Facoltà di Agraria

Corsi di Laurea in VIT e STAL
Modulo di Matematica
Esame del 03/02/2011
A.A. 2010/2011

Scritto		Voto
Teoria	Esercizi	

Istruzioni: apporre nome, cognome e numero di matricola su ogni foglio. Prima della consegna indicare nell'apposito spazio il numero totale di fogli di cui è composto l'elaborato. Svolgere solamente uno tra 10-b) e 11. Allegare lo svolgimento completo degli esercizi 9, 10 e 11. **Non è ammesso l'uso di libri, appunti e calcolatrici grafiche o programmabili.**

Cognome	Nome
Corso di Laurea $\boxed{VIT}$ $\boxed{STAL}$	Matricola
Vecchio ordinamento $\boxed{SI}$ $\boxed{NO}$	n. fogli allegati

1 Se $\lim_{x\to x_0} f(x) = +\infty$ e $\lim_{x\to x_0} g(x) = -\infty$, allora $\lim_{x\to x_0} f(x) - g(x)$ è

- A $-\infty$
- B $+\infty$
- C 0
- D non ci sono elementi sufficienti per rispondere

2 Se f è una funzione derivabile due volte in $]a, b[$ e vale $f'(x_0) > 0$ con $x_0 \in]a, b[$, allora

- A x_0 è sempre punto di minimo relativo per f
- B x_0 è sempre punto di massimo relativo per f
- C x_0 è sempre punto di flesso relativo per f
- D nessuna delle precedenti

3 L'equazione differenziale $y' = \ln(3t - 5y)$ è

- A un'equazione lineare del primo ordine
- B un'equazione lineare del secondo ordine
- C un'equazione non lineare del primo ordine
- D un'equazione non lineare del secondo ordine

4 Il grafico della funzione $f(x) = \dfrac{3}{2}x^2 + \dfrac{1}{5}x + \dfrac{2}{x}$ rappresenta

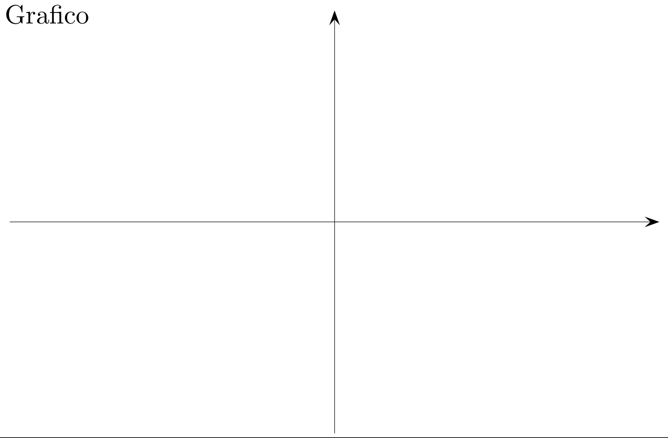
- A una retta
- B una parabola
- C un'iperbole
- D nessuna delle precedenti

5 Per la funzione $f(x) = \sqrt[7]{x}$, scrivere il dominio $\mathcal{D}$, l'immagine $\mathcal{I}$, e rappresentare qualitativamente il grafico.

$\mathcal{D} =$

$\mathcal{I} =$

Grafico



$\boxed{6}$ L'integrale definito di una funzione positiva f su $[a, b]$ rappresenta:

$\boxed{7}$ Enunciare il teorema dei punti critici

$\boxed{8}$ Rappresentare il grafico di una funzione g che verifichi contemporaneamente le seguenti proprietà:

$$\lim_{x\to-\infty} g(x) = +\infty \qquad \lim_{x\to-2^-} g(x) = -\infty \qquad \lim_{x\to-2^+} g(x) = -\infty \qquad \lim_{x\to+\infty} g(x) = 5$$

$\boxed{9}$ Data la funzione

$$g(x) = \frac{3x^2 - x^3}{x+1}$$

a) determinare il dominio $\mathcal{D}$, b) studiare il segno di g; c) calcolare i limiti agli estremi del dominio; d) determinare gli intervalli in cui la funzione è crescente, quelli in cui è decrescente, e gli eventuali punti di massimo/minimo relativo; e) determinare gli eventuali asintoti; f) determinare l'equazione della retta tangente al grafico nel punto di ascissa $x_0 = 1$; g) disegnare un grafico approssimativo di g.

$\boxed{10}$ Dato il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' = \dfrac{t}{5^y\sqrt{2-t^2}} \\ y(1) = 0 \end{cases}$$

a) dire se la funzione $y(t) = \log_5(2 - t^2)$ è soluzione del problema;

b) determinare una soluzione del problema nel caso in cui non lo sia la funzione di cui al punto precedente.

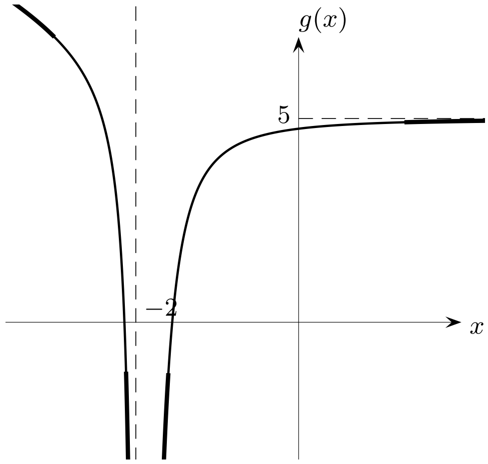
$\boxed{11}$ Calcolare i seguenti integrali

$$\int \left(\frac{x^2 2^x - x 3^x}{x^2 3^x} - \frac{3}{\sqrt{4-x^2}}\right) dx, \qquad \int_0^1 \frac{t^2}{\sqrt[3]{t^3+1}}\, dt.$$

IMPORTANTE! Risolvere solamente uno tra 10-b) e 11.

Soluzioni dei quesiti dell'esame del 3 febbraio 2011

$\boxed{1}$ B; $\boxed{2}$ D; $\boxed{3}$ C; $\boxed{4}$ D; $\boxed{5}$-$\boxed{6}$-$\boxed{7}$ consultare il libro di testo; $\boxed{8}$ in neretto si evidenziano le informazioni date dai limiti. Il grafico della funzione è quindi completato a piacere (linea sottile), ad esempio:



$\boxed{9}$ a) La funzione è definita se $x + 1 \neq 0$ cioè $x \neq -1$, perciò il dominio è $\mathcal{D} = \mathbb{R} \setminus \{-1\}$ e la funzione (razionale) è ivi continua e derivabile.

b) Si osservi che la funzione può essere riscritta come

$$g(x) = \frac{x^2(3-x)}{x+1}$$

dunque il numeratore si annulla per $x = 0$ e $x = 3$ ed è positivo se $x < 3$; il denominatore è positivo se $x > -1$. La funzione è dunque negativa per $x < -1$ oppure $x > 3$, positiva per $-1 < x < 3$ e $x \neq 0$.

c) Ha senso andare a studiare i limiti in -1 e a $\pm\infty$. Si ha

$$\lim_{x\to\pm\infty} g(x) = \lim_{x\to\pm\infty} x^2 \frac{3/x - 1}{1 + 1/x} = [+\infty \cdot -1] = -\infty, \qquad \lim_{x\to -1^\pm} g(x) = \left[\frac{4}{0^\pm}\right] = \pm\infty,$$

quindi la funzione non ammette massimo né minimo.

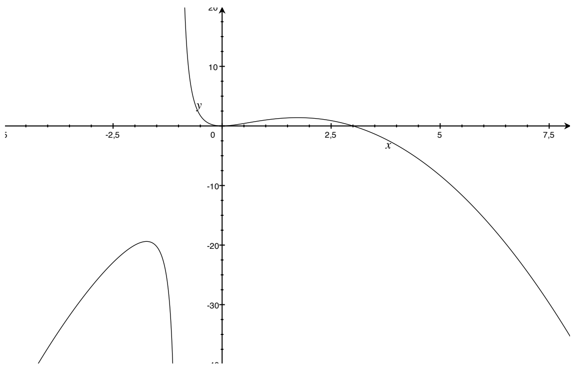
d) La derivata prima è

$$g'(x) = \frac{(6x - 3x^2)(x+1) - (3x^2 - x^3)\cdot 1}{(x+1)^2} = \frac{6x - 2x^3}{(x+1)^2} = \frac{2x(3-x^2)}{(x+1)^2}.$$

Poiché il denominatore è sempre positivo nel dominio, la derivata prima è ≥ 0 se e solo se $x(3-x^2) \geq 0$ cioè se e solo se $x \leq -\sqrt{3}$ oppure $0 \leq x \leq \sqrt{3}$. Più precisamente

$$g'(x) \begin{cases} > 0, & \text{se } x \in]-\infty, -\sqrt{3}[\cup]0, \sqrt{3}[, \\ = 0, & \text{se } x = -\sqrt{3} \text{ oppure } x = 0 \text{ oppure } x = \sqrt{3}, \\ < 0, & \text{se } x \in]-\sqrt{3}, -1[\cup]-1, 0[\cup]\sqrt{3}, +\infty[, \end{cases}$$

perciò la funzione è crescente in $]-\infty, -\sqrt{3}[$ e in $]0, \sqrt{3}[$, mentre è decrescente in $]-\sqrt{3}, -1[$, in $]-1, 0[$ e in $]\sqrt{3}, +\infty[$. In $x = 0$ ammette un minimo relativo, in $x = \pm\sqrt{3}$ due punti di massimo relativo.



e) Dal punto c) segue che la retta $x=-1$ è un asintoto verticale. Inoltre, poiché

$$\lim_{x\to\pm\infty}\frac{g(x)}{x}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{3x^2-x^3}{x^2+x}=\mp\infty,$$

la funzione non ammette asintoti obliqui/orizzontali a $\pm\infty$.

f) L'equazione della retta tangente al grafico nel generico punto $(x_0,g(x_0))$ è

$$y=(x-x_0)g'(x_0)+g(x_0).$$

Poiché $g(1)=1$ e $g'(1)=1$, l'equazione della retta cercata è

$$y=(x-1)+1 \text{ cioè } y=x$$

10 a) Si ha $y'(t)=\frac{-2t}{2-t^2}\log_5 \mathrm{e}$ e sostituendo si ottiene l'equazione

$$\frac{-2t}{2-t^2}\log_5\mathrm{e}=\frac{t}{5^{\log_5(2-t^2)}\sqrt{2-t^2}}=\frac{t}{(2-t^2)\sqrt{2-t^2}}$$

che non è identicamente soddisfatta (ad esempio, per $t=1$ si ottiene $-2\log_5\mathrm{e}\neq 1$). La funzione non è dunque soluzione. Si osservi che la funzione soddisfa la seconda condizione, essendo $y(1)=0$.

b) Scrivendo $y'=\frac{dy}{dt}$ e utilizzando il metodo di separazione delle variabili si ha

$$5^y\,dy=\frac{t}{\sqrt{2-t^2}}\,dt$$

e integrando (utilizzando le tabelle)

$$\int 5^y\,dy=\int\frac{t}{\sqrt{2-t^2}}\,dt \qquad\Longrightarrow\qquad \frac{5^y}{\ln 5}=-\sqrt{2-t^2}+c,$$

dove c è la generica costante d'integrazione; il secondo integrale è stato calcolato con la seconda tabella:

$$\int\frac{t}{\sqrt{2-t^2}}\,dt=-\frac{1}{2}\int(2-t^2)^{-1/2}(-2t)\,dt=-\frac{1}{2}\int(2-t^2)^{-1/2}(2-t^2)'\,dt=-\frac{1}{2}\frac{(2-t^2)^{1/2}}{1/2}+c.$$

Si ottiene quindi

$$\frac{5^y}{\ln 5}=-\sqrt{2-t^2}+c \qquad\Longleftrightarrow\qquad y=\log_5\Big(\ln 5\big(-\sqrt{2-t^2}+c\big)\Big).$$

Imponendo la condizione $y(1)=0$ (nella prima delle due equazioni qui sopra) si ha

$$\frac{1}{\ln 5}=-1+c,$$

da cui si ricava $c=\frac{1}{\ln 5}+1$. La soluzione è quindi

$$y(t)=\log_5\Big(1+\ln 5-\ln 5\sqrt{2-t^2}\Big).$$

Alternativamente, si poteva utilizzare direttamente la formula risolutiva per le equazioni a variabili separabili (insieme alla formula fondamentale del calcolo integrale)

$$\int_0^y 5^z\,dz=\int_1^t\frac{s}{\sqrt{2-s^2}}\,ds \quad\Longrightarrow\quad \left[\frac{5^z}{\ln 5}\right]_0^y=\Big[-\sqrt{2-s^2}\Big]_1^t$$

$$\Longrightarrow\quad \frac{5^y}{\ln 5}-\frac{1}{\ln 5}=1-\sqrt{2-t^2}$$

che risolta rispetto a y fornisce la soluzione cercata.

11 Dalla prima tabella si ottiene

$$\int\Big(\frac{x^2 2^x-x3^x}{x^2 3^x}-\frac{3}{\sqrt{4-x^2}}\Big)\,dx=\int\Big(\frac{2}{3}\Big)^x dx-\int\frac{1}{x}\,dx-\int\frac{3}{\sqrt{4-x^2}}\,dx=\frac{(2/3)^x}{\ln(2/3)}-\ln|x|-3\operatorname{arcsen}\frac{x}{2}+c,$$

con c costante arbitraria. Utilizzando invece la seconda tabella, si ha

$$\int_0^1\frac{t^2}{\sqrt[3]{t^3+1}}\,dt=\frac{1}{3}\int_0^1(t^3+1)^{-1/3}(t^3+1)'\,dt=\frac{1}{3}\Big[\frac{(t^3+1)^{2/3}}{2/3}\Big]_0^1=\frac{1}{2}(2^{2/3}-1).$$