questo caso $A(t) = 2(t-1)$ e

$$\begin{aligned} y(t) &= \mathrm{e}^{2(t-1)} \Big(\int_1^t \mathrm{e}^{-2(s-1)} s^2\, ds + 0 \Big) \\ &= \mathrm{e}^{2(t-1)} \Big(-\frac{\mathrm{e}^{-2(t-1)}}{2} t^2 - \frac{\mathrm{e}^{-2(t-1)}}{2} t - \frac{\mathrm{e}^{-2(t-1)}}{4} - \Big(-\frac{1}{2} - \frac{1}{2} - \frac{1}{4} \Big) \Big) = \frac{5}{4} \mathrm{e}^{2(t-1)} - \frac{t^2}{2} - \frac{t}{2} - \frac{1}{4}. \end{aligned}$$

11 Dalle tabelle si ottiene

$$\int \Big(\frac{\sqrt{x} - 1}{x} + \frac{2}{x^2 + 4} \Big)\, dx = \int x^{-1/2}\, dx - \int \frac{1}{x}\, dx + 2 \int \frac{1}{x^2 + 4}\, dx = \frac{x^{1/2}}{1/2} - \ln|x| + \operatorname{arctg} \frac{x}{2} + c,$$

con c costante arbitraria. Utilizzando invece il metodo di integrazione per parti si ha

$$\begin{aligned} \int_0^1 (x^2 - x)\mathrm{e}^{3x}\, dx &= \Big[(x^2 - x) \frac{\mathrm{e}^{3x}}{3} \Big]_0^1 - \int_0^1 (2x-1) \frac{\mathrm{e}^{3x}}{3}\, dx = 0 - \frac{1}{3} \Big(\Big[(2x-1) \frac{\mathrm{e}^{3x}}{3} \Big]_0^1 - \int_0^1 2 \frac{\mathrm{e}^{3x}}{3}\, dx \Big) \\ &= -\frac{1}{3} \Big(\frac{\mathrm{e}^3}{3} - \Big(-\frac{1}{3}\Big) \Big) + \frac{2}{9} \Big[\frac{\mathrm{e}^{3x}}{3} \Big]_0^1 = -\frac{\mathrm{e}^3 + 5}{27}. \end{aligned}$$