Università degli Studi di Udine — Anno Accademico 2010/2011

Facoltà di Agraria
Corsi di Laurea in VIT e STAL

Esercitazioni di Matematica

26 ottobre 2010

1 Trovare le soluzioni della seguente disequazione:

$$\frac{1}{x-1} - 1 > \frac{1}{2x+1}$$

2 Trovare le soluzioni della seguente disequazione:

$$\log_2 |1-2x| \le 2\log_4(3x+1)$$

3 Trovare le soluzioni della seguente disequazione:

$$3^{\sqrt{x^2-1}} \ge 9 \cdot 3^x$$

Soluzioni degli esercizi del 26 ottobre 2010

1 Affinché le funzioni che compaiono nella disequazione siano definite deve essere $x-1 \neq 0$ e $2x+1 \neq 0$ cioè $x \neq 1$, $x \neq -1/2$. Con semplici calcoli si ottiene

$$\frac{1}{x-1} - 1 > \frac{1}{2x+1} \iff \frac{1}{x-1} - 1 - \frac{1}{2x+1} > 0 \iff$$

$$\iff \frac{(2x+1)-(x-1)(2x+1)-(x-1)}{(x-1)(2x+1)} > 0 \iff \frac{-2x^2+2x+3}{(x-1)(2x+1)} > 0.$$

Studiamo separatamente il segno del numeratore e del denominatore. Il numeratore è ≥ 0 se e solo se $-2x^2+2x+3 \ge 0$ cioè se e solo se $\frac{1-\sqrt{7}}{2} \le x \le \frac{1+\sqrt{7}}{2}$. In definitiva il numeratore è positivo se $\frac{1-\sqrt{7}}{2} < x < \frac{1+\sqrt{7}}{2}$, negativo se $x < \frac{1-\sqrt{7}}{2}$ oppure $x > \frac{1+\sqrt{7}}{2}$e si annulla se $x = \frac{1-\sqrt{7}}{2}$ oppure $x = \frac{1+\sqrt{7}}{2}$.

Analogamente si verifica che il denominatore è positivo se $x < -1/2$ oppure $x > 1$, negativo se $-1/2 < x < 1$.

La disequazione ha soluzione quando numeratore e denominatore hanno segno discorde, dunque se $\frac{1-\sqrt{7}}{2} < x < -1/2$ oppure $1 < x < \frac{1+\sqrt{7}}{2}$. L'insieme delle soluzioni è quindi

$$S = \left]\frac{1-\sqrt{7}}{2}, -\frac{1}{2}\right[\cup \left]1, \frac{1+\sqrt{7}}{2}\right[$$

$\boxed{\mathbf{2}}$ Anzitutto la disequazione ha senso quando gli argomenti del logaritmi sono positivi, cioè

$$\begin{cases} |1-2x| > 0 \\ (3x+1) > 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x \neq 1/2 \\ x > -1/3 \end{cases}$$

Utilizzando la formula del cambiamento di base dei logaritmi si ottiene

$$\log_4(3x+1) = \frac{\log_2(3x+1)}{\log_2 4} = \frac{\log_2(3x+1)}{2}$$

perciò la disequazione equivale a

$$\log_2 |1-2x| \leq \log_2(3x+1)$$

Poiché la funzione logaritmica in base 2 è crescente, quest'ultima equivale a

$$|1-2x| \leq (3x+1)$$

Distinguiamo due casi: se $1-2x > 0$ ovvero se $x < 1/2$, la disequazione equivale a $1-2x \leq 3x+1$ che ha come soluzioni gli $x \geq 0$, e in definitiva, gli $0 \leq x < 1/2$.

Nel secondo caso, se $1-2x < 0$ ovvero se $x > 1/2$, la disequazione equivale a $-(1-2x) \leq 3x+1$ che ha come soluzioni gli $x \geq -2$, e in definitiva, gli $x > 1/2$.

Ricordandoci delle condizioni di esistenza, l'insieme delle soluzioni è

$$S = [0, 1/2[\cup]1/2, +\infty[$$

$\boxed{\mathbf{3}}$ La disequazione ha senso quando l'argomento della radice quadrata è non negativo, cioè se $x^2 - 1 \geq 0$ ovvero $x \leq -1$ oppure $x \geq 1$. Poiché inoltre $9 = 3^2$ la disequazione può essere scritta nella forma

$$3^{\sqrt{x^2-1}} \geq 3^{2+x}$$

e utilizzando la proprietà di crescenza della funzione esponenziale di base 3 si ottiene equivalentemente

$$\sqrt{x^2-1} \geq 2+x$$

Si distinguono 2 casi: se $2+x < 0$ ovvero $x < -2$, la disequazione ha sempre soluzione, poiché il membro sinistro è positivo, quello destro negativo.

Nel secondo caso, se $2+x \geq 0$ ovvero $x \geq -2$, entrambi i membri sono positivi e si può elevare al quadrato, ottenendo

$$x^2 - 1 \geq 4 + 4x + x^2 \quad \iff \quad -5 \geq 4x \quad \iff \quad -5/4 \geq x$$

ottenendo quindi le soluzioni $-2 \leq x \leq -5/4$.

Ricordandoci delle condizioni d'esistenza si ottiene che l'insieme delle soluzione è dato da

$$S =]-\infty, -5/4]$$

Esercitazioni del 16 novembre 2010

$\boxed{1}$ Trovare le soluzioni della seguente disequazione:

$$\ln^2 x - |\ln x| - 2 \leq 0$$

$\boxed{2}$ Trovare le soluzioni della seguente disequazione:

$$\log_{1/2}\big(2 - |x-2|\big) \geq \log_{1/2}(3-x) - 1$$

$\boxed{3}$ Rappresentare il grafico di una funzione g che verifichi contemporaneamente le seguenti proprietà:

$$\lim_{x\to-\infty} g(x) = +\infty \qquad \lim_{x\to-3^-} g(x) = +\infty \qquad \lim_{x\to-3^+} g(x) = 1 \qquad \lim_{x\to+\infty} g(x) = 3$$

$\boxed{4}$ Calcolare, qualora possibile, il valore dei seguenti limiti:

a) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{5-3x^4-8x^5}{3x^5-2x^4+3}$, **b)** $\displaystyle\lim_{z\to+\infty} \frac{7z^4-z^2-2}{z^3+3-z^9}$, **c)** $\displaystyle\lim_{y\to-\infty} \frac{3y^5-5y+1}{2y^3+3y-4}$.

$\boxed{5}$ Calcolare, qualora possibile, il valore dei seguenti limiti:

f) $\displaystyle\lim_{y\to1} \frac{4y^2+y-2}{y^2-4y+3}$, **g)** $\displaystyle\lim_{x\to0} \frac{\mathrm{tg}(x+\pi/4)}{x\ln(1-3x)}$.

Soluzioni degli esercizi del 16 novembre 2010

$\boxed{1}$ Affinché le funzioni che compaiono nella disequazione siano definite deve essere $x > 0$. Mediante la sostituzione $y = \ln x$ si ottiene la disequazione equivalente $y^2 - |y| - 2 \leq 0$ nell'incognita y. Distinguiamo due casi, a seconda che l'argomento del valore assoluto sia positivo oppure negativo: quest'ultima disequazione è dunque equivalente a

$$\begin{cases} y \geq 0 \\ y^2 - y - 2 \leq 0, \end{cases} \cup \begin{cases} y < 0 \\ y^2 + y - 2 \leq 0. \end{cases}$$

La disequazione $y^2 - y - 2 \leq 0$ ha come soluzioni $-1 \leq y \leq 2$ perciò il primo sistema ha soluzioni $0 \leq y \leq 2$; la disequazione $y^2 + y - 2 \leq 0$ ha come soluzioni $-2 \leq y \leq 1$ perciò il secondo sistema ha soluzioni $-2 \leq y < 0$. Unendo le soluzioni dei due sistemi si ha dunque $-2 \leq y \leq 2$. Ritornando alle variabili x si ottiene la disequazione $-2 \leq \ln x \leq 2$ che ha come insieme delle soluzioni

$$S = [\mathrm{e}^{-2}, \mathrm{e}^2]$$

Alternativamente, ricordando che $|z|^2 = z^2$ si poteva utilizzare la sostituzione $z = |\ln x|$ ottenendo la disequazione $z^2 - z - 2 \leq 0$ le cui soluzioni sono $-1 \leq z \leq 2$. Ritornando alla variabile x si ottiene $-1 \leq |\ln x| \leq 2$ che è vera (essendo la prima disuguaglianza sempre verificata) se e solo se $|\ln x| \leq 2$ ovvero $-2 \leq \ln x \leq 2$, da cui nuovamente la soluzione finale.

2 Innanzitutto affinché le funzioni che compaiono nella disequazione siano definite deve essere

$$\begin{cases} 2-|x-2|>0 \\ 3-x>0 \end{cases} \iff \begin{cases} 2>|x-2| \\ x<3 \end{cases} \iff \begin{cases} 2>x-2>-2 \\ x<3 \end{cases} \iff \begin{cases} 4>x>0 \\ x<3 \end{cases}$$

quindi $0<x<3$. Osservato che $-1=\log_{1/2}2$, utilizzando le proprietà dei logaritmi si ottiene che la disequazione è equivalente a

$$\log_{1/2}\left(2-|x-2|\right) \geq \log_{1/2}(3-x)+\log_{1/2}2 \iff \log_{1/2}\left(2-|x-2|\right) \geq \log_{1/2}(6-2x).$$

Poiché la funzione logaritmica in base $1/2$ è decrescente, quest'ultima equivale a

$$2-|x-2| \leq 6-2x$$

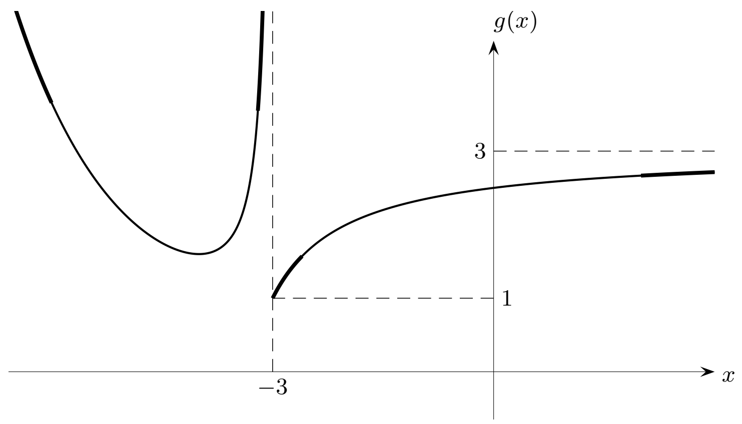
Distinguiamo due casi, a seconda che l'argomento del valore assoluto sia positivo oppure negativo. Perciò la disequazione è equivalente a

$$\begin{cases} x-2\geq 0 \\ 2-(x-2)\leq 6-2x, \end{cases} \cup \begin{cases} x-2<0 \\ 2+(x-2)\leq 6-2x. \end{cases}$$

Il primo sistema ha come soluzione $x=2$, il secondo $x<2$. Ricordandoci delle condizioni di esistenza, l'insieme delle soluzioni è

$$S=]0,2]$$

3 In neretto si evidenziano le informazioni date dai limiti. Il grafico della funzione è quindi completato a piacere (linea sottile), ad esempio:



4 a) È un limite di una funzione razionale all'infinito:

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{5-3x^4-8x^5}{3x^5-2x^4+3} = \lim_{x\to+\infty}\frac{5/x^5-3/x-8}{3-2/x+3/x^5} = \left[\frac{0-0-8}{3-0+0}\right] = -\frac{8}{3}.$$

b) È un limite di una funzione razionale all'infinito:

$$\lim_{z\to+\infty}\frac{7z^4-z^2-2}{z^3+3-z^9} = \lim_{z\to+\infty}\frac{z^4(7-1/z^2-2/z^4)}{z^9(1/z^6+3/z^9-1)} = \lim_{z\to+\infty}\left(\frac{1}{z^5}\cdot\frac{7-1/z^2-2/z^4}{1/z^6+3/z^9-1}\right)$$

$$= \left[0\cdot\frac{7-0-0}{0+0-1}\right] = 0.$$

c) È un limite di una funzione razionale all'infinito:

$$\lim_{y\to-\infty}\frac{3y^5-5y+1}{2y^3+3y-4}=\lim_{y\to-\infty}\frac{y^5(3-5/y^4+1/y^5)}{y^3(2+3/y^2-4/y^3)}=\lim_{y\to-\infty}\left(y^2\cdot\frac{3-5/y^4+1/y^5}{2+3/y^2-4/y^3}\right)$$
$$=\left[+\infty\cdot\frac{3-0-0}{2+0-0}\right]=+\infty.$$

5 f) Il limite si presenta nella forma indeterminata $[\frac{3}{0}]$. Studiamo quindi il segno della funzione in un intorno di $y_0=1$. Il numeratore tende a 3 e quindi è positivo per gli y vicini a 1. Poiché y^2-4y+3 è positivo per gli $y<1$ e per gli $y>3$ si ottiene che la funzione è positiva per gli $y<1$ e negativa per gli $y>1$ e vicini a 1, quindi

$$\lim_{y\to1^-}\frac{4y^2+y-2}{y^2-4y+3}=\left[\frac{3}{0^+}\right]=+\infty,\qquad \lim_{y\to1^+}\frac{4y^2+y-2}{y^2-4y+3}=\left[\frac{3}{0^-}\right]=-\infty,$$

quindi il limite cercato non esiste.

g) Il limite si presenta nella forma indeterminata $[\frac{1}{0}]$. Studiamo il segno della funzione in un intorno di $x_0=0$. Il numeratore tende a 1, quindi è positivo per gli x vicini a 0. Studiamo il segno del denominatore: si ha $\ln(1-3x)>0$ se e solo se $1-3x>1$ cioè $x<0$. Tenendo conto anche del fattore x si ottiene che il denominatore è sempre negativo nelle vicinanze di $x_0=0$ (tranne che in x_0 stesso), perciò

$$\lim_{x\to0}\frac{\mathrm{tg}(x+\pi/4)}{x\ln(1-3x)}=\left[\frac{1}{0^-}\right]=-\infty.$$

Esercitazioni del 7 dicembre 2010

1 Calcolare la derivata delle seguenti funzioni

$$f_1(x)=\frac{3x^2-2x+1}{x^2-4x+3},\qquad f_2(x)=\frac{3\log_2 x+\sqrt[3]{x}}{\cos x}+(x4^x-\mathrm{tg}\,x)^2,$$
$$f_3(x)=\mathrm{arcsen}(1-x^2),\qquad f_4(x)=\mathrm{sen}\,\frac{1}{\ln(\mathrm{e}^x+1)}.$$

2 Risolvere i seguenti limiti, dopo aver verificato che valgono le ipotesi del Teorema di de l'Hôpital

$$\textbf{a)}\ \lim_{x\to0}\frac{5\,\mathrm{sen}\,x-5x^3+x2^x}{3^x-\cos x+4x^2}\qquad \textbf{b)}\ \lim_{x\to0}\frac{3x^2+\mathrm{e}^x\cos x-\sqrt{1+2x}}{5\,\mathrm{sen}(x^2)-x\ln(1+2x)}.$$

3 Data la funzione

$$g(x)=\frac{x^2+2}{2x+1}$$

a) determinare il dominio;

b) determinare gli intervalli dove la funzione è crescente e quelli dove la funzione è decrescente, gli eventuali punti di massimo/minimo relativo e/o assoluto;

c) determinare gli intervalli dove la funzione è concava e quelli dove la funzione è convessa;

d) calcolare l'equazione della retta tangente al grafico nel punto di ascissa $x_0 = 0$.

Soluzioni degli esercizi del 7 dicembre 2010

$\boxed{1}$ Utilizzando la regola di derivazione del quoziente:

$$f_1'(x) = \frac{(6x-2)(x^2-4x+3)-(3x^2-2x+1)(2x-4)}{(x^2-4x+3)^2} = \frac{-10x^2+16x-2}{(x^2-4x+3)^2}.$$

Utilizzando la regola di derivazione del prodotto del quoziente e della funzione composta si ottiene:

$$f_2'(x) = \frac{(\frac{3\log_2 e}{x}+\frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}})\cos x-(3\log_2 x+\sqrt[3]{x})(-\operatorname{sen} x)}{\cos^2 x} + 2(x4^x - \operatorname{tg} x)\Big(4^x + x4^x\ln 4 - \frac{1}{\cos^2 x}\Big)$$

La funzione è derivabile per $-\sqrt{2} < x < \sqrt{2}$; utilizzando la regola di derivazione della funzione composta si ha

$$f_3'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-(1-x^2)^2}}(-2x) = \frac{-2x}{\sqrt{2x^2-x^4}} = \frac{-2x}{|x|\sqrt{2-x^2}} = \frac{-2\operatorname{sgn}(x)}{\sqrt{2-x^2}}.$$

Utilizzando la regola di derivazione della funzione composta si ottiene infine:

$$\begin{aligned} f_4'(x) &= \cos\Big(\frac{1}{\ln(e^x+1)}\Big)\Big(\frac{1}{\ln(e^x+1)}\Big)' = \cos\Big(\frac{1}{\ln(e^x+1)}\Big)\Big(-\frac{\big(\ln(e^x+1)\big)'}{\ln^2(e^x+1)}\Big) \\ &= -\cos\Big(\frac{1}{\ln(e^x+1)}\Big)\cdot\frac{1}{\ln^2(e^x+1)}\cdot\frac{e^x}{e^x+1}. \end{aligned}$$

$\boxed{2}$ a) Il limite si presenta nella forma d'indeterminazione [0/0]. Applicando de l'Hôpital si ottiene

$$\lim_{x\to 0}\frac{5\operatorname{sen} x-5x^3+x2^x}{3^x-\cos x+4x^2} \overset{H}{=} \lim_{x\to 0}\frac{5\cos x-15x^2+2^x+x2^x\ln 2}{3^x\ln 3+\operatorname{sen} x+8x} = \frac{6}{\ln 3}.$$

Per de l'Hôpital il limite cercato vale allora $\frac{6}{\ln 3}$.

b) Il limite si presenta nella forma d'indeterminazione [0/0]. Applicando de l'Hôpital due volte consecutivamente si ottiene

$$\begin{aligned} &\lim_{x\to 0}\frac{3x^2+e^x\cos x-\sqrt{1+2x}}{5\operatorname{sen}(x^2)-x\ln(1+2x)} \overset{H}{=} \lim_{x\to 0}\frac{6x+e^x\cos x-e^x\operatorname{sen} x-\frac{1}{\sqrt{1+2x}}}{10x\cos(x^2)-\ln(1+2x)-\frac{2x}{1+2x}} = \left[\frac{0}{0}\right] \\ &\overset{H}{=} \lim_{x\to 0}\frac{6+e^x\cos x-2e^x\operatorname{sen} x-e^x\cos x+\frac{1}{\sqrt{(1+2x)^3}}}{10\cos(x^2)-20x^2\operatorname{sen}(x^2)-\frac{2}{1+2x}-\frac{2}{(1+2x)^2}} = \frac{6+1-0-1+1}{10-0-2-2} = \frac{7}{6}. \end{aligned}$$

Per de l'Hôpital il limite cercato è $\frac{7}{6}$.

3 a) Il dominio è dato dagli $x \in \mathbb{R}$ per cui $2x+1 \neq 0$, ovvero $\mathcal{D} = \mathbb{R} \setminus \{-1/2\}$. La funzione (razionale) è ivi continua e derivabile.

b) Ha senso andare a studiare i limiti in $-1/2$ e a $\pm\infty$. Si osservi che il numeratore è sempre positivo, dunque g è positiva se $x > -1/2$, negativa se $x < -1/2$. Utilizzando anche queste informazioni si ottiene

$$\lim_{x\to\pm\infty} g(x) = \lim_{x\to\pm\infty} \left(x\, \frac{1+2/x^2}{2+1/x} \right) = \left[\pm\infty \cdot \frac{1}{2} \right] = \pm\infty, \qquad \lim_{x\to -1/2^{\pm}} g(x) = \left[\frac{9/4}{0^{\pm}} \right] = \pm\infty,$$

quindi la funzione non ammette massimo né minimo.

c) La derivata prima è

$$g'(x) = \frac{2x(2x+1) - (x^2+2)2}{(2x+1)^2} = \frac{2(x^2+x-2)}{(2x+1)^2}.$$

Poiché il denominatore è sempre positivo nel dominio, la derivata prima è positiva se e solo se $x^2+x-2 \geq 0$ cioè se e solo se $x \leq -2$ oppure $x \geq 1$. Più precisamente

$$g'(x) = \begin{cases} > 0, & \text{se } x \in]-\infty, -2[\cup]1, +\infty[, \\ = 0, & \text{se } x = -2 \text{ oppure } x = 1, \\ < 0, & \text{se } x \in]-2, -1/2[\cup]-1/2, 1[. \end{cases}$$

La funzione è dunque crescente in $]-\infty, -2[$ e in $]1, +\infty[$, decrescente in $]-2, -1/2[$ e in $]-1/2, 1[$. I punti $x = -2$ e $x = 1$ sono rispettivamente punti di massimo e minimo relativo.

d) La derivata seconda è

$$g'(x) = 2\frac{(2x+1)(2x+1)^2 - (x^2+x-2)2(2x+1)2}{(2x+1)^4} = 2\frac{(2x+1)^2 - (x^2+x-2)4}{(2x+1)^3} = \frac{18}{(2x+1)^3}.$$

La derivata seconda è positiva se e solo se $(2x+1)^3 > 0$ cioè se e solo se $2x+1 > 0$ ovvero $x > -1/2$. Dunque

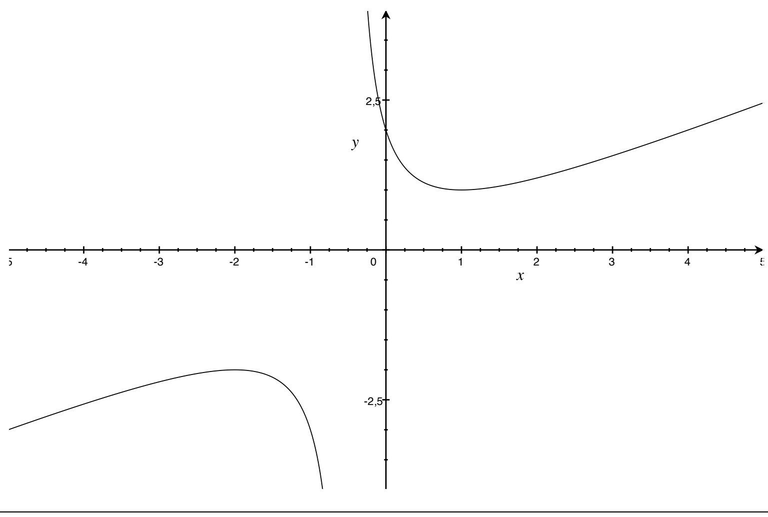
$$g''(x) = \begin{cases} < 0, & \text{se } x \in]-\infty, -1/2[, \\ > 0, & \text{se } x \in]-1/2, +\infty[. \end{cases}$$

La funzione è dunque concava in $]-\infty, -1/2[$, convessa in $]-1/2, +\infty[$.

e) L'equazione della retta tangente al grafico nel generico punto $(x_0, g(x_0))$ è

$$y = (x - x_0)g'(x_0) + g(x_0).$$

Poiché $g(0) = 2$ e $g'(0) = -4$, l'equazione della retta cercata è $y = -4x + 2$.



Esercitazioni del 14 dicembre 2010

1 Data la funzione

$$g(x) = \frac{2x^2 - 2x + 5}{(x-1)^2}$$

a) determinare il dominio;
b) studiare il segno di g;
c) calcolare i limiti agli estremi del dominio;
d) determinare gli intervalli dove la funzione è crescente e quelli dove la funzione è decrescente, gli eventuali punti di massimo/minimo relativo e/o assoluto;
e) calcolare l'equazione della retta tangente al grafico nel punto di ascissa $x_0 = 2$;
f) determinare gli intervalli dove la funzione è concava e quelli dove la funzione è convessa;
g) tracciare l'andamento qualitativo del grafico di g.

2 Data la funzione

$$g(x) = x\mathrm{e}^{-x^2}$$

a) determinare il dominio;
b) studiare il segno di g;
c) calcolare i limiti di g negli eventuali punti di discontinuità e agli estremi del dominio;
d) determinare gli intervalli dove la funzione è crescente e quelli dove la funzione è decrescente, gli eventuali punti di massimo/minimo relativo e/o assoluto;
e) studiare gli eventuali asintoti di g;
f) determinare gli intervalli dove la funzione è concava e quelli dove la funzione è convessa;
g) tracciare l'andamento qualitativo del grafico di g.

Soluzioni degli esercizi del 14 dicembre 2010

1 a) Il dominio è dato dagli $x \in \mathbb{R}$ per cui $(x-1)^2 \neq 0$, ovvero $\mathcal{D} = \mathbb{R} \setminus \{1\}$. La funzione (razionale) è ivi continua e derivabile.

b) Il numeratore è ≥ 0 se e solo se $2x^2 - 2x + 5 > 0$, disuguaglianza sempre vera. Il denominatore è positivo nel dominio. Allora la funzione è sempre positiva.

c) Ha senso andare a studiare i limiti in 1 e a $\pm\infty$. Utilizzando anche il punto b) si ottiene

$$\lim_{x\to\pm\infty} g(x) = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{2 - 2x + 5/x^2}{(1-1/x)^2} = 2, \qquad \lim_{x\to 1^\pm} g(x) = \left[\frac{5}{0^+}\right] = +\infty,$$

quindi la funzione non ammette massimo.

d) La derivata prima è

$$\begin{aligned} g'(x) &= \frac{(4x-2)(x-1)^2 - (2x^2 - 2x + 5)2(x-1)}{(x-1)^4} \\ &= \frac{(4x-2)(x-1) - (2x^2-2x+5)2}{(x-1)^3} = \frac{-2x-8}{(x-1)^3}. \end{aligned}$$

Il numeratore è ≥ 0 se e solo se $x \leq -4$, il denominatore è positivo se $x > 1$, quindi

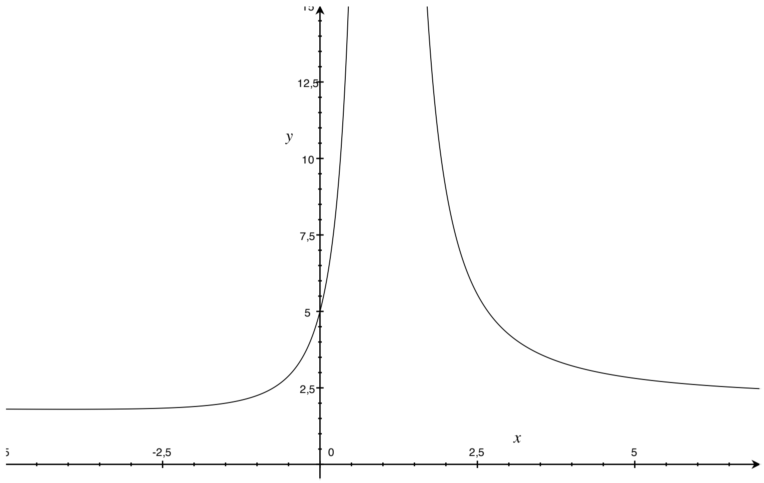
$$g'(x) = \begin{cases} > 0, & \text{se } x \in]-4, 1[, \\ = 0, & \text{se } x = -4, \\ < 0, & \text{se } x \in]-\infty, -4[\cup]1, +\infty[. \end{cases}$$

La funzione è dunque crescente in $]-4, -1[$, decrescente in $]-\infty, -4[$ e in $]1, +\infty[$. Per $x = -4$ ammette un punto di minimo relativo ed assoluto.

e) L'equazione della retta tangente al grafico nel generico punto $(x_0, g(x_0))$ è

$$y = (x - x_0)g'(x_0) + g(x_0).$$

Poiché $g(2) = 9$ e $g'(2) = -12$, l'equazione della retta cercata è $y = -12(x - 2) + 9$.



f) La derivata seconda è

$$g''(x) = \frac{-2(x-1)^3 - (-2x-8)3(x-1)^2}{(x-1)^6} = \frac{-2(x-1) - (-2x-8)3}{(x-1)^4} = \frac{4x+26}{(x-1)^4}.$$

Si ha che $g''(x) > 0$ se e solo se $4x + 26 > 0$ ovvero se $x > -13/2$, quindi

$$g''(x) = \begin{cases} > 0, & \text{se } x \in]-13/2, 1[\cup]1, +\infty[, \\ = 0, & \text{se } x = -13/2, \\ < 0, & \text{se } x \in]-\infty, -13/2[. \end{cases}$$

La funzione è dunque convessa in $]-13/2, 1[$ e in $]1, +\infty[$, mentre è concava in $]-\infty, -13/2[$. Per $x = -13/2$ ammette un punto di flesso.

$\boxed{2}$ a) Il dominio è chiaramente $\mathcal{D} = \mathbb{R}$ e la funzione è continua e derivabile. Si noti che è una funzione pari.

b) L'esponenziale è una funzione strettamente positiva per cui $g(x) \geq 0$ se e solo se $x \geq 0$.

c) Ha senso calcolare solo i limiti a $\pm\infty$. Si ha

$$\lim_{x \to \pm\infty} g(x) = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{x}{e^{x^2}} = \left[\frac{\pm\infty}{+\infty}\right] \stackrel{H}{=} \lim_{x \to \pm\infty} \frac{1}{2xe^{x^2}} = \left[\frac{1}{\pm\infty}\right] = 0.$$

d) La derivata prima è

$$g'(x) = e^{-x^2} + x\big(e^{-x^2}(-2x)\big) = (1 - 2x^2)e^{-x^2}.$$

Si ha $g'(x) \geq 0$ se e solo se $1 - 2x^2 \geq 0$ ovvero $-1/\sqrt{2} \leq x \leq 1/\sqrt{2}$. Si ottiene

$$g'(x) \begin{cases} < 0, & \text{se } x \in]-\infty, -1/\sqrt{2}[\cup]1/\sqrt{2}, +\infty[, \\ = 0, & \text{se } x = -1/\sqrt{2} \text{ oppure } x = 1/\sqrt{2} \\ > 0, & \text{se } x \in]-1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2}[, \end{cases}$$

quindi la funzione è crescente in $]-1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2}[$, decrescente in $]-\infty, -1/\sqrt{2}[$ e in $]1/\sqrt{2}, +\infty[$. Per $x = -1/\sqrt{2}$ e $x = 1/\sqrt{2}$ ammette rispettivamente un minimo ed un massimo assoluto.

e) Poiché $\lim_{x\to\pm\infty} g(x) = 0$ la retta $y = 0$ è asintoto orizzontale a $-\infty$ e a $+\infty$.

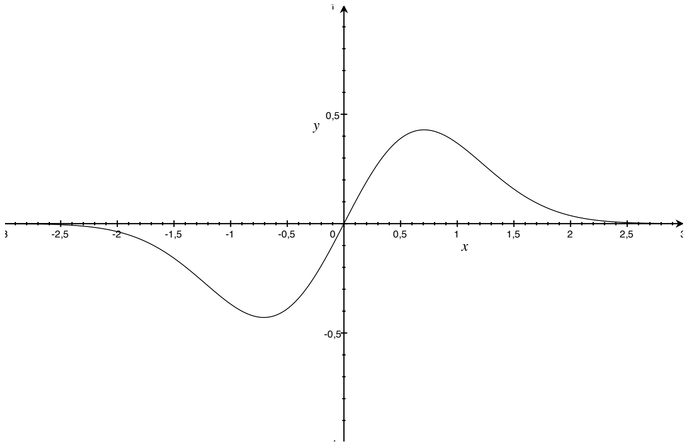
f) La derivata seconda è

$$g''(x) = -4x\mathrm{e}^{-x^2} + (1 - 2x^2)\big(\mathrm{e}^{-x^2}(-2x)\big) = 2x(3 - 2x^2)\mathrm{e}^{-x^2},$$

per cui $g''(x) \geq 0$ se e solo se $x(3 - 2x^2) \geq 0$. Si ottiene

$$g''(x) \begin{cases} > 0, & \text{se } x \in]-\sqrt{3/2}, 0[\cup]\sqrt{3/2}, +\infty[, \\ = 0, & \text{se } x = -\sqrt{3/2} \text{ oppure } x = 0 \text{ oppure } x = \sqrt{3/2}, \\ < 0, & \text{se } x \in]-\infty, -\sqrt{3/2}[\cup]0, \sqrt{3/2}[. \end{cases}$$

In conclusione la funzione è concava in $]-\infty, -\sqrt{3/2}[$ e in $]0, \sqrt{3/2}[$, convessa in $]-\infty, -\sqrt{3/2}[$ e in $]\sqrt{3/2}, +\infty[$. Per $x = -\sqrt{3/2}$, $x = 0$ e $x = \sqrt{3/2}$ la funzione ammette dei flessi.



Esercitazioni del 21 dicembre 2010

$\boxed{1}$ Per l'equazione differenziale

$$y' = \frac{3t^2 + 1}{y^4}$$

verificare se le seguenti funzioni sono soluzioni in $\mathbb{R}^+$:

$$\textbf{a)}\ \ y_1(t) = t^3 + t, \qquad \textbf{b)}\ \ y_2(t) = \sqrt[5]{5t^3 + 5t + 1},$$

$\boxed{2}$ Verificare che la funzione $y(t) = -t\mathrm{e}^{-2t}$ è soluzione dell'equazione differenziale

$$y'' + 3y' + 2y - \mathrm{e}^{-2t} = 0.$$

Di quale tipo di equazione si tratta?

3 Trovare la soluzione del problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' = -2y + 3 \\ y(1) = 4. \end{cases}$$

4 Data la funzione

$$g(x) = \frac{x^2}{\ln x}$$

a) determinare il dominio;
b) studiare il segno di g;
c) calcolare i limiti agli estremi del dominio;
d) trovare gli eventuali asintoti;
e) determinare gli intervalli dove la funzione è crescente e quelli dove la funzione è decrescente, gli eventuali punti di massimo/minimo relativo e/o assoluto;
f) determinare gli intervalli dove la funzione è concava e quelli dove la funzione è convessa;
g) tracciare l'andamento qualitativo del grafico di g.

Soluzioni degli esercizi del 21 dicembre 2010

1 a) La funzione $y_1(t)$ è definita e derivabile in $\mathbb{R}^+$ ed è soluzione dell'equazione se verifica $y_1'(t) = \frac{3t^2+1}{y_1^4(t)}$ per ogni $t > 0$. Essendo $y_1'(t) = 3t^2 + 1$, ciò accade se e solo se

$$3t^2 + 1 = \frac{3t^2 + 1}{t^3 + t},$$

per ogni $t > 0$. Si osserva che sostituendo (ad esempio) $t = 1$ si ottiene $4 \neq 2$ quindi y_1 non è soluzione dell'equazione.

b) La funzione $y_2(t)$ è definita e derivabile in $\mathbb{R}^+$ ed è soluzione dell'equazione se verifica $y_2'(t) = \frac{3t^2+1}{y_2^4(t)}$ per ogni $t > 0$. Poiché

$$y_2'(t) = \left((5t^3 + 5t + 1)^{1/5}\right)' = \frac{1}{5}(5t^3 + 5t + 1)^{-4/5}(15t^2 + 5) = \frac{3t^2 + 1}{(\sqrt[5]{5t^3 + 5t + 1})^4},$$

$$\frac{3t^2 + 1}{y_2^4(t)} = \frac{3t^2 + 1}{(\sqrt[5]{5t^3 + 5t + 1})^4},$$

in conclusione si ha che $y_2'(t) = \frac{3t^2+1}{y_2^4(t)}$ per ogni $t \in \mathbb{R}^+$, dunque y_2 è soluzione.

2 a) Si tratta di un'equazione differenziale lineare di ordine 2. Derivando si ottiene

$$y'(t) = -\mathrm{e}^{-2t} - t\mathrm{e}^{-2t}(-2) = (2t-1)\mathrm{e}^{-2t}, \qquad y''(t) = 2\mathrm{e}^{-2t} + (2t-1)\mathrm{e}^{-2t}(-2) = (4-4t)\mathrm{e}^{-2t},$$

e sostituendo nell'equazione si ha

$$y''(t) + 3y'(t) + 2y(t) - \mathrm{e}^{-2t} = (4 - 4t)\mathrm{e}^{-2t} + 3(2t - 1)\mathrm{e}^{-2t} - 2t\mathrm{e}^{-2t} - \mathrm{e}^{-2t} = 0$$

per ogni $t \in \mathbb{R}$, dunque y è soluzione.

3 La soluzione generale dell'equazione $y' = -2y+3$ è $y(t) = c\mathrm{e}^{-2t} + \frac{3}{2}$ con $c \in \mathbb{R}$. Imponendo la condizione iniziale si ottiene l'equazione $4 = c\mathrm{e}^{-2} + \frac{3}{2}$ che ha soluzione $c = \frac{5}{2}\mathrm{e}^2$. La soluzione del problema di Cauchy è dunque

$$y(t) = \frac{5}{2}\mathrm{e}^2\mathrm{e}^{-2t} + \frac{3}{2} = \frac{5}{2}\mathrm{e}^{2(1-t)} + \frac{3}{2}.$$

4 a) Le condizioni d'esistenza sono $x > 0$ (esistenza del ln) e $\ln x \neq 0$ (denominatore diverso da 0). Il dominio è quindi $\mathcal{D} =]0,1[\cup]1,+\infty[$. La funzione è ivi continua e derivabile.

b) Il denominatore è strettamente positivo nel dominio, dunque g è positiva se e solo se $\ln x > 0$ cioè $x > 1$, mentre è negativa per $x \in]0,1[$.

c) Ha senso calcolare i limiti in $x = 0$, $x = 1$ e a $+\infty$. Si ha

$$\lim_{x\to1^\pm} \frac{x^2}{\ln x} = \left[\frac{1}{0^\pm}\right] = \pm\infty, \qquad \lim_{x\to0^+} \frac{x^2}{\ln x} = \left[\frac{0}{-\infty}\right] = 0,$$

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{x^2}{\ln x} = \left[\frac{+\infty}{+\infty}\right] \overset{H}{=} \lim_{x\to+\infty} \frac{2x}{1/x} = +\infty,$$

perciò g non ammette massimo né minimo assoluti.

d) Dal punto c) segue che la retta $x = 1$ è asintoto verticale. Essendo inoltre

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{g(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x}{\ln x} = \left[\frac{+\infty}{+\infty}\right] \overset{H}{=} \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{1/x} = +\infty,$$

non ci sono asintoti obliqui a $+\infty$.

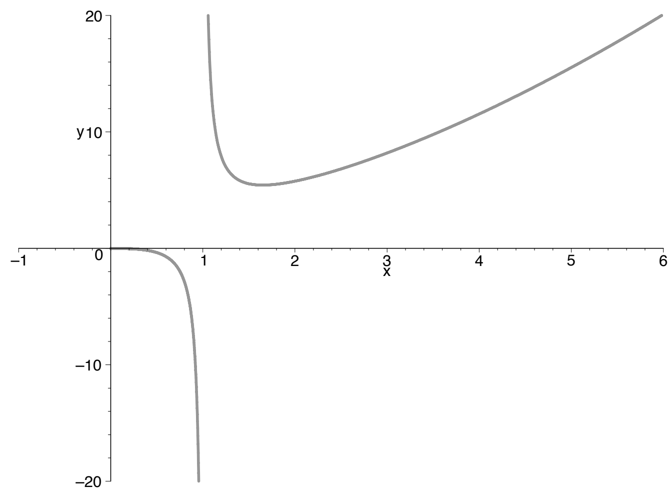
e) La derivata prima è

$$g'(x) = \frac{2x\ln x - x^2\frac{1}{x}}{\ln^2 x} = \frac{x(2\ln x - 1)}{\ln^2 x}.$$

Restringendoci al dominio, si ha che $g'(x) \geq 0$ se e solo se $2\ln x - 1 \geq 0$, ovvero $x \geq \mathrm{e}^{1/2}$. Quindi

$$g'(x) \begin{cases} > 0, & \text{se } x \in]\mathrm{e}^{1/2}, +\infty[, \\ = 0, & \text{se } x = \mathrm{e}^{1/2}, \\ < 0, & \text{se } x \in]0,1[\cup]1,\mathrm{e}^{1/2}[. \end{cases}$$

La funzione è quindi crescente in $]\mathrm{e}^{1/2}, +\infty[$, decrescente in $]0,1[$ e in $]1,\mathrm{e}^{1/2}[$. In $x = \mathrm{e}^{1/2}$ ammette un minimo relativo.



f) La derivata seconda è

$$g''(x) = \frac{((2\ln x - 1) + x\frac{2}{x})\ln^2 x - (2x\ln x - x)\frac{2\ln x}{x}}{\ln^4 x} = \frac{2\ln^2 x - 3\ln x + 2}{\ln^3 x}.$$

Poiché $2t^2 - 3t + 2 > 0$ per ogni t, si ha che il numeratore è sempre positivo, quindi $g''(x) > 0$ se e solo se $\ln^3 x > 0$ cioè $x > 1$. In definitiva la funzione è concava in $]0, 1[$, mentre è convessa in $]1, +\infty[$.

Esercitazioni del 11 gennaio 2011

$\boxed{\mathbf{1}}$ Calcolare i seguenti integrali

$$\int (4x^5 - 3x + 8x^7)\,dx, \qquad \int \left(2\cos x - \frac{3}{\sqrt{1-x^2}} - 5^x\right) dx, \qquad \int \left(\sqrt{x} - \frac{1}{\sqrt{x}}\right)^2 dx,$$

$$\int \frac{3-5x}{1+x^2}\,dx, \qquad \int \cos^3 x \,\mathrm{sen}\, x\,dx, \qquad \int 3x\sqrt{x^2+1}\,dx, \qquad \int \frac{\ln^2 x}{x}\,dx.$$

$\boxed{\mathbf{2}}$ Data l'equazione differenziale

$$y' = \frac{\mathrm{e}^t - 2t}{y^4}$$

dire se la funzione $y(t) = 3t + 1$ è soluzione dell'equazione in $]0, +\infty[$;

$\boxed{\mathbf{3}}$ Dato il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' = 2y + 5 \\ y(0) = 1 \end{cases} \qquad t \in \mathbb{R}$$

a) dire se la funzione $y(t) = -\frac{5}{2}$ è soluzione del problema;

b) determinare la soluzione del problema, qualora non lo sia la funzione di cui al punto a).

Soluzioni degli esercizi del 11 gennaio 2011

$\boxed{\mathbf{1}}$ Per la proprietà di linearità e consultando la prima tabella si ottiene

$$\int (4x^5 - 3x + 8x^7)\,dx = 4\int x^5\,dx - 3\int x\,dx + 8\int x^7\,dx = 4\frac{x^6}{6} - 3\frac{x^2}{2} + 8\frac{x^8}{8} + c,$$

$$\begin{aligned}\int \left(2\cos x - \frac{3}{\sqrt{1-x^2}} - 5^x\right) dx &= 2\int \cos x\,dx - 3\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx - \int 5^x\,dx \\ &= 2\,\mathrm{sen}\, x - 3\,\mathrm{arcsen}\, x - \frac{5^x}{\ln 5} + c,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\int \left(\sqrt{x} - \frac{1}{\sqrt{x}}\right)^2 dx &= \int \left(x - 2 + \frac{1}{x}\right) dx = \int x\,dx - \int 2\,dx + \int \frac{1}{x}\,dx \\ &= \frac{x^2}{2} - 2x + \ln|x| + c.\end{aligned}$$

Utilizzando anche la seconda tabella si ha

$$\int \frac{3-5x}{1+x^2}\,dx = 3\int \frac{1}{1+x^2}\,dx - \frac{5}{2}\int \frac{2x}{1+x^2}\,dx$$
$$= 3\operatorname{arctg} x - \frac{5}{2}\int \frac{(1+x^2)'}{1+x^2}\,dx = 3\operatorname{arctg} x - \frac{5}{2}\ln(1+x^2) + c,$$

$$\int \cos^3 x \operatorname{sen} x\,dx = -\int \cos^3 x\,(\cos x)'\,dx = -\frac{\cos^4 x}{4} + c,$$

$$\int 3x\sqrt{x^2+1}\,dx = \frac{3}{2}\int 2x\sqrt{x^2+1}\,dx = \frac{3}{2}\int (x^2+1)'(x^2+1)^{1/2}\,dx$$
$$= \frac{3}{2}\frac{(x^2+1)^{3/2}}{3/2} + c = \sqrt{(x^2+1)^3} + c,$$

$$\int \frac{\ln^2 x}{x}\,dx = \int (\ln x)^2(\ln x)'\,dx = \frac{(\ln x)^3}{3} + c.$$

2 Si ha $y'(t) = 3$ e sostituendo si ottiene l'equazione

$$3 = \frac{\mathrm{e}^t - 2t}{(3t+1)^4}$$

che non è identicamente vera per $t > 0$ (ad esempio, per $t = 1$ si ottiene $3 \neq \frac{\mathrm{e}-2}{4^4} < 1$). La funzione non è dunque soluzione.

3 a) Si ha $y'(t) = 0$ e sostituendo si ottiene

$$0 = 2\Big(-\frac{5}{2}\Big) + 5$$

che è identicamente soddisfatta per $t \in \mathbb{R}$. La funzione è dunque soluzione della prima equazione. Tuttavia $y(0) \neq 1$ perciò non verifica le condizioni iniziali, quindi non è soluzione del problema di Cauchy.

b) Si ricorda che la soluzione generale dell'equazione lineare a coefficienti costanti

$$y' = ay + b$$

con $a, b \in \mathbb{R}$, è

$$y(t) = c\mathrm{e}^{at} - \frac{b}{a}$$

al variare di $c \in \mathbb{R}$. Nel caso in considerazione si trova $y(t) = c\mathrm{e}^{2t} - \frac{5}{2}$. Imponendo la condizione iniziale si ottiene l'equazione $1 = c - \frac{5}{2}$ da cui $c = \frac{7}{2}$. La soluzione del problema di Cauchy è dunque

$$y(t) = \frac{7}{2}\mathrm{e}^{2t} - \frac{5}{2}.$$

Esercitazioni del 20 gennaio 2011

$\boxed{\mathbf{1}}$ Calcolare i seguenti integrali definiti

$$\int_{-2}^{1} (4x^3 + 2x^2 - 1)\, dx, \qquad \int_0^2 \frac{1-3x}{4+x^2}\, dx.$$

$\boxed{\mathbf{2}}$ Calcolare i seguenti integrali mediante il metodo di integrazione per parti

$$\int (x - 3x^2)\mathrm{e}^{3x}\, dx, \qquad \int_1^{\mathrm{e}} x^2 \ln x\, dx, \qquad \int \mathrm{e}^{-x}\cos(3x)\, dx.$$

$\boxed{\mathbf{3}}$ Determinare la soluzione del problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' = 3y + t \\ y(0) = 1 \end{cases} \qquad t \in \mathbb{R}.$$

$\boxed{\mathbf{4}}$ Determinare la soluzione del problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' = \dfrac{\sqrt{7+y^2}}{yt} \\ y(\mathrm{e}) = 3 \end{cases} \qquad t > 1.$$

$\boxed{\mathbf{5}}$ Determinare la soluzione del problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' = \dfrac{y - t^4 \operatorname{sen} y}{\mathrm{e}^y + t^2} \\ y(0) = 0 \end{cases} \qquad t \in \mathbb{R}.$$

Soluzioni degli esercizi del 20 gennaio 2011

$\boxed{\mathbf{1}}$ Per il teorema fondamentale del calcolo si ha

$$\int_{-2}^{1} (4x^3 + 2x^2 - 1)\, dx = \Big[x^4 + \frac{2}{3}x^3 - x\Big]_{-2}^{1} = \Big(1 + \frac{2}{3} - 1\Big) - \Big(16 - \frac{16}{3} + 2\Big) = -12.$$

Relativamente al secondo integrale, utilizzando la seconda tabella si ottiene

$$\int \frac{1-3x}{4+x^2}\, dx = \int \frac{1}{4+x^2}\, dx - \frac{3}{2}\int \frac{(4+x^2)'}{4+x^2}\, dx = \frac{1}{2}\operatorname{arctg}(x/2) - \frac{3}{2}\ln(4+x^2) + c,$$

dunque $\frac{1}{2}\operatorname{arctg}(x/2) - \frac{3}{2}\ln(4+x^2)$ è una primitiva della funzione integranda e, sempre per il teorema fondamentale del calcolo si ha

$$\int_0^2 \frac{1-3x}{4+x^2}\, dx = \Big[\frac{1}{2}\operatorname{arctg}(x/2) - \frac{3}{2}\ln(4+x^2)\Big]_0^2 = \big(\frac{1}{2}\frac{\pi}{4} - \frac{3}{2}\ln 8\big) - \big(0 - \frac{3}{2}\ln 4\big) = \frac{\pi - 12\ln 2}{8}.$$

2 Poiché $H(x) = \mathrm{e}^{3x}/3$ è una primitiva della funzione $h(x) = \mathrm{e}^{3x}$, mediante il metodo per parti si ottiene

$$\begin{aligned}\int (x-3x^2)\mathrm{e}^{3x}\,dx &= (x-3x^2)\frac{\mathrm{e}^{3x}}{3} - \int (1-6x)\frac{\mathrm{e}^{3x}}{3}\,dx\\ &= (x-3x^2)\frac{\mathrm{e}^{3x}}{3} - \Big((1-6x)\frac{\mathrm{e}^{3x}}{9} - \int (-6)\frac{\mathrm{e}^{3x}}{9}\,dx\Big)\\ &= (x-3x^2)\frac{\mathrm{e}^{3x}}{3} - (1-6x)\frac{\mathrm{e}^{3x}}{9} - \frac{6}{27}\mathrm{e}^{3x} + c = \Big(-x^2+x-\frac{1}{3}\Big)\mathrm{e}^{3x} + c.\end{aligned}$$

Il secondo integrale

$$\int_1^{\mathrm{e}} x^2 \ln x\,dx = \Big[\frac{x^3}{3}\ln x\Big]_1^{\mathrm{e}} - \int_1^{\mathrm{e}} \frac{x^3}{3}\,\frac{1}{x}\,dx = \frac{\mathrm{e}^3}{3} - \int_1^{\mathrm{e}} \frac{x^2}{3}\,dx = \frac{\mathrm{e}^3}{3} - \Big[\frac{x^3}{9}\Big]_1^{\mathrm{e}} = \frac{\mathrm{e}^3+1}{9}.$$

Poiché $H(x) = -\mathrm{e}^{-x}$ è una primitiva della funzione $h(x) = \mathrm{e}^{-x}$, applicando due volte il metodo per parti al terzo integrale si ottiene

$$\begin{aligned}\int \mathrm{e}^{-x}\cos(3x)\,dx &= -\mathrm{e}^{-x}\cos(3x) - \int (-\mathrm{e}^{-x})(-\operatorname{sen}(3x)\cdot 3)\,dx\\ &= -\mathrm{e}^{-x}\cos(3x) - 3\int \mathrm{e}^{-x}\operatorname{sen}(3x)\,dx\\ &= -\mathrm{e}^{-x}\cos(3x) - 3\Big(-\mathrm{e}^{-x}\operatorname{sen}(3x) - \int (-\mathrm{e}^{-x})\cos(3x)3\,dx\Big)\\ &= -\mathrm{e}^{-x}\cos(3x) + 3\mathrm{e}^{-x}\operatorname{sen}(3x) - 9\int \mathrm{e}^{-x}\cos(3x)\,dx.\end{aligned}$$

L'integrale cercato $I := \int \mathrm{e}^{-x}\cos(3x)\,dx$ è quindi soluzione dell'equazione

$$I = -\mathrm{e}^{-x}\cos(3x) + 3\mathrm{e}^{-x}\operatorname{sen}(3x) - 9I \quad\Longrightarrow\quad I = \frac{1}{10}\mathrm{e}^{-x}\big(3\operatorname{sen}(3x) - \cos(3x)\big) + c.$$

3 Si ricorda che la soluzione generale dell'equazione lineare $y' = a(t)y + b(t)$ con $a(t), b(t)$ funzioni continue, è

$$y(t) = \mathrm{e}^{A(t)}\int \mathrm{e}^{-A(t)}b(t)\,dt$$

dove $A(t)$ è una primitiva di $a(t)$. Nel nostro caso $a(t) = 3$ e una sua primitiva è ad esempio $A(t) = 3t$. La soluzione generale è dunque

$$y(t) = \mathrm{e}^{3t}\int \mathrm{e}^{-3t}t\,dt.$$

Applicando il metodo per parti si calcola

$$\int \mathrm{e}^{-3t}t\,dt = \frac{\mathrm{e}^{-3t}}{-3}t - \int \frac{\mathrm{e}^{-3t}}{-3}\,dt = -\frac{\mathrm{e}^{-3t}}{3}t - \frac{\mathrm{e}^{-3t}}{9} + c,$$

con c generica costante d'integrazione, perciò

$$y(t) = \mathrm{e}^{3t}\Big(-\frac{\mathrm{e}^{-3t}}{3}t - \frac{\mathrm{e}^{-3t}}{9} + c\Big) = -\frac{t}{3} - \frac{1}{9} + c\,\mathrm{e}^{3t}.$$

Imponendo ora la condizione iniziale $y(0) = 1$, si ottiene l'equazione $1 = -\frac{1}{9} + c$ quindi $c = 10/9$ e la soluzione del problema di Cauchy assegnato è data da $y(t) = -\frac{t}{3} - \frac{1}{9} + \frac{10}{9}\mathrm{e}^{3t}$.

$\boxed{\mathbf{4}}$ Scrivendo $y' = \frac{dy}{dt}$ e utilizzando il metodo di separazione delle variabili si ha

$$\frac{y}{\sqrt{7+y^2}}\,dy = \frac{1}{t}\,dt$$

e integrando, ricordando che $t > 1$, si ottiene

$$\int \frac{y}{\sqrt{7+y^2}}\,dy = \int \frac{1}{t}\,dt \qquad \Longrightarrow \qquad \sqrt{7+y^2} = \ln t + c \tag{1}$$

dove c è la generica costante d'integrazione. Affinché l'equazione abbia senso il secondo membro dovrà essere ≥ 0 per ogni $t > 1$, il che accade se e solo se $c \geq 0$. Risolvendo allora l'ultima equazione nell'incognita y si ottiene

$$7 + y^2 = (\ln t + c)^2 \qquad \Longrightarrow \qquad y^2 = (\ln t + c)^2 - 7.$$

Affinché l'equazione abbia senso il secondo membro dovrà essere ≥ 0 per ogni $t > 1$, il che accade se e solo se $c \geq \sqrt{7}$. Osservando che per la condizione iniziale $y(\mathrm{e}) = 3$ si deduce che y dovrà essere positiva in un intorno di $y_0 = \mathrm{e}$, si ottiene infine la soluzione generale

$$y = y(t) = \sqrt{(\ln t + c)^2 - 7}, \qquad c \geq \sqrt{7}$$

Imponendo ora la condizione $y(\mathrm{e}) = 3$ in (1) (oppure in quest'ultima equazione, con la condizione $c \geq \sqrt{7}$) si ottiene $\sqrt{7+9} = \ln \mathrm{e} + c$ da cui $c = 3$. La soluzione è quindi

$$y(t) = \sqrt{(\ln t + 3)^2 - 7} = \sqrt{\ln^2 t + 6\ln t + 2}.$$

Alternativamente, si poteva utilizzare direttamente la formula risolutiva per le equazioni a variabili separabili (insieme alla formula fondamentale del calcolo integrale)

$$\int_3^y \frac{z}{\sqrt{7+z^2}}\,dz = \int_{\mathrm{e}}^t \frac{1}{s}\,ds \quad \Longrightarrow \quad \left[\sqrt{7+z^2}\right]_3^y = [\ln s]_{\mathrm{e}}^t \quad \Longrightarrow \quad \sqrt{7+y^2} - 4 = \ln t - 1$$

che risolta rispetto a y fornisce la soluzione cercata.

$\boxed{\mathbf{5}}$ La funzione $f(t,y) = \frac{y - t^4 \operatorname{sen} y}{\mathrm{e}^y + t^2}$ è definita per ogni t, y e derivabile rispetto a y e t dunque l'equazione differenziale ammette un'unica soluzione. Si osservi che la funzione nulla $y(t) \equiv 0$ per ogni t, è soluzione dell'equazione e verifica le condizioni iniziali, dunque è la soluzione cercata.