Facoltà di Agraria

Corsi di Laurea in VIT e STAL
Modulo di Matematica
Esame del 03/02/2011
A.A. 2010/2011

Scritto		Voto
Teoria	Esercizi	

Istruzioni: apporre nome, cognome e numero di matricola su ogni foglio. Prima della consegna indicare nell'apposito spazio il numero totale di fogli di cui è composto l'elaborato. Svolgere solamente uno tra 10-b) e 11. Allegare lo svolgimento completo degli esercizi 9, 10 e 11. **Non è ammesso l'uso di libri, appunti e calcolatrici grafiche o programmabili.**

Cognome	Nome
Corso di Laurea *VIT* *STAL*	Matricola
Vecchio ordinamento *SI* *NO*	n. fogli allegati

1 Se $\lim_{x\to x_0} f(x) = +\infty$ e $\lim_{x\to x_0} g(x) = 0^-$, allora $\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)}$ è

- A $-\infty$
- B $+\infty$
- C 0
- D non ci sono elementi sufficienti per rispondere

2 Se f è una funzione derivabile due volte in $]a,b[$ e vale $f'(x) > 0$ e $f''(x) < 0$ in $]a,b[$, allora

- A f è decrescente e concava in $]a,b[$
- B f è crescente e convessa in $]a,b[$
- C f è decrescente e convessa in $]a,b[$
- D f è crescente e concava in $]a,b[$

3 L'equazione differenziale $y'' = (y+t)^2 - 5ty'$ è

- A un'equazione lineare del primo ordine
- B un'equazione lineare del secondo ordine
- C un'equazione non lineare del primo ordine
- D un'equazione non lineare del secondo ordine

4 Il grafico della funzione $f(x) = \dfrac{2^x+1}{2^x+5}$ rappresenta

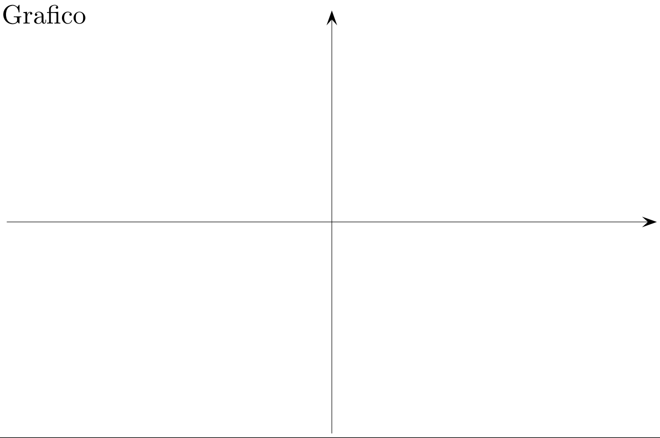
- A una retta
- B una parabola
- C un'iperbole
- D nessuna delle precedenti

5 Per la funzione $f(x) = \log_{5/3} x$, scrivere il dominio $\mathcal{D}$, l'immagine $\mathcal{I}$, e rappresentare qualitativamente il grafico.

$\mathcal{D} =$

$\mathcal{I} =$

Grafico



$\boxed{6}$ Per definizione, la derivata di una funzione $f(x)$ in x_0 è:

$\boxed{7}$ Enunciare il teorema fondamentale del calcolo integrale

$\boxed{8}$ Rappresentare il grafico di una funzione g che verifichi contemporaneamente le seguenti proprietà:

$$\lim_{x\to-\infty} g(x) = -3 \qquad \lim_{x\to1^-} g(x) = 2 \qquad \lim_{x\to1^+} g(x) = +\infty \qquad \lim_{x\to+\infty} g(x) = -\infty$$

$\boxed{9}$ Data la funzione

$$g(x) = \frac{x^3 + 9x^2}{x - 3}$$

a) determinare il dominio $\mathcal{D}$, b) studiare il segno di g; c) calcolare i limiti agli estremi del dominio; d) determinare gli intervalli in cui la funzione è crescente, quelli in cui è decrescente, e gli eventuali punti di massimo/minimo relativo; e) determinare gli eventuali asintoti; f) determinare l'equazione della retta tangente al grafico nel punto di ascissa $x_0 = 1$; g) disegnare un grafico approssimativo di g.

$\boxed{10}$ Dato il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' = \dfrac{2t^2}{4^y\sqrt{t^3+1}} \\ y(0) = 0 \end{cases}$$

a) dire se la funzione $y(t) = \log_4(t^3 + 1)$ è soluzione del problema;

b) determinare una soluzione del problema nel caso in cui non lo sia la funzione di cui al punto precedente.

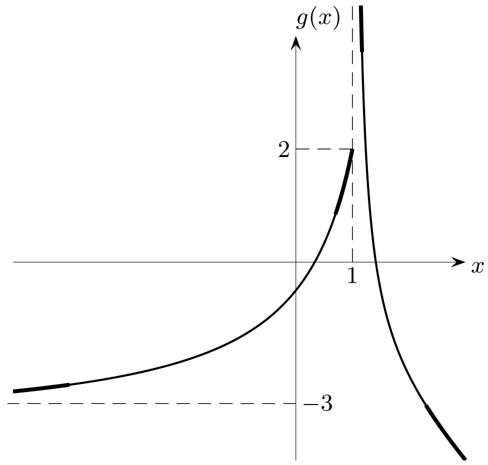
$\boxed{11}$ Calcolare i seguenti integrali

$$\int \Big(\frac{2}{x^2+4} + \frac{x^3 5^x + x 2^x}{x^3 2^x}\Big)\,dx, \qquad \int_{-1}^{0} \frac{5t}{\sqrt[5]{2-t^2}}\,dt.$$

IMPORTANTE! Risolvere solamente uno tra 10-b) e 11.

Soluzioni dei quesiti dell'esame del 3 febbraio 2011

$\boxed{1}$ A; $\boxed{2}$ D; $\boxed{3}$ D; $\boxed{4}$ D; $\boxed{5}$-$\boxed{6}$-$\boxed{7}$ consultare il libro di testo; $\boxed{8}$ in neretto si evidenziano le informazioni date dai limiti. Il grafico della funzione è quindi completato a piacere (linea sottile), ad esempio:



$\boxed{9}$ a) La funzione è definita se $x - 3 \neq 0$ cioè $x \neq 3$, perciò il dominio è $\mathcal{D} = \mathbb{R} \setminus \{3\}$ e la funzione (razionale) è ivi continua e derivabile.

b) Si osservi che la funzione può essere riscritta come

$$g(x) = \frac{x^2(x+9)}{x-3}$$

dunque il numeratore si annulla per $x = 0$ e $x = -9$ ed è positivo se $x > -9$; il denominatore è positivo se $x > 3$. La funzione è dunque positiva per $x < -9$ oppure $x > 3$, negativa per $-9 < x < 3$ e $x \neq 0$.

c) Ha senso andare a studiare i limiti in 3 e a $\pm\infty$. Si ha

$$\lim_{x\to\pm\infty} g(x) = \lim_{x\to\pm\infty} x^2 \frac{1 + 9/x}{1 - 3/x} = [+\infty \cdot 1] = +\infty, \qquad \lim_{x\to 3^{\pm}} g(x) = \left[\frac{108}{0^{\pm}}\right] = \pm\infty,$$

quindi la funzione non ammette massimo né minimo.

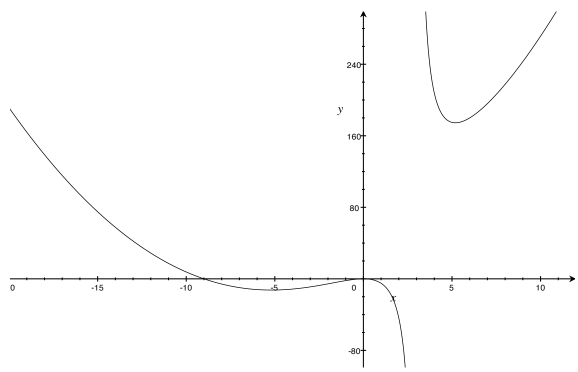
d) La derivata prima è

$$g'(x) = \frac{(3x^2 + 18x)(x-3) - (x^3 + 9x^2)\cdot 1}{(x-3)^2} = \frac{2x^3 - 54x}{(x-3)^2} = \frac{2x(x^2 - 27)}{(x-3)^2}.$$

Poiché il denominatore è sempre positivo nel dominio, la derivata prima è ≥ 0 se e solo se $x(x^2 - 27) \geq 0$ cioè se e solo se $x \geq \sqrt{27}$ oppure $-\sqrt{27} \leq x \leq 0$. Più precisamente

$$g'(x) \begin{cases} < 0, & \text{se } x \in]-\infty, -\sqrt{27}[\cup]0, 3[\cup]3, \sqrt{27}[, \\ = 0, & \text{se } x = -\sqrt{27} \text{ oppure } x = 0 \text{ oppure } x = \sqrt{27}, \\ > 0, & \text{se } x \in]-\sqrt{27}, 0[\cup]\sqrt{27}, +\infty[, \end{cases}$$

perciò la funzione è decrescente in $]-\infty, -\sqrt{27}[$, in $]0, 3[$ e in $]3, \sqrt{27}[$, mentre è crescente in $]-\sqrt{27}, 0[$ e in $]\sqrt{27}, +\infty[$. In $x = 0$ ammette un massimo relativo, in $x = \pm\sqrt{27}$ due punti di minimo relativo.



e) Dal punto c) segue che la retta $x = 3$ è un asintoto verticale. Inoltre, poiché

$$\lim_{x\to\pm\infty} \frac{g(x)}{x} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{x^3 + 9x^2}{x^2 - 3x} = \pm\infty,$$

la funzione non ammette asintoti obliqui/orizzontali a $\pm\infty$.
f) L'equazione della retta tangente al grafico nel generico punto $(x_0, g(x_0))$ è

$$y = (x - x_0)g'(x_0) + g(x_0).$$

Poiché $g(1) = -5$ e $g'(1) = -13$, l'equazione della retta cercata è

$$y = -13(x - 1) - 5.$$

$\boxed{\mathbf{10}}$ a) Si ha $y'(t) = \frac{3t^2}{t^3+1} \log_4 \mathrm{e}$ e sostituendo si ottiene l'equazione

$$\frac{3t^2}{t^3 + 1} \log_4 \mathrm{e} = \frac{2t^2}{4^{\log_4(t^3+1)}\sqrt{t^3 + 1}} = \frac{2t^2}{(t^3 + 1)\sqrt{t^3 + 1}}$$

che non è identicamente soddisfatta (ad esempio, per $t = 1$ si ottiene $3 \log_4 \mathrm{e}/2 \neq 1/\sqrt{2}$). La funzione non è dunque soluzione. Si osservi che la funzione soddisfa la seconda condizione, essendo $y(0) = 0$.
b) Scrivendo $y' = \frac{dy}{dt}$ e utilizzando il metodo di separazione delle variabili si ha

$$4^y\, dy = \frac{2t^2}{\sqrt{t^3 + 1}}\, dt$$

e integrando (utilizzando le tabelle)

$$\int 4^y\, dy = \int \frac{2t^2}{\sqrt{t^3 + 1}}\, dt \qquad \Longrightarrow \qquad \frac{4^y}{\ln 4} = \frac{4}{3}\sqrt{t^3 + 1} + c,$$

dove c è la generica costante d'integrazione; il secondo integrale è stato calcolato con la seconda tabella:

$$\int \frac{2t^2}{\sqrt{t^3 + 1}}\, dt = \frac{2}{3} \int (t^3 + 1)^{-1/2}(3t^2)\, dt = \frac{2}{3} \int (t^3 + 1)^{-1/2}(t^3 + 1)'\, dt = \frac{2}{3}\frac{(t^3 + 1)^{1/2}}{1/2} + c.$$

Si ottiene quindi

$$\frac{4^y}{\ln 4} = \frac{4}{3}\sqrt{t^3 + 1} + c \qquad \Longleftrightarrow \qquad y = \log_4 \Big(\ln 4\big(\frac{4}{3}\sqrt{t^3 + 1} + c\big)\Big).$$

Imponendo la condizione $y(0) = 0$ (nella prima delle due equazioni qui sopra) si ha

$$\frac{1}{\ln 4} = \frac{4}{3} + c,$$

da cui si ricava $c = \frac{1}{\ln 4} - \frac{4}{3}$. La soluzione è quindi

$$y(t) = \log_4 \Big(\frac{4 \ln 4}{3}\sqrt{t^3 + 1} + 1 - \frac{4 \ln 4}{3}\Big).$$

Alternativamente, si poteva utilizzare direttamente la formula risolutiva per le equazioni a variabili separabili (insieme alla formula fondamentale del calcolo integrale)

$$\int_0^y 4^z\, dz = \int_0^t \frac{2s^2}{\sqrt{s^3 + 1}}\, ds \quad \Longrightarrow \quad \Big[\frac{4^z}{\ln 4}\Big]_0^y = \Big[\frac{4}{3}\sqrt{s^3 + 1}\Big]_0^t$$

$$\Longrightarrow \quad \frac{4^y}{\ln 4} - \frac{1}{\ln 4} = \frac{4}{3}\sqrt{t^3 + 1} - \frac{4}{3}$$

che risolta rispetto a y fornisce la soluzione cercata.

$\boxed{\mathbf{11}}$ Dalla prima tabella si ottiene

$$\int \Big(\frac{2}{x^2 + 4} + \frac{x^3 5^x + x 2^x}{x^3 2^x}\Big)\, dx = 2 \int \frac{1}{x^2 + 4}\, dx + \int \Big(\frac{5}{2}\Big)^x dx + \int x^{-2}\, dx = \operatorname{arctg} \frac{x}{2} + \frac{(5/2)^x}{\ln(5/2)} - \frac{1}{x} + c,$$

con c costante arbitraria. Utilizzando invece la seconda tabella, si ha

$$\int_{-1}^0 \frac{5t}{\sqrt[5]{2 - t^2}}\, dt = -\frac{5}{2} \int_{-1}^0 (2 - t^2)^{-1/5}(2 - t^2)'\, dt = -\frac{5}{2}\Big[\frac{(2 - t^2)^{4/5}}{4/5}\Big]_{-1}^0 = -\frac{25}{8}(2^{4/5} - 1).$$