



--	--

Scritto		Voto
Teoria	Esercizi	

Istruzioni: apporre nome, cognome e numero di matricola su ogni foglio. Prima della consegna indicare nell'apposito spazio il numero totale di fogli di cui è composto l'elaborato. Svolgere solamente uno tra 10-b) e 11. Allegare lo svolgimento completo degli esercizi 9, 10 e 11. **Non è ammesso l'uso di libri, appunti e calcolatrici grafiche o programmabili.**

Cognome	Nome
Corso di Laurea VIT STAL	Matricola
Vecchio ordinamento SI NO	n. fogli allegati

1 Se $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = 0^+$ e $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = -\infty$, allora $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)g(x)$ è ☐ A $-\infty$ ☐ B $+\infty$ ☐ C 0 ☐ D non ci sono elementi sufficienti per rispondere	2 Se f è una funzione derivabile due volte in $]a, b[$ e vale $f'(x_0) = 0$ e $f''(x_0) < 0$ con $x_0 \in]a, b[$, allora ☐ A x_0 è sempre punto di minimo relativo per f ☐ B x_0 è sempre punto di massimo relativo per f ☐ C x_0 è sempre punto di flesso relativo per f ☐ D nessuna delle precedenti
3 L'equazione differenziale $y'' = y \operatorname{tg}(t^2 + 1) + 3y'$ è ☐ A un'equazione lineare del primo ordine ☐ B un'equazione lineare del secondo ordine ☐ C un'equazione non lineare del primo ordine ☐ D un'equazione non lineare del secondo ordine	4 Il grafico della funzione $f(x) = 3(x^2 + 1)^2$ rappresenta ☐ A una retta ☐ B una parabola ☐ C un'iperbole ☐ D nessuna delle precedenti
5 Per la funzione $f(x) = (2/3)^x$, scrivere il dominio $\mathcal{D}$, l'immagine $\mathcal{I}$, e rappresentare qualitativamente il grafico. $\mathcal{D} =$ $\mathcal{I} =$ Grafico	

6 Per definizione, una primitiva di una funzione $f(x)$ in $]a, b[$ è:

7 Descrivere con precisione le relazioni che intercorrono tra la derivata di una funzione e le sue proprietà di monotonia.

8 Rappresentare il grafico di una funzione g che verifichi contemporaneamente le seguenti proprietà:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = -3 \qquad \lim_{x \rightarrow 1^-} g(x) = 2 \qquad \lim_{x \rightarrow 1^+} g(x) = +\infty \qquad \lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = -\infty$$

9 Data la funzione

$$g(x) = \frac{x^3 + x^2}{1 - 3x}$$

a) determinare il dominio $\mathcal{D}$; b) studiare il segno di g ; c) calcolare i limiti agli estremi del dominio; d) determinare gli intervalli in cui la funzione è crescente, quelli in cui è decrescente, e gli eventuali punti di massimo/minimo relativo; e) determinare gli eventuali asintoti; f) determinare l'equazione della retta tangente al grafico nel punto di ascissa $x_0 = 1$; g) disegnare un grafico approssimativo di g .

10 Dato il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' = \frac{t^3}{2^y \sqrt{t^4 + 1}} \\ y(0) = 0 \end{cases}$$

- a) dire se la funzione $y(t) = \log_2(t^4 + 1)$ è soluzione del problema;
b) determinare una soluzione del problema nel caso in cui non lo sia la funzione di cui al punto precedente.

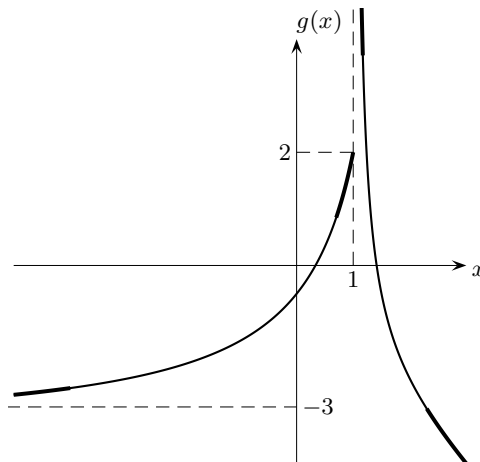
11 Calcolare i seguenti integrali

$$\int \left(\frac{4}{\cos^2 x} - \frac{5^x - x3^x}{x5^x} \right) dx, \qquad \int_{-1}^0 \frac{3t}{\sqrt[5]{3+t^2}} dt.$$

IMPORTANTE! Risolvere solamente uno tra 10-b) e 11.

Soluzioni dei quesiti dell'esame del 3 febbraio 2011

- 1** D; **2** B; **3** B; **4** D; **5**-**6**-**7** consultare il libro di testo; **8** in neretto si evidenziano le informazioni date dai limiti. Il grafico della funzione è quindi completato a piacere (linea sottile), ad esempio:



- 9** a) La funzione è definita se $1 - 3x \neq 0$ cioè $x \neq 1/3$, perciò il dominio è $\mathcal{D} = \mathbb{R} \setminus \{1/3\}$ e la funzione (razionale) è ivi continua e derivabile.
b) Si osservi che la funzione può essere riscritta come

$$g(x) = \frac{x^2(x+1)}{1-3x}$$

dunque il numeratore si annulla per $x = 0$ e $x = -1$ ed è positivo se $x > -1$; il denominatore è positivo se $x < 1/3$. La funzione è dunque negativa per $x < -1$ oppure $x > 1/3$, positiva per $-1 < x < 1/3$ e $x \neq 0$.

- c) Ha senso andare a studiare i limiti in $1/3$ e a $\pm\infty$. Si ha

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} x^2 \frac{1+1/x}{1/x-3} = \left[+\infty \cdot -\frac{1}{3} \right] = -\infty, \quad \lim_{x \rightarrow (1/3)^\pm} g(x) = \left[\frac{4/27}{0^\mp} \right] = \mp\infty,$$

quindi la funzione non ammette massimo né minimo.

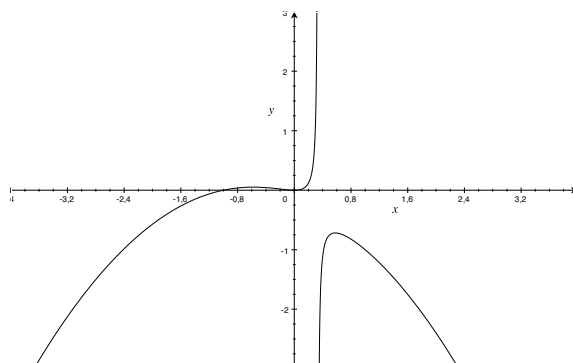
- d) La derivata prima è

$$g'(x) = \frac{(3x^2 + 2x)(1 - 3x) - (x^3 + x^2) \cdot (-3)}{(1 - 3x)^2} = \frac{2x - 6x^3}{(1 - 3x)^2} = \frac{2x(1 - 3x^2)}{(1 - 3x)^2}.$$

Poiché il denominatore è sempre positivo nel dominio, la derivata prima è ≥ 0 se e solo se $x(1 - 3x^2) \geq 0$ cioè se e solo se $x \leq -1/\sqrt{3}$ oppure $0 \leq x \leq 1/\sqrt{3}$. Più precisamente

$$g'(x) \begin{cases} > 0, & \text{se } x \in]-\infty, -1/\sqrt{3}[\cup]0, 1/3[\cup]1/3, 1/\sqrt{3}[\\ = 0, & \text{se } x = -1/\sqrt{3} \text{ oppure } x = 0 \text{ oppure } x = 1/\sqrt{3}, \\ < 0, & \text{se } x \in]-1/\sqrt{3}, 0[\cup]1/\sqrt{3}, +\infty[\end{cases}$$

perciò la funzione è crescente in $] -\infty, -1/\sqrt{3}[$, in $]0, 1/3[$ e in $]1/3, 1/\sqrt{3}[$, mentre è decrescente in $] -1/\sqrt{3}, 0[$ e in $]1/\sqrt{3}, +\infty[$. In $x = 0$ ammette un minimo relativo, in $x = \pm 1/\sqrt{3}$ due punti di massimo relativo.



e) Dal punto c) segue che la retta $x = 1/3$ è un asintoto verticale. Inoltre, poiché

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{g(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x^3 + x^2}{x - 3x^2} = \mp\infty,$$

la funzione non ammette asintoti obliqui/orizzontali a $\pm\infty$.

f) L'equazione della retta tangente al grafico nel generico punto $(x_0, g(x_0))$ è

$$y = (x - x_0)g'(x_0) + g(x_0).$$

Poiché $g(1) = -1$ e $g'(1) = -1$, l'equazione della retta cercata è

$$y = -(x - 1) - 1.$$

10 a) Si ha $y'(t) = \frac{4t^3}{t^4+1} \log_2 e$ e sostituendo si ottiene l'equazione

$$\frac{4t^3}{t^4+1} \log_2 e = \frac{t^3}{2^{\log_2(t^4+1)} \sqrt{t^4+1}} = \frac{t^3}{(t^4+1)\sqrt{t^4+1}}$$

che non è identicamente soddisfatta (ad esempio, per $t = 1$ si ottiene $2 \log_2 e \neq 1/(2\sqrt{2})$). La funzione non è dunque soluzione. Si osservi che la funzione soddisfa la seconda condizione, essendo $y(0) = 0$.

b) Scrivendo $y' = \frac{dy}{dt}$ e utilizzando il metodo di separazione delle variabili si ha

$$2^y dy = \frac{t^3}{\sqrt{t^4+1}} dt$$

e integrando (utilizzando le tabelle)

$$\int 2^y dy = \int \frac{t^3}{\sqrt{t^4+1}} dt \quad \Rightarrow \quad \frac{2^y}{\ln 2} = \frac{1}{2} \sqrt{t^4+1} + c,$$

dove c è la generica costante d'integrazione; il secondo integrale è stato calcolato con la seconda tabella:

$$\int \frac{t^3}{\sqrt{t^4+1}} dt = \frac{1}{4} \int (t^4+1)^{-1/2} (4t^3) dt = \frac{1}{4} \int (t^4+1)^{-1/2} (t^4+1)' dt = \frac{1}{4} \frac{(t^4+1)^{1/2}}{1/2} + c.$$

Si ottiene quindi

$$\frac{2^y}{\ln 2} = \frac{1}{2} \sqrt{t^4+1} + c \quad \Leftrightarrow \quad y = \log_2 \left(\ln 2 \left(\frac{1}{2} \sqrt{t^4+1} + c \right) \right).$$

Imponendo la condizione $y(0) = 0$ (nella prima delle due equazioni qui sopra) si ha

$$\frac{1}{\ln 2} = \frac{1}{2} + c,$$

da cui si ricava $c = \frac{1}{\ln 2} - \frac{1}{2}$. La soluzione è quindi

$$y(t) = \log_2 \left(\frac{\ln 2}{2} \sqrt{t^4+1} + 1 - \frac{\ln 2}{2} \right).$$

Alternativamente, si poteva utilizzare direttamente la formula risolutiva per le equazioni a variabili separabili (insieme alla formula fondamentale del calcolo integrale)

$$\begin{aligned} \int_0^y 2^z dz &= \int_0^t \frac{s^3}{\sqrt{s^4+1}} ds \quad \Rightarrow \quad \left[\frac{2^z}{\ln 2} \right]_0^y = \left[\frac{1}{2} \sqrt{s^4+1} \right]_0^t \\ &\Rightarrow \quad \frac{2^y}{\ln 2} - \frac{1}{\ln 2} = \frac{1}{2} \sqrt{t^4+1} - \frac{1}{2} \end{aligned}$$

che risolta rispetto a y fornisce la soluzione cercata.

11 Dalla prima tabella si ottiene

$$\int \left(\frac{4}{\cos^2 x} - \frac{5^x - x3^x}{x5^x} \right) dx = 4 \int \frac{1}{\cos^2 x} dx - \int \frac{1}{x} dx + \int \left(\frac{3}{5} \right)^x dx = 4 \operatorname{tg} x - \ln |x| + \frac{(3/5)^x}{\ln(3/5)} + c,$$

con c costante arbitraria. Utilizzando invece la seconda tabella, si ha

$$\int_{-1}^0 \frac{3t}{\sqrt[5]{3+t^2}} dt = \frac{3}{2} \int_{-1}^0 (3+t^2)^{-1/5} (3+t^2)' dt = \frac{3}{2} \left[\frac{(3+t^2)^{4/5}}{4/5} \right]_{-1}^0 = \frac{15}{8} (3^{4/5} - 4^{4/5}).$$