Facoltà di Agraria

Corsi di Laurea in VIT e STAL
Modulo di Matematica
Esame del 03/02/2011
A.A. 2010/2011

Scritto		Voto
Teoria	Esercizi	

Istruzioni: apporre nome, cognome e numero di matricola su ogni foglio. Prima della consegna indicare nell'apposito spazio il numero totale di fogli di cui è composto l'elaborato. Svolgere solamente uno tra 10-b) e 11. Allegare lo svolgimento completo degli esercizi 9, 10 e 11. **Non è ammesso l'uso di libri, appunti e calcolatrici grafiche o programmabili.**

Cognome	Nome
Corso di Laurea $\boxed{VIT}$ $\boxed{STAL}$	Matricola
Vecchio ordinamento $\boxed{SI}$ $\boxed{NO}$	n. fogli allegati

1 Se $\lim_{x\to x_0} f(x) = 0^-$ e $\lim_{x\to x_0} g(x) = +\infty$, allora $\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)}$ è

- A $-\infty$
- B $+\infty$
- C 0
- D non ci sono elementi sufficienti per rispondere

2 Se f è una funzione derivabile due volte in $]a,b[$ e vale $f''(x_0) = 0$ e $f'(x_0) > 0$ con $x_0 \in]a,b[$, allora

- A x_0 è sempre punto di minimo relativo per f
- B x_0 è sempre punto di massimo relativo per f
- C x_0 è sempre punto di flesso relativo per f
- D nessuna delle precedenti

3 L'equazione differenziale $y' = \cos t - y \ln t^2$ è

- A un'equazione lineare del primo ordine
- B un'equazione lineare del secondo ordine
- C un'equazione non lineare del primo ordine
- D un'equazione non lineare del secondo ordine

4 Il grafico della funzione $f(x) = \frac{1}{2x^2+2x+1}$ rappresenta

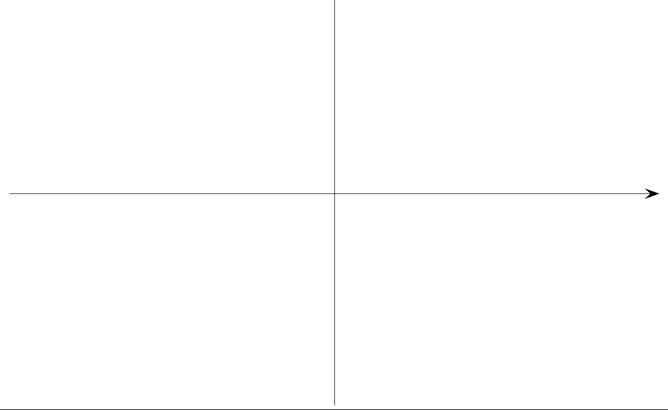
- A una retta
- B una parabola
- C un'iperbole
- D nessuna delle precedenti

5 Per la funzione $f(x) = \operatorname{sen} x$, scrivere il dominio $\mathcal{D}$, l'immagine $\mathcal{I}$, e rappresentare qualitativamente il grafico.

$\mathcal{D} =$

$\mathcal{I} =$

Grafico



$\boxed{6}$ La derivata di una funzione f nel punto x_0 rappresenta:

$\boxed{7}$ Descrivere precisamente le relazioni che esistono tra la derivata seconda e il grafico di una funzione f

$\boxed{8}$ Rappresentare il grafico di una funzione g che verifichi contemporaneamente le seguenti proprietà:

$$\lim_{x\to-\infty} g(x) = 3 \qquad \lim_{x\to-1^-} g(x) = +\infty \qquad \lim_{x\to-1^+} g(x) = +\infty \qquad \lim_{x\to+\infty} g(x) = -2$$

$\boxed{9}$ Data la funzione

$$g(x) = \frac{x^3 - 6x^2}{x+2}$$

a) determinare il dominio $\mathcal{D}$, b) studiare il segno di g; c) calcolare i limiti agli estremi del dominio; d) determinare gli intervalli in cui la funzione è crescente, quelli in cui è decrescente, e gli eventuali punti di massimo/minimo relativo; e) determinare gli eventuali asintoti; f) determinare l'equazione della retta tangente al grafico nel punto di ascissa $x_0 = -1$; g) disegnare un grafico approssimativo di g.

$\boxed{10}$ Dato il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' = \dfrac{t}{3^y\sqrt{2t^2+1}} \\ y(0) = 0 \end{cases}$$

a) dire se la funzione $y(t) = \log_3(2t^2+1)$ è soluzione del problema;

b) determinare una soluzione del problema nel caso in cui non lo sia la funzione di cui al punto precedente.

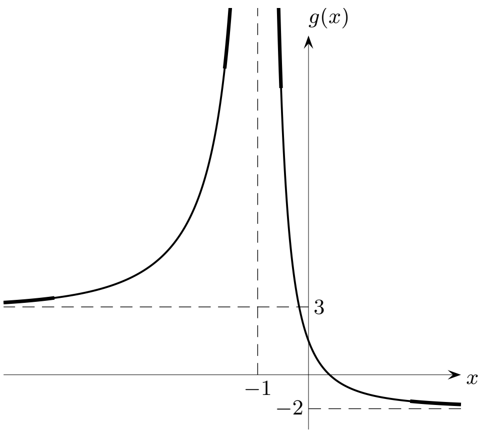
$\boxed{11}$ Calcolare i seguenti integrali

$$\int \Big(\frac{2}{\sqrt{9-x^2}} + \frac{x^3 5^x + x^2 4^x}{x^3 4^x}\Big)\, dx, \qquad \int_0^1 \frac{2t^4}{\sqrt{t^5+3}}\, dt.$$

IMPORTANTE! Risolvere solamente uno tra 10-b) e 11.

Soluzioni dei quesiti dell'esame del 3 febbraio 2011

$\boxed{1}$ C; $\boxed{2}$ D; $\boxed{3}$ A; $\boxed{4}$ D; $\boxed{5}$-$\boxed{6}$-$\boxed{7}$ consultare il libro di testo; $\boxed{8}$ in neretto si evidenziano le informazioni date dai limiti. Il grafico della funzione è quindi completato a piacere (linea sottile), ad esempio:



$\boxed{9}$ a) La funzione è definita se $x + 2 \neq 0$ cioè $x \neq -2$, perciò il dominio è $\mathcal{D} = \mathbb{R} \setminus \{-2\}$ e la funzione (razionale) è ivi continua e derivabile.

b) Si osservi che la funzione può essere riscritta come

$$g(x) = \frac{x^2(x-6)}{x+2}$$

dunque il numeratore si annulla per $x = 0$ e $x = 6$ ed è positivo se $x > 6$; il denominatore è positivo se $x > -2$. La funzione è dunque positiva per $x < -2$ oppure $x > 6$, negativa per $-2 < x < 6$ e $x \neq 0$.

c) Ha senso andare a studiare i limiti in -2 e a $\pm\infty$. Si ha

$$\lim_{x\to\pm\infty} g(x) = \lim_{x\to\pm\infty} x^2 \frac{1-6/x}{1+2/x} = [+\infty \cdot 1] = +\infty, \qquad \lim_{x\to -2^\pm} g(x) = \left[\frac{-32}{0^\pm}\right] = \mp\infty,$$

quindi la funzione non ammette massimo né minimo.

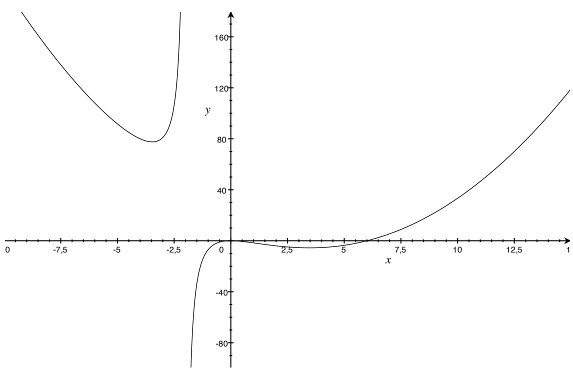
d) La derivata prima è

$$g'(x) = \frac{(3x^2-12x)(x+2) - (x^3-6x^2)\cdot 1}{(x+2)^2} = \frac{2x^3-24x}{(x+2)^2} = \frac{2x(x^2-12)}{(x+2)^2}.$$

Poiché il denominatore è sempre positivo nel dominio, la derivata prima è ≥ 0 se e solo se $x(x^2-12) \geq 0$ cioè se e solo se $x \geq \sqrt{12}$ oppure $-\sqrt{12} \leq x \leq 0$. Più precisamente

$$g'(x) \begin{cases} < 0, & \text{se } x \in]-\infty, -\sqrt{12}[\cup]0, \sqrt{12}[, \\ = 0, & \text{se } x = -\sqrt{12} \text{ oppure } x = 0 \text{ oppure } x = \sqrt{12}, \\ > 0, & \text{se } x \in]-\sqrt{12}, -2[\cup]-2, 0[\cup]\sqrt{12}, +\infty[, \end{cases}$$

perciò la funzione è decrescente in $]-\infty, -\sqrt{12}[$ e in $]0, \sqrt{12}[$, mentre è crescente in $]-\sqrt{12}, -2[$, in $]-2, 0[$ e in $]\sqrt{12}, +\infty[$. In $x = 0$ ammette un massimo relativo, in $x = \pm\sqrt{12}$ due punti di minimo relativo.



e) Dal punto c) segue che la retta $x = -2$ è un asintoto verticale. Inoltre, poiché

$$\lim_{x\to\pm\infty} \frac{g(x)}{x} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{x^3 - 6x^2}{x^2 + 2x} = \pm\infty,$$

la funzione non ammette asintoti obliqui/orizzontali a $\pm\infty$.

f) L'equazione della retta tangente al grafico nel generico punto $(x_0, g(x_0))$ è

$$y = (x - x_0)g'(x_0) + g(x_0).$$

Poiché $g(-1) = -7$ e $g'(-1) = 22$, l'equazione della retta cercata è

$$y = 22(x + 1) - 7.$$

$\boxed{\mathbf{10}}$ a) Si ha $y'(t) = \frac{4t}{2t^2+1}\log_3 \mathrm{e}$ e sostituendo si ottiene l'equazione

$$\frac{4t}{2t^2+1}\log_3 \mathrm{e} = \frac{t}{3^{\log_3(2t^2+1)}\sqrt{2t^2+1}} = \frac{t}{(2t^2+1)\sqrt{2t^2+1}}$$

che non è identicamente soddisfatta (ad esempio, per $t = 1$ si ottiene $4\log_3 \mathrm{e}/3 \neq 1/(3\sqrt{3})$). La funzione non è dunque soluzione. Si osservi che la funzione soddisfa la seconda condizione, essendo $y(0) = 0$.

b) Scrivendo $y' = \frac{dy}{dt}$ e utilizzando il metodo di separazione delle variabili si ha

$$3^y\, dy = \frac{t}{\sqrt{2t^2+1}}\, dt$$

e integrando (utilizzando le tabelle)

$$\int 3^y\, dy = \int \frac{t}{\sqrt{2t^2+1}}\, dt \qquad \Longrightarrow \qquad \frac{3^y}{\ln 3} = \frac{1}{2}\sqrt{2t^2+1} + c,$$

dove c è la generica costante d'integrazione; il secondo integrale è stato calcolato con la seconda tabella:

$$\int \frac{t}{\sqrt{2t^2+1}}\, dt = \frac{1}{4}\int (2t^2+1)^{-1/2}(4t)\, dt = \frac{1}{4}\int (2t^2+1)^{-1/2}(2t^2+1)'\, dt = \frac{1}{4}\frac{(2t^2+1)^{1/2}}{1/2} + c.$$

Si ottiene quindi

$$\frac{3^y}{\ln 3} = \frac{1}{2}\sqrt{2t^2+1} + c \qquad \Longleftrightarrow \qquad y = \log_3\Big(\ln 3\big(\frac{1}{2}\sqrt{2t^2+1} + c\big)\Big).$$

Imponendo la condizione $y(0) = 0$ (nella prima delle due equazioni qui sopra) si ha

$$\frac{1}{\ln 3} = \frac{1}{2} + c,$$

da cui si ricava $c = \frac{1}{\ln 3} - \frac{1}{2}$. La soluzione è quindi

$$y(t) = \log_3\Big(\frac{\ln 3}{2}\sqrt{2t^2+1} + 1 - \frac{\ln 3}{2}\Big).$$

Alternativamente, si poteva utilizzare direttamente la formula risolutiva per le equazioni a variabili separabili (insieme alla formula fondamentale del calcolo integrale)

$$\int_0^y 3^z\, dz = \int_0^t \frac{s}{\sqrt{2s^2+1}}\, ds \quad \Longrightarrow \quad \Big[\frac{3^z}{\ln 3}\Big]_0^y = \Big[\frac{1}{2}\sqrt{2s^2+1}\Big]_0^t$$
$$\Longrightarrow \quad \frac{3^y}{\ln 3} - \frac{1}{\ln 3} = \frac{1}{2}\sqrt{2t^2+1} - \frac{1}{2}$$

che risolta rispetto a y fornisce la soluzione cercata.

$\boxed{\mathbf{11}}$ Dalla prima tabella si ottiene

$$\int\Big(\frac{2}{\sqrt{9-x^2}} + \frac{x^3 5^x + x^2 4^x}{x^3 4^x}\Big)\, dx = \int \frac{2}{\sqrt{9-x^2}}\, dx + \int \Big(\frac{5}{4}\Big)^x dx + \int \frac{1}{x}\, dx = 2\,\mathrm{arcsen}\,\frac{x}{3} + \frac{(5/4)^x}{\ln(5/4)} + \ln|x| + c,$$

con c costante arbitraria. Utilizzando invece la seconda tabella, si ha

$$\int_0^1 \frac{2t^4}{\sqrt{t^5+3}}\, dt = \frac{2}{5}\int_0^1 (t^5+3)^{-1/2}(t^5+3)'\, dt = \frac{2}{5}\Big[\frac{(t^5+3)^{1/2}}{1/2}\Big]_0^1 = \frac{4}{5}(2 - \sqrt{3}).$$