Facoltà di Agraria

Corsi di Laurea in VIT e STAL
Modulo di Matematica
Esame del 03/02/2011
A.A. 2010/2011

Scritto		Voto
Teoria	Esercizi	

Istruzioni: apporre nome, cognome e numero di matricola su ogni foglio. Prima della consegna indicare nell'apposito spazio il numero totale di fogli di cui è composto l'elaborato. Svolgere solamente uno tra 10-b) e 11. Allegare lo svolgimento completo degli esercizi 9, 10 e 11. **Non è ammesso l'uso di libri, appunti e calcolatrici grafiche o programmabili.**

Cognome	Nome
Corso di Laurea $\boxed{VIT}$ $\boxed{STAL}$	Matricola
Vecchio ordinamento $\boxed{SI}$ $\boxed{NO}$	n. fogli allegati

1 Se $\lim_{x\to x_0} f(x) = +\infty$ e $\lim_{x\to x_0} g(x) = 0^-$, allora $\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)}$ è

- A $-\infty$
- B $+\infty$
- C 0
- D non ci sono elementi sufficienti per rispondere

2 Se f è una funzione derivabile due volte in $]a,b[$ e vale $f'(x) > 0$ e $f''(x) < 0$ in $]a,b[$, allora

- A f è decrescente e concava in $]a,b[$
- B f è crescente e convessa in $]a,b[$
- C f è decrescente e convessa in $]a,b[$
- D f è crescente e concava in $]a,b[$

3 L'equazione differenziale $y'' = (y+t)^2 - 5ty'$ è

- A un'equazione lineare del primo ordine
- B un'equazione lineare del secondo ordine
- C un'equazione non lineare del primo ordine
- D un'equazione non lineare del secondo ordine

4 Il grafico della funzione $f(x) = \dfrac{2^x+1}{2^x+5}$ rappresenta

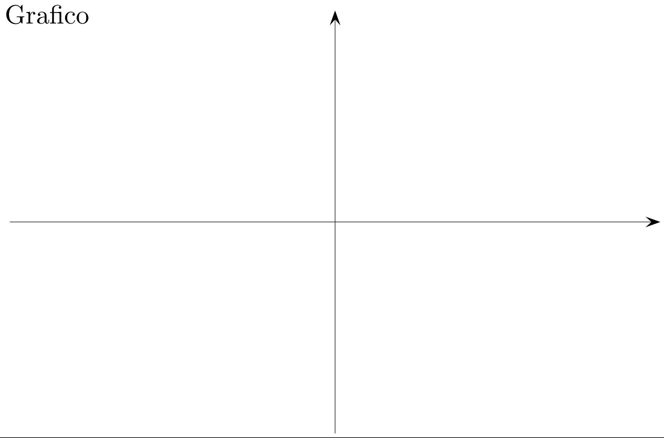
- A una retta
- B una parabola
- C un'iperbole
- D nessuna delle precedenti

5 Per la funzione $f(x) = \log_{5/3} x$, scrivere il dominio $\mathcal{D}$, l'immagine $\mathcal{I}$, e rappresentare qualitativamente il grafico.

$\mathcal{D} =$

$\mathcal{I} =$

Grafico



6 Per definizione, la derivata di una funzione $f(x)$ in x_0 è:

7 Enunciare il teorema fondamentale del calcolo integrale

8 Rappresentare il grafico di una funzione g che verifichi contemporaneamente le seguenti proprietà:

$$\lim_{x\to-\infty} g(x) = -3 \qquad \lim_{x\to1^-} g(x) = 2 \qquad \lim_{x\to1^+} g(x) = +\infty \qquad \lim_{x\to+\infty} g(x) = -\infty$$

9 Data la funzione

$$g(x) = \frac{x^3 + 9x^2}{x - 3}$$

a) determinare il dominio $\mathcal{D}$, b) studiare il segno di g; c) calcolare i limiti agli estremi del dominio; d) determinare gli intervalli in cui la funzione è crescente, quelli in cui è decrescente, e gli eventuali punti di massimo/minimo relativo; e) determinare gli eventuali asintoti; f) determinare l'equazione della retta tangente al grafico nel punto di ascissa $x_0 = 1$; g) disegnare un grafico approssimativo di g.

10 Dato il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' = \dfrac{2t^2}{4^y\sqrt{t^3+1}} \\ y(0) = 0 \end{cases}$$

a) dire se la funzione $y(t) = \log_4(t^3 + 1)$ è soluzione del problema;

b) determinare una soluzione del problema nel caso in cui non lo sia la funzione di cui al punto precedente.

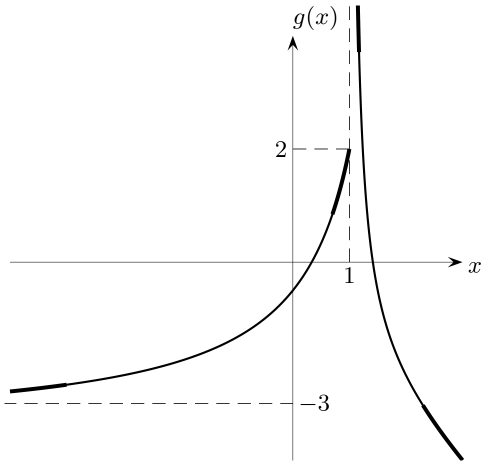
11 Calcolare i seguenti integrali

$$\int \left(\frac{2}{x^2+4} + \frac{x^3 5^x + x 2^x}{x^3 2^x}\right) dx, \qquad \int_{-1}^{0} \frac{5t}{\sqrt[5]{2-t^2}}\, dt.$$

IMPORTANTE! Risolvere solamente uno tra 10-b) e 11.

Soluzioni dei quesiti dell'esame del 3 febbraio 2011

1 A; **2** D; **3** D; **4** D; **5**-**6**-**7** consultare il libro di testo; **8** in neretto si evidenziano le informazioni date dai limiti. Il grafico della funzione è quindi completato a piacere (linea sottile), ad esempio:



9 a) La funzione è definita se $x - 3 \neq 0$ cioè $x \neq 3$, perciò il dominio è $\mathcal{D} = \mathbb{R} \setminus \{3\}$ e la funzione (razionale) è ivi continua e derivabile.

b) Si osservi che la funzione può essere riscritta come

$$g(x) = \frac{x^2(x+9)}{x-3}$$

dunque il numeratore si annulla per $x = 0$ e $x = -9$ ed è positivo se $x > -9$; il denominatore è positivo se $x > 3$. La funzione è dunque positiva per $x < -9$ oppure $x > 3$, negativa per $-9 < x < 3$ e $x \neq 0$.

c) Ha senso andare a studiare i limiti in 3 e a $\pm\infty$. Si ha

$$\lim_{x\to\pm\infty} g(x) = \lim_{x\to\pm\infty} x^2 \frac{1+9/x}{1-3/x} = [+\infty \cdot 1] = +\infty, \qquad \lim_{x\to 3^\pm} g(x) = \left[\frac{108}{0^\pm}\right] = \pm\infty,$$

quindi la funzione non ammette massimo né minimo.

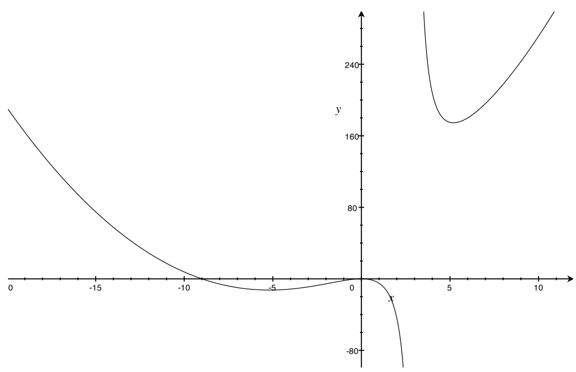
d) La derivata prima è

$$g'(x) = \frac{(3x^2+18x)(x-3) - (x^3+9x^2)\cdot 1}{(x-3)^2} = \frac{2x^3 - 54x}{(x-3)^2} = \frac{2x(x^2-27)}{(x-3)^2}.$$

Poiché il denominatore è sempre positivo nel dominio, la derivata prima è ≥ 0 se e solo se $x(x^2-27) \geq 0$ cioè se e solo se $x \geq \sqrt{27}$ oppure $-\sqrt{27} \leq x \leq 0$. Più precisamente

$$g'(x) \begin{cases} < 0, & \text{se } x \in]-\infty, -\sqrt{27}[\cup]0,3[\cup]3,\sqrt{27}[, \\ = 0, & \text{se } x = -\sqrt{27} \text{ oppure } x = 0 \text{ oppure } x = \sqrt{27}, \\ > 0, & \text{se } x \in]-\sqrt{27}, 0[\cup]\sqrt{27}, +\infty[, \end{cases}$$

perciò la funzione è decrescente in $]-\infty, -\sqrt{27}[$, in $]0,3[$ e in $]3,\sqrt{27}[$, mentre è crescente in $]-\sqrt{27}, 0[$ e in $]\sqrt{27}, +\infty[$. In $x = 0$ ammette un massimo relativo, in $x = \pm\sqrt{27}$ due punti di minimo relativo.



e) Dal punto c) segue che la retta $x = 3$ è un asintoto verticale. Inoltre, poiché

$$\lim_{x\to\pm\infty} \frac{g(x)}{x} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{x^3+9x^2}{x^2-3x} = \pm\infty,$$

la funzione non ammette asintoti obliqui/orizzontali a $\pm\infty$.

f) L'equazione della retta tangente al grafico nel generico punto $(x_0, g(x_0))$ è

$$y = (x - x_0)g'(x_0) + g(x_0).$$

Poiché $g(1) = -5$ e $g'(1) = -13$, l'equazione della retta cercata è

$$y = -13(x - 1) - 5.$$

10 a) Si ha $y'(t) = \frac{3t^2}{t^3+1}\log_4 \mathrm{e}$ e sostituendo si ottiene l'equazione

$$\frac{3t^2}{t^3+1}\log_4 \mathrm{e} = \frac{2t^2}{4^{\log_4(t^3+1)}\sqrt{t^3+1}} = \frac{2t^2}{(t^3+1)\sqrt{t^3+1}}$$

che non è identicamente soddisfatta (ad esempio, per $t = 1$ si ottiene $3\log_4 \mathrm{e}/2 \neq 1/\sqrt{2}$). La funzione non è dunque soluzione. Si osservi che la funzione soddisfa la seconda condizione, essendo $y(0) = 0$.

b) Scrivendo $y' = \frac{dy}{dt}$ e utilizzando il metodo di separazione delle variabili si ha

$$4^y\,dy = \frac{2t^2}{\sqrt{t^3+1}}\,dt$$

e integrando (utilizzando le tabelle)

$$\int 4^y\,dy = \int \frac{2t^2}{\sqrt{t^3+1}}\,dt \qquad \Longrightarrow \qquad \frac{4^y}{\ln 4} = \frac{4}{3}\sqrt{t^3+1} + c,$$

dove c è la generica costante d'integrazione; il secondo integrale è stato calcolato con la seconda tabella:

$$\int \frac{2t^2}{\sqrt{t^3+1}}\,dt = \frac{2}{3}\int (t^3+1)^{-1/2}(3t^2)\,dt = \frac{2}{3}\int (t^3+1)^{-1/2}(t^3+1)'\,dt = \frac{2}{3}\frac{(t^3+1)^{1/2}}{1/2} + c.$$

Si ottiene quindi

$$\frac{4^y}{\ln 4} = \frac{4}{3}\sqrt{t^3+1} + c \qquad \Longleftrightarrow \qquad y = \log_4\Big(\ln 4\big(\frac{4}{3}\sqrt{t^3+1} + c\big)\Big).$$

Imponendo la condizione $y(0) = 0$ (nella prima delle due equazioni qui sopra) si ha

$$\frac{1}{\ln 4} = \frac{4}{3} + c,$$

da cui si ricava $c = \frac{1}{\ln 4} - \frac{4}{3}$. La soluzione è quindi

$$y(t) = \log_4\Big(\frac{4\ln 4}{3}\sqrt{t^3+1} + 1 - \frac{4\ln 4}{3}\Big).$$

Alternativamente, si poteva utilizzare direttamente la formula risolutiva per le equazioni a variabili separabili (insieme alla formula fondamentale del calcolo integrale)

$$\int_0^y 4^z\,dz = \int_0^t \frac{2s^2}{\sqrt{s^3+1}}\,ds \quad \Longrightarrow \quad \Big[\frac{4^z}{\ln 4}\Big]_0^y = \Big[\frac{4}{3}\sqrt{s^3+1}\Big]_0^t$$

$$\Longrightarrow \quad \frac{4^y}{\ln 4} - \frac{1}{\ln 4} = \frac{4}{3}\sqrt{t^3+1} - \frac{4}{3}$$

che risolta rispetto a y fornisce la soluzione cercata.

11 Dalla prima tabella si ottiene

$$\int \Big(\frac{2}{x^2+4} + \frac{x^3 5^x + x 2^x}{x^3 2^x}\Big)\,dx = 2\int \frac{1}{x^2+4}\,dx + \int \Big(\frac{5}{2}\Big)^x dx + \int x^{-2}\,dx = \operatorname{arctg}\frac{x}{2} + \frac{(5/2)^x}{\ln(5/2)} - \frac{1}{x} + c,$$

con c costante arbitraria. Utilizzando invece la seconda tabella, si ha

$$\int_{-1}^0 \frac{5t}{\sqrt[5]{2-t^2}}\,dt = -\frac{5}{2}\int_{-1}^0 (2-t^2)^{-1/5}(2-t^2)'\,dt = -\frac{5}{2}\Big[\frac{(2-t^2)^{4/5}}{4/5}\Big]_{-1}^0 = -\frac{25}{8}(2^{4/5} - 1).$$

Facoltà di Agraria

Corsi di Laurea in VIT e STAL
Modulo di Matematica
Esame del 16/02/2011
A.A. 2010/2011

Scritto		Voto
Teoria	Esercizi	

Istruzioni: apporre nome, cognome e numero di matricola su ogni foglio. Prima della consegna indicare nell'apposito spazio il numero totale di fogli di cui è composto l'elaborato. Svolgere solamente uno tra 10-b) e 11. Allegare lo svolgimento completo degli esercizi 9, 10 e 11. **Non è ammesso l'uso di libri, appunti e calcolatrici grafiche o programmabili.**

Cognome	Nome
Corso di Laurea *VIT* *STAL*	Matricola
Vecchio ordinamento *SI* *NO*	n. fogli allegati

1 Se $\lim_{x\to x_0} f(x) = +\infty$ e $\lim_{x\to x_0} g(x) = -3$, allora $\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)}$ è

A $-\infty$

B $+\infty$

C 0

D non ci sono elementi sufficienti per rispondere

2 Se f è una funzione derivabile due volte in $]a,b[$ e vale $f'(x_0) < 0$ e $f''(x_0) = 0$ con $x_0 \in]a,b[$, allora

A x_0 è sempre punto di minimo relativo per f

B x_0 è sempre punto di massimo relativo per f

C x_0 è sempre punto di flesso relativo per f

D nessuna delle precedenti

3 L'equazione differenziale $y' = e^t(y + t^2)$ è

A un'equazione lineare del primo ordine

B un'equazione lineare del secondo ordine

C un'equazione non lineare del primo ordine

D un'equazione non lineare del secondo ordine

4 Il grafico della funzione $f(x) = \dfrac{3-\sqrt{5}x}{\pi x - 1}$ rappresenta

A una retta

B una parabola

C un'iperbole

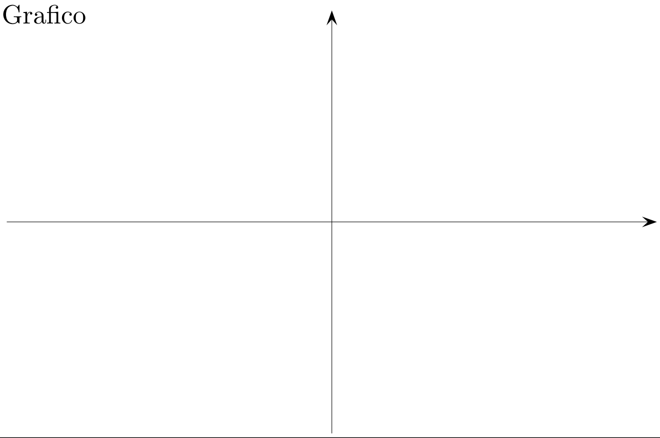
D nessuna delle precedenti

5 Per la funzione $f(x) = \cos x$, scrivere il dominio $\mathcal{D}$, l'immagine $\mathcal{I}$, e rappresentare qualitativamente il grafico.

$\mathcal{D} =$

$\mathcal{I} =$

Grafico



6 La derivata di una funzione f nel punto x_0 rappresenta geometricamente:

7 Enunciare il teorema dei punti critici

8 Rappresentare il grafico di una funzione g che verifichi contemporaneamente le seguenti proprietà:

$$\lim_{x\to-\infty} g(x) = +\infty \qquad \lim_{x\to 2^-} g(x) = +\infty \qquad \lim_{x\to 2^+} g(x) = -\infty \qquad \lim_{x\to+\infty} g(x) = -2$$

9 Data la funzione

$$g(x) = \frac{2x+1}{(3x-1)^2}$$

a) determinare il dominio $\mathcal{D}$, b) studiare il segno di g; c) calcolare i limiti agli estremi del dominio; d) determinare gli intervalli in cui la funzione è crescente, quelli in cui è decrescente, e gli eventuali punti di massimo/minimo relativo; e) determinare gli intervalli in cui la funzione è convessa e quelli in cui è concava; f) determinare gli eventuali asintoti; g) disegnare un grafico approssimativo di g.

10 Dato il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' = 2y + t^2 \\ y(1) = 0 \end{cases}$$

a) dire se la funzione $y(t) = (t-1)e^{2t}$ è soluzione del problema;

b) determinare una soluzione del problema nel caso in cui non lo sia la funzione di cui al punto precedente.

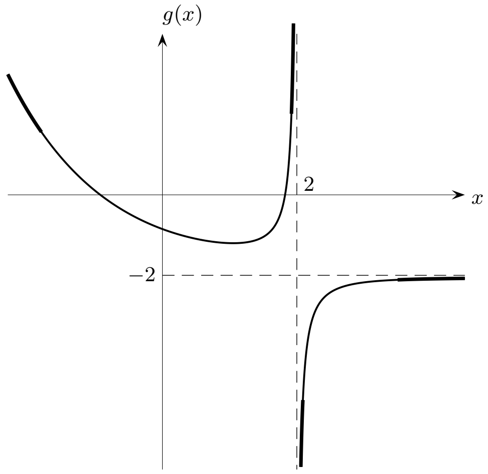
11 Calcolare i seguenti integrali

$$\int \left(\frac{\sqrt{x}-1}{x} + \frac{2}{x^2+4} \right) dx, \qquad \int_0^1 (x^2 - x)e^{3x}\, dx.$$

IMPORTANTE! Risolvere solamente uno tra 10-b) e 11.

Soluzioni dei quesiti dell'esame del 16 febbraio 2011

$\boxed{\mathbf{1}}$ A; $\boxed{\mathbf{2}}$ D; $\boxed{\mathbf{3}}$ A; $\boxed{\mathbf{4}}$ C; $\boxed{\mathbf{5}}$-$\boxed{\mathbf{6}}$-$\boxed{\mathbf{7}}$ consultare il libro di testo; $\boxed{\mathbf{8}}$ in neretto si evidenziano le informazioni date dai limiti. Il grafico della funzione è quindi completato a piacere (linea sottile), ad esempio:



$\boxed{\mathbf{9}}$ a) La funzione è definita se $3x - 1 \neq 0$ cioè $x \neq 1/3$, perciò il dominio è $\mathcal{D} = \mathbb{R} \setminus \{1/3\}$ e la funzione (razionale) è ivi continua e derivabile.

b) Poiché il denominatore è sempre positivo nel dominio, la funzione è positiva se e solo se $2x + 1 > 0$ cioè $x > -1/2$, mentre si annulla in $x = -1/2$ ed è negativa per $x < -1/2$.

c) Ha senso andare a studiare i limiti in $1/3$ e a $\pm\infty$. Si ha

$$\lim_{x\to\pm\infty} g(x) = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{1}{x}\frac{2 + 1/x}{(3 - 1/x)^2} = \left[0 \cdot \frac{2}{9}\right] = 0, \qquad \lim_{x\to(1/3)^\pm} g(x) = \left[\frac{5/3}{0^+}\right] = +\infty,$$

quindi la funzione non ammette massimo.

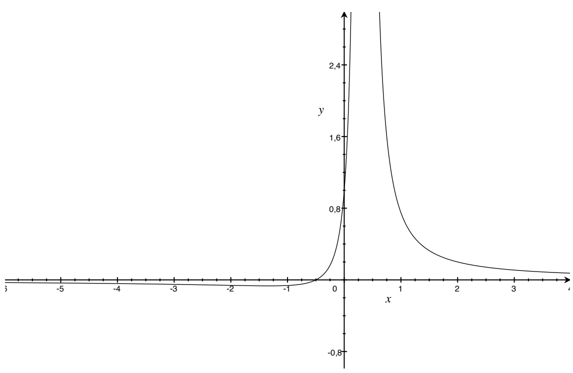
d) La derivata prima è

$$g'(x) = \frac{2(3x-1)^2 - (2x+1)2(3x-1)3}{(3x-1)^4} = \frac{2(3x-1) - (2x+1)6}{(3x-1)^3} = \frac{-2(3x+4)}{(3x-1)^3}.$$

Il numeratore è ≥ 0 se e solo se $3x+4 \leq 0$ ovvero $x \leq -4/3$; il denominatore è positivo se $(3x-1)^3 > 0$ cioè $3x - 1 > 0$, dunque $x > 1/3$. In definitiva

$$g'(x) \begin{cases} < 0, & \text{se } x \in]-\infty, -4/3[\cup]1/3, +\infty[, \\ = 0, & \text{se } x = -4/3, \\ > 0, & \text{se } x \in]-4/3, 1/3[, \end{cases}$$

perciò la funzione è decrescente in $]-\infty, -4/3[$ e in $]1/3, +\infty[$, mentre è crescente in $]-4/3, 1/3[$. In $x = -4/3$ ammette un minimo relativo ed assoluto.



e) La derivata seconda è

$$g''(x) = -2\frac{3(3x-1)^3 - (3x+4)3(3x-1)^2 3}{(3x-1)^6} = -2\frac{3(3x-1) - (3x+4)9}{(3x-1)^4} = \frac{6(6x+13)}{(3x-1)^4}.$$

Poiché il denominatore è sempre positivo nel dominio, la derivata seconda è ≥ 0 se e solo se $6x+13 \geq 0$, quindi

$$g''(x) \begin{cases} > 0, & \text{se } x \in]-13/6, 1/3[\cup]1/3, +\infty[\\ = 0, & \text{se } x = -13/6, \\ < 0, & \text{se } x \in]-\infty, -13/6[, \end{cases}$$

perciò la funzione è convessa in $]-13/6, 1/3[$ e in $]1/3, +\infty[$, mentre è concava in $]-\infty, -13/6[$. In $x = -13/6$ ammette un punto di flesso.

f) Dal punto c) segue immediatamente che la retta $x = 1/3$ è un asintoto verticale, mentre la retta $y = 0$ è un asintoto orizzontale.

10 a) Si ha $y'(t) = \mathrm{e}^{2t} + (t-1)\mathrm{e}^{2t}2 = (2t-1)\mathrm{e}^{2t}$ e sostituendo si ottiene l'equazione

$$(2t-1)\mathrm{e}^{2t} = 2(t-1)\mathrm{e}^{2t} + t^2$$

che non è identicamente soddisfatta per $t \in \mathbb{R}$ (ad esempio, per $t = 0$ si ha $-1 \neq -2$). La funzione non è dunque soluzione. La funzione soddisfa invece la seconda condizione, essendo $y(1) = 0$.

b) Si tratta di un'equazione lineare del primo ordine a coefficienti non costanti, del tipo

$$y' = a(t)y + b(t)$$

le cui soluzioni sono date da

$$y(t) = \mathrm{e}^{A(t)} \int \mathrm{e}^{-A(t)} b(t)\, dt$$

dove $A(t)$ è una primitiva di $a(t)$. In questo caso $A(t) = 2t$ e integrando per parti due volte si ottiene

$$\begin{aligned} y(t) &= \mathrm{e}^{2t} \int \mathrm{e}^{-2t} t^2\, dt = \mathrm{e}^{2t} \Big(\frac{\mathrm{e}^{-2t}}{-2} t^2 - \int \frac{\mathrm{e}^{-2t}}{-2} 2t\, dt \Big) = \mathrm{e}^{2t} \Big(-\frac{\mathrm{e}^{-2t}}{2} t^2 + \Big(\frac{\mathrm{e}^{-2t}}{-2} t - \int \frac{\mathrm{e}^{-2t}}{-2}\, dt \Big) \Big) \\ &= \mathrm{e}^{2t} \Big(-\frac{\mathrm{e}^{-2t}}{2} t^2 - \frac{\mathrm{e}^{-2t}}{2} t - \frac{\mathrm{e}^{-2t}}{4} + c \Big) = c\, \mathrm{e}^{2t} - \frac{t^2}{2} - \frac{t}{2} - \frac{1}{4}, \end{aligned}$$

dove c è la generica costante d'integrazione. Imponendo la condizione $y(1) = 0$ si ricava $0 = c\mathrm{e}^2 - 5/4$ cioè $c = 5/(4\mathrm{e}^2)$. La soluzione è quindi

$$y(t) = \frac{5}{4}\mathrm{e}^{2(t-1)} - \frac{t^2}{2} - \frac{t}{2} - \frac{1}{4}.$$

Alternativamente, si poteva utilizzare direttamente la formula risolutiva (insieme alla formula fondamentale del calcolo integrale)

$$y(t) = \mathrm{e}^{A(t)} \Big(\int_1^t \mathrm{e}^{-A(s)} b(s)\, ds + y(1) \Big)$$

dove $A(t) = \int_1^t a(s)\, ds$. In questo caso $A(t) = 2(t-1)$ e

$$\begin{aligned} y(t) &= \mathrm{e}^{2(t-1)} \Big(\int_1^t \mathrm{e}^{-2(s-1)} s^2\, ds + 0 \Big) \\ &= \mathrm{e}^{2(t-1)} \Big(-\frac{\mathrm{e}^{-2(t-1)}}{2} t^2 - \frac{\mathrm{e}^{-2(t-1)}}{2} t - \frac{\mathrm{e}^{-2(t-1)}}{4} - \Big(-\frac{1}{2} - \frac{1}{2} - \frac{1}{4} \Big) \Big) = \frac{5}{4}\mathrm{e}^{2(t-1)} - \frac{t^2}{2} - \frac{t}{2} - \frac{1}{4}. \end{aligned}$$

11 Dalle tabelle si ottiene

$$\int \Big(\frac{\sqrt{x}-1}{x} + \frac{2}{x^2+4} \Big) dx = \int x^{-1/2}\, dx - \int \frac{1}{x}\, dx + 2 \int \frac{1}{x^2+4}\, dx = \frac{x^{1/2}}{1/2} - \ln|x| + \operatorname{arctg} \frac{x}{2} + c,$$

con c costante arbitraria. Utilizzando invece il metodo di integrazione per parti si ha

$$\begin{aligned} \int_0^1 (x^2 - x)\mathrm{e}^{3x}\, dx &= \Big[(x^2 - x) \frac{\mathrm{e}^{3x}}{3} \Big]_0^1 - \int_0^1 (2x-1) \frac{\mathrm{e}^{3x}}{3}\, dx = 0 - \frac{1}{3} \Big(\Big[(2x-1) \frac{\mathrm{e}^{3x}}{3} \Big]_0^1 - \int_0^1 2\frac{\mathrm{e}^{3x}}{3}\, dx \Big) \\ &= -\frac{1}{3} \Big(\frac{\mathrm{e}^3}{3} - \Big(-\frac{1}{3}\Big) \Big) + \frac{2}{9} \Big[\frac{\mathrm{e}^{3x}}{3} \Big]_0^1 = -\frac{\mathrm{e}^3 + 5}{27}. \end{aligned}$$

Facoltà di Agraria

Corsi di Laurea in VIT e STAL
Modulo di Matematica
Esame del 30/06/2011
A.A. 2010/2011

Scritto		Voto
Teoria	Esercizi	

Istruzioni: apporre nome, cognome e numero di matricola su ogni foglio. Prima della consegna indicare nell'apposito spazio il numero totale di fogli di cui è composto l'elaborato. Svolgere solamente uno tra 10-b) e 11. Allegare lo svolgimento completo degli esercizi 9, 10 e 11. **Non è ammesso l'uso di libri, appunti e calcolatrici grafiche o programmabili.**

Cognome	Nome
Corso di Laurea *VIT* *STAL*	Matricola
Vecchio ordinamento *SI* *NO*	n. fogli allegati

1 Se $\lim_{x\to x_0} f(x) = 1$ e $\lim_{x\to x_0} g(x) = 0$, allora $\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)}$ è

- A 1
- B $+\infty$
- C 0
- D non ci sono elementi sufficienti per rispondere

2 Se f è una funzione derivabile in $]a,b[$ e vale $f'(x) < 0$ per ogni $x \in]a,b[$, allora

- A f è crescente
- B f è decrescente
- C f è concava
- D f è convessa

3 L'equazione differenziale $y'' = t\,\mathrm{sen}(y + y')$ è

- A un'equazione lineare del primo ordine
- B un'equazione lineare del secondo ordine
- C un'equazione non lineare del primo ordine
- D un'equazione non lineare del secondo ordine

4 Il grafico della funzione $f(x) = \dfrac{2x-1}{3+x^4}$ rappresenta

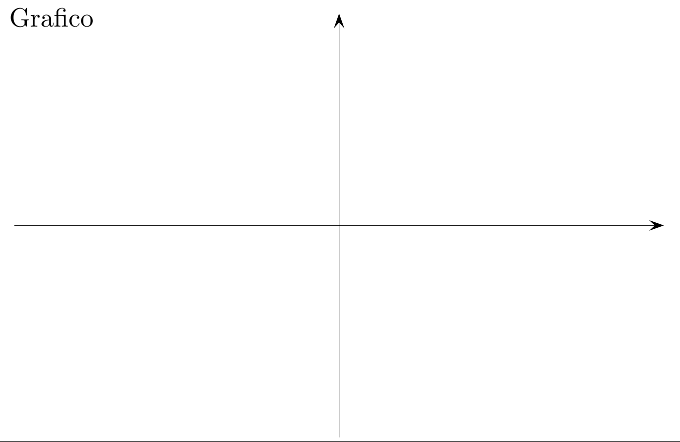
- A una retta
- B una parabola
- C un'iperbole
- D nessuna delle precedenti

5 Per la funzione $f(x) = \log_{1/7} x$, scrivere il dominio $\mathcal{D}$, l'immagine $\mathcal{I}$, e rappresentare qualitativamente il grafico.

$\mathcal{D} =$

$\mathcal{I} =$

Grafico



6 La derivata di una funzione f nel punto x_0 rappresenta geometricamente:

7 Enunciare il teorema fondamentale del calcolo integrale.

8 Rappresentare il grafico di una funzione g che verifichi contemporaneamente le seguenti proprietà:

$$\lim_{x\to-\infty} g(x) = +\infty \qquad \lim_{x\to(-1)^-} g(x) = -\infty \qquad \lim_{x\to(-1)^+} g(x) = 2 \qquad \lim_{x\to+\infty} g(x) = -1$$

9 Data la funzione

$$g(x) = \frac{2x^2 - 1}{3x^2 + 2x + 1}$$

a) determinare il dominio $\mathcal{D}$, b) studiare il segno di g; c) calcolare i limiti agli estremi del dominio; d) determinare gli intervalli in cui la funzione è crescente, quelli in cui è decrescente, e gli eventuali punti di massimo/minimo relativo; e) determinare gli eventuali asintoti; f) determinare l'equazione della retta tangente al grafico nel punto di ascissa $x_0 = 0$; g) disegnare un grafico approssimativo di g.

10 Dato il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' = (3 + t\,\mathrm{sen}(t^2))y^6 \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

a) dire se la funzione $y(t) = \cos(t + t^3)$ è soluzione del problema;

b) determinare una soluzione del problema nel caso in cui non lo sia la funzione di cui al punto precedente.

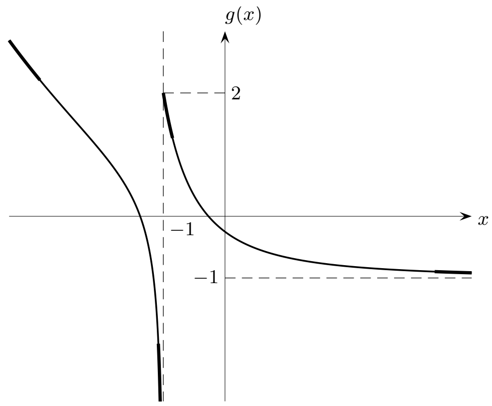
11 Calcolare i seguenti integrali

$$\int \left(x^2 \sqrt[3]{x} - \frac{2}{\sqrt{9 - x^2}} \right) dx, \qquad \int_{\pi/4}^{\pi/2} \frac{\cos x}{\mathrm{sen}^3\, x}\, dx.$$

IMPORTANTE! Risolvere solamente uno tra 10-b) e 11.

Soluzioni dei quesiti dell'esame del 30 giugno 2011

$\boxed{1}$ D; $\boxed{2}$ B; $\boxed{3}$ D; $\boxed{4}$ D; $\boxed{5}$-$\boxed{6}$-$\boxed{7}$ consultare il libro di testo; $\boxed{8}$ in neretto si evidenziano le informazioni date dai limiti. Il grafico della funzione è quindi completato a piacere (linea sottile), ad esempio:



$\boxed{9}$ a) La funzione è definita se $3x^2 + 2x + 1 \neq 0$; avendo il discriminante negativo, l'equazione di secondo grado non ha soluzioni, dunque il denominatore non si annulla mai e il dominio è $\mathcal{D} = \mathbb{R}$. La funzione (razionale) è ivi continua e derivabile.

b) Poiché il denominatore è sempre positivo nel dominio, la funzione è ≥ 0 se e solo se $2x^2 - 1 \geq 0$ cioè $x \geq 1/\sqrt{2}$ oppure $x \leq -1/\sqrt{2}$. È dunque negativa se $-1/\sqrt{2} < x < 1/\sqrt{2}$, mentre si annulla in $x = -1/\sqrt{2}$ e $x = 1/\sqrt{2}$.

c) Ha senso andare a studiare i limiti a $\pm\infty$. Si ha

$$\lim_{x\to\pm\infty} g(x) = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{2 - 1/x^2}{3 + 2/x + 1/x^2} = \left[\frac{2-0}{3+0+0}\right] = \frac{2}{3},$$

quindi la funzione ammette un asintoto orizzontale a $\pm\infty$.

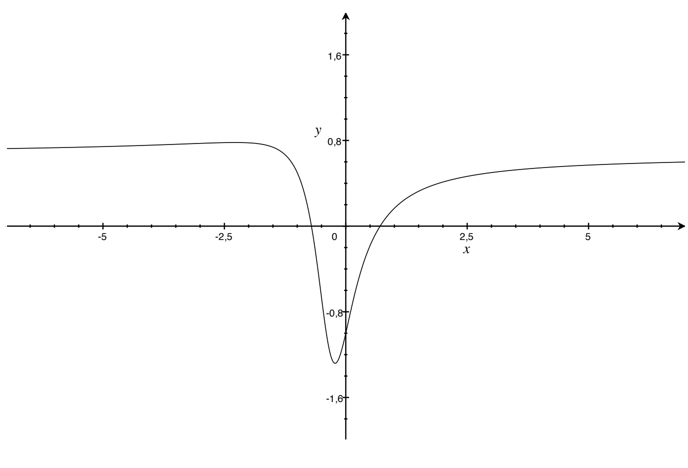
d) La derivata prima è

$$g'(x) = \frac{4x(3x^2 + 2x + 1) - (2x^2 - 1)(6x + 2)}{(3x^2 + 2x + 1)^2} = \frac{2(2x^2 + 5x + 1)}{(3x^2 + 2x + 1)^2}.$$

Il numeratore è ≥ 0 se e solo se $2x^2 + 5x + 1 \geq 0$ ovvero se $x \leq \frac{-5-\sqrt{17}}{4}$ oppure $x \geq \frac{-5+\sqrt{17}}{4}$, dunque

$$g'(x) \begin{cases} < 0, & \text{se } x \in \left]\frac{-5-\sqrt{17}}{4}, \frac{-5+\sqrt{17}}{4}\right[, \\ = 0, & \text{se } x = \frac{-5-\sqrt{17}}{4} \text{ oppure } x = \frac{-5+\sqrt{17}}{4}, \\ > 0, & \text{se } x \in \left]-\infty, \frac{-5-\sqrt{17}}{4}\right[\cup \left]\frac{-5+\sqrt{17}}{4}, +\infty\right[, \end{cases}$$

perciò la funzione è decrescente in $\left]\frac{-5-\sqrt{17}}{4}, \frac{-5+\sqrt{17}}{4}\right[$, mentre è crescente in $\left]-\infty, \frac{-5-\sqrt{17}}{4}\right[$ e in $\left]\frac{-5+\sqrt{17}}{4}, +\infty\right[$. In $x = \frac{-5-\sqrt{17}}{4}$ e in $x = \frac{-5+\sqrt{17}}{4}$ ammette, rispettivamente, un massimo assoluto ed un minimo assoluto.



e) Dal punto c) segue immediatamente che la retta $x = 2/3$ è un asintoto orizzontale, dunque non possono esserci asintoti obliqui. Poiché la funzione è definita e continua su tutto $\mathbb{R}$ non ci possono neanche essere asintoti verticali.

f) L'equazione della retta tangente al grafico nel generico punto $(x_0, g(x_0))$ è

$$y = (x - x_0)g'(x_0) + g(x_0).$$

Poiché $g(0) = -1$ e $g'(0) = 2$, l'equazione della retta cercata è

$$y = 2x - 1.$$

10 a) Si ha $y'(t) = -(1 + 3t^2)\,\mathrm{sen}(t + t^3)$ e sostituendo si ottiene l'equazione

$$-(1 + 3t^2)\,\mathrm{sen}(t + t^3) = (3 + t\,\mathrm{sen}(t^2))\cos^6(t + t^3)$$

che non è identicamente soddisfatta per $t \in \mathbb{R}$ (ad esempio, per $t = 0$ si ha $0 \neq 3$). La funzione non è dunque soluzione. La funzione soddisfa invece la seconda condizione, essendo $y(0) = 1$.

b) Scrivendo $y' = \frac{dy}{dt}$ e utilizzando il metodo di separazione delle variabili si ha

$$\frac{1}{y^6}\,dy = (3 + t\,\mathrm{sen}(t^2))\,dt$$

e integrando (utilizzando le tabelle)

$$\int y^{-6}\,dy = \int (3 + t\,\mathrm{sen}(t^2))\,dt \qquad \Longrightarrow \qquad \frac{y^{-5}}{-5} = 3t - \frac{1}{2}\cos(t^2) + c,$$

dove c è la generica costante d'integrazione; il secondo integrale è stato calcolato con la seconda tabella:

$$\int t\,\mathrm{sen}(t^2)\,dt = \frac{1}{2}\int 2t\,\mathrm{sen}(t^2)\,dt = \frac{1}{2}\int (t^2)'\,\mathrm{sen}(t^2)\,dt = -\frac{1}{2}\cos(t^2) + c.$$

Si ottiene quindi

$$y^{-5} = \frac{5\cos(t^2) - 30t - 10c}{2} \qquad \Longleftrightarrow \qquad y = \sqrt[5]{\frac{2}{5\cos(t^2) - 30t - 10c}}.$$

Imponendo la condizione $y(0) = 1$ (nella prima delle due equazioni qui sopra) si ha

$$1 = \frac{5 - 10c}{2},$$

da cui si ricava $c = \frac{3}{10}$. La soluzione è quindi

$$y(t) = \sqrt[5]{\frac{2}{5\cos(t^2) - 30t - 3}}.$$

Alternativamente, si poteva utilizzare direttamente la formula risolutiva per le equazioni a variabili separabili (insieme alla formula fondamentale del calcolo integrale)

$$\begin{aligned} \int_1^y z^{-6}\,dz = \int_0^t (3 + s\,\mathrm{sen}(s^2))\,ds \quad &\Longrightarrow \quad \left[\frac{z^{-5}}{-5}\right]_1^y = \left[3s - \frac{1}{2}\cos(s^2)\right]_0^t \\ &\Longrightarrow \quad -\frac{1}{5y^5} + \frac{1}{5} = 3t - \frac{1}{2}\cos(t^2) + \frac{1}{2} \end{aligned}$$

che risolta rispetto a y fornisce la soluzione cercata.

11 Dalla prima tabella si ottiene

$$\int \left(x^2\sqrt[3]{x} - \frac{2}{\sqrt{9 - x^2}}\right)dx = \int x^{7/3}\,dx - 2\int \frac{1}{\sqrt{9 - x^2}}\,dx = \frac{x^{10/3}}{10/3} - 2\,\mathrm{arcsen}\,\frac{x}{3} + c,$$

con c costante arbitraria, mentre dalla seconda tabella si ha

$$\int_{\pi/4}^{\pi/2} \frac{\cos x}{\mathrm{sen}^3\,x}\,dx = \int_{\pi/4}^{\pi/2} (\mathrm{sen}\,x)'(\mathrm{sen}\,x)^{-3}\,dx = \left[\frac{(\mathrm{sen}\,x)^{-2}}{-2}\right]_{\pi/4}^{\pi/2} = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2(1/\sqrt{2})^2} = \frac{1}{2}.$$

Facoltà di Agraria

Corsi di Laurea in VIT e STAL
Modulo di Matematica
Esame del 13/07/2011
A.A. 2010/2011

Scritto		Voto
Teoria	Esercizi	

Istruzioni: apporre nome, cognome e numero di matricola su ogni foglio. Prima della consegna indicare nell'apposito spazio il numero totale di fogli di cui è composto l'elaborato. Svolgere solamente uno tra 10-b) e 11. Allegare lo svolgimento completo degli esercizi 9, 10 e 11. **Non è ammesso l'uso di libri, appunti e calcolatrici grafiche o programmabili.**

Cognome	Nome
Corso di Laurea $\boxed{VIT}$ $\boxed{STAL}$	Matricola
Vecchio ordinamento $\boxed{SI}$ $\boxed{NO}$	n. fogli allegati

1 Se $\lim_{x\to x_0} f(x) = +\infty$ e $\lim_{x\to x_0} g(x) = -3$, allora $\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)}$ è

- A $-\infty$
- B $+\infty$
- C 0
- D non ci sono elementi sufficienti per rispondere

2 Se f è una funzione derivabile due volte in $]a, b[$ e vale $f'(x) < 0$ e $f''(x) > 0$ in $]a, b[$, allora

- A f è decrescente e concava in $]a, b[$
- B f è crescente e convessa in $]a, b[$
- C f è decrescente e convessa in $]a, b[$
- D f è crescente e concava in $]a, b[$

3 L'equazione differenziale $y'' = y' - \text{sen}(ty)$ è

- A un'equazione lineare del primo ordine
- B un'equazione lineare del secondo ordine
- C un'equazione non lineare del primo ordine
- D un'equazione non lineare del secondo ordine

4 Il grafico della funzione $f(x) = \frac{2}{3}x - 5x^2$ rappresenta

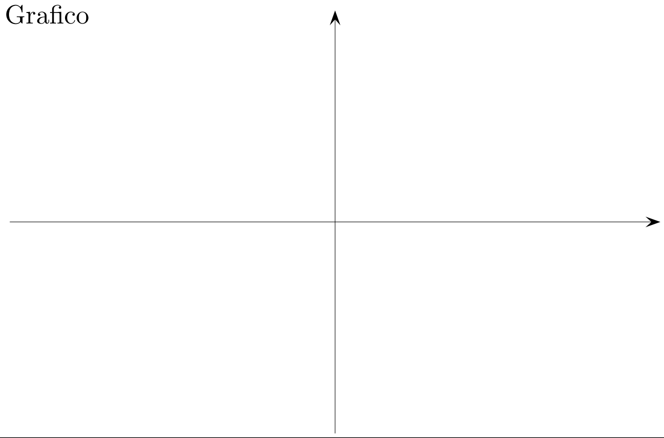
- A una retta
- B una parabola
- C un'iperbole
- D nessuna delle precedenti

5 Per la funzione $f(x) = \sqrt[5]{x}$, scrivere il dominio $\mathcal{D}$, l'immagine $\mathcal{I}$, e rappresentare qualitativamente il grafico.

$\mathcal{D} =$

$\mathcal{I} =$

Grafico



6 Per definizione, la derivata di una funzione $f(x)$ in x_0 è:

7 Enunciare il teorema fondamentale del calcolo integrale.

8 Rappresentare il grafico di una funzione g che verifichi contemporaneamente le seguenti proprietà:

$$\lim_{x\to-\infty} g(x) = +\infty \qquad \lim_{x\to 2^-} g(x) = +\infty \qquad \lim_{x\to 2^+} g(x) = -\infty \qquad \lim_{x\to+\infty} g(x) = -2$$

9 Data la funzione

$$g(x) = (x^2 - x)\mathrm{e}^{-2x}$$

a) determinare il dominio $\mathcal{D}$, b) studiare il segno di g; c) calcolare i limiti agli estremi del dominio; d) determinare gli intervalli in cui la funzione è crescente, quelli in cui è decrescente, e gli eventuali punti di massimo/minimo relativo; e) determinare gli intervalli in cui la funzione è convessa e quelli in cui è concava; f) disegnare un grafico approssimativo di g.

10 Dato il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' = \dfrac{3t\mathrm{e}^{-2t} + 4t^3}{y^2} \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

a) dire se la funzione $y(t) = \mathrm{e}^{3t^3}$ è soluzione del problema;

b) determinare una soluzione del problema nel caso in cui non lo sia la funzione di cui al punto precedente.

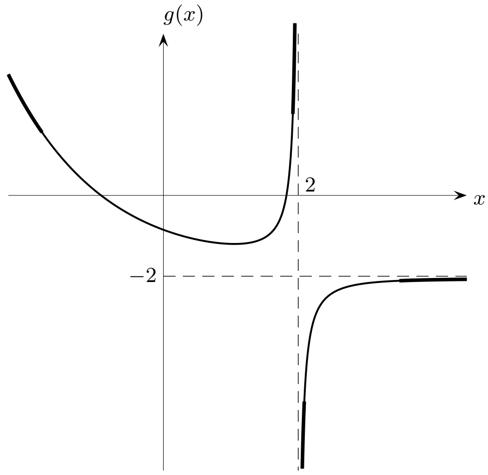
11 Calcolare i seguenti integrali

$$\int \Big(\frac{2}{9+x^2} - \frac{3x^2 \operatorname{sen}^2 x + 5}{\operatorname{sen}^2 x}\Big)\, dx, \qquad \int_0^1 (x^2 - 3x)\mathrm{e}^{-x}\, dx.$$

IMPORTANTE! Risolvere solamente uno tra 10-b) e 11.

Soluzioni dei quesiti dell'esame del 13 luglio 2011

1 A; **2** C; **3** D; **4** B; **5**-**6**-**7** consultare il libro di testo; **8** in neretto si evidenziano le informazioni date dai limiti. Il grafico della funzione è quindi completato a piacere (linea sottile), ad esempio:



9 a) Il dominio è banalmente $\mathcal{D} = \mathbb{R}$. La funzione, prodotto di funzioni continue e derivabili, è ivi continua e derivabile.

b) Poiché la funzione esponenziale è sempre strettamente positiva, $g(x) \geq 0$ se e solo se $x^2 - x \geq 0$ cioè $x \leq 0$ oppure $x \geq 1$. È dunque negativa se $0 < x < 1$, mentre si annulla in $x = 0$ e $x = 1$.

c) Ha senso andare a studiare i limiti a $\pm\infty$. Si ha

$$\lim_{x\to-\infty} g(x) = \lim_{x\to-\infty} (x^2 - x)\mathrm{e}^{-2x} = [+\infty \cdot +\infty] = +\infty,$$

$$\lim_{x\to+\infty} g(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^2 - x}{\mathrm{e}^{2x}} = 0,$$

dove nell'ultimo limite si è usato il ben noto fatto che la funzione esponenziale tende all'infinito più rapidamente di un qualsiasi polinomio per $x \to +\infty$. In particolare, dallo studio dei limiti segue che la funzione non ammette massimo, e ha un asintoto orizzontale a $+\infty$.

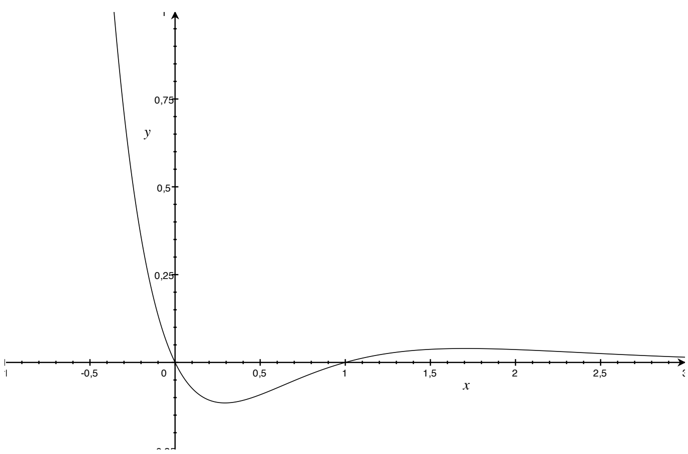
d) La derivata prima è

$$g'(x) = (2x - 1)\mathrm{e}^{-2x} + (x^2 - x)\mathrm{e}^{-2x}(-2) = (-2x^2 + 4x - 1)\mathrm{e}^{-2x}.$$

La derivata prima è ≥ 0 se e solo se $-2x^2 + 4x - 1 \geq 0$ ovvero se $1 - \frac{\sqrt{2}}{2} \leq x \leq 1 + \frac{\sqrt{2}}{2}$, dunque

$$g'(x) \begin{cases} > 0, & \text{se } x \in]1 - \frac{\sqrt{2}}{2}, 1 + \frac{\sqrt{2}}{2}[, \\ = 0, & \text{se } x = 1 - \frac{\sqrt{2}}{2} \text{ oppure } x = 1 + \frac{\sqrt{2}}{2}, \\ < 0, & \text{se } x \in]-\infty, 1 - \frac{\sqrt{2}}{2}[\cup]1 + \frac{\sqrt{2}}{2}, +\infty[, \end{cases}$$

perciò la funzione è crescente in $]1 - \frac{\sqrt{2}}{2}, 1 + \frac{\sqrt{2}}{2}[$, mentre è decrescente in $]-\infty, 1 - \frac{\sqrt{2}}{2}[$ e in $]1 + \frac{\sqrt{2}}{2}, +\infty[$. In $x = 1 + \frac{\sqrt{2}}{2}$ ammette un massimo relativo mentre in $x = 1 - \frac{\sqrt{2}}{2}$ ammette un minimo relativo e assoluto.



e) La derivata seconda è

$$g''(x) = (-4x+4)\mathrm{e}^{-2x} - 2(-2x^2+4x-1)\mathrm{e}^{-2x} = 2(2x^2-6x+3)\mathrm{e}^{-2x}.$$

La derivata seconda è ≥ 0 se e solo se $2x^2-6x+3 \geq 0$ cioè se $x \leq \frac{3-\sqrt{3}}{2}$ oppure $x \geq \frac{3+\sqrt{3}}{2}$, quindi

$$g''(x) \begin{cases} < 0, & \text{se } x \in]\frac{3-\sqrt{3}}{2}, \frac{3+\sqrt{3}}{2}[, \\ = 0, & \text{se } x = \frac{3-\sqrt{3}}{2} \text{ oppure } x = \frac{3+\sqrt{3}}{2}, \\ > 0, & \text{se } x \in]-\infty, \frac{3-\sqrt{3}}{2}[\cup]\frac{3+\sqrt{3}}{2}, +\infty[, \end{cases}$$

perciò la funzione è concava in $]\frac{3-\sqrt{3}}{2}, \frac{3+\sqrt{3}}{2}[$, mentre è convessa in $]-\infty, \frac{3-\sqrt{3}}{2}[$ e in $]\frac{3+\sqrt{3}}{2}, +\infty[$. In $x = \frac{3-\sqrt{3}}{2}$ e in $x = \frac{3+\sqrt{3}}{2}$ ammette due punti di flesso.

10 a) Si ha $y'(t) = 9t^2\mathrm{e}^{3t^3}$ e sostituendo si ottiene l'equazione

$$9t^2\mathrm{e}^{3t^3} = \frac{3t\mathrm{e}^{-2t}+4t^3}{\mathrm{e}^{6t^3}}$$

che non è identicamente soddisfatta per $t \in \mathbb{R}$ (ad esempio, per $t=1$ si ha $9\mathrm{e}^3 \neq (3\mathrm{e}^{-2}+4)/\mathrm{e}^6$). La funzione non è dunque soluzione. La funzione soddisfa invece la seconda condizione, essendo $y(0)=1$.
b) Scrivendo $y' = \frac{dy}{dt}$ e utilizzando il metodo di separazione delle variabili si ha

$$y^2\,dy = (3t\mathrm{e}^{-2t}+4t^3)\,dt$$

e integrando (utilizzando le tabelle)

$$\int y^2\,dy = \int (3t\mathrm{e}^{-2t}+4t^3)\,dt \qquad \Longrightarrow \qquad \frac{y^3}{3} = -\frac{3}{4}(2t+1)\mathrm{e}^{-2t} + t^4 + c,$$

dove c è la generica costante d'integrazione; il secondo integrale è stato calcolato per parti:

$$\int 3t\mathrm{e}^{-2t}\,dt = 3t\frac{\mathrm{e}^{-2t}}{-2} - \int 3\frac{\mathrm{e}^{-2t}}{-2}\,dt = -\frac{3}{2}t\mathrm{e}^{-2t} + \frac{3}{2}\int \mathrm{e}^{-2t}\,dt = -\frac{3}{2}t\mathrm{e}^{-2t} - \frac{3}{4}\mathrm{e}^{-2t}.$$

Si ottiene quindi

$$y^3 = -\frac{9}{4}(2t+1)\mathrm{e}^{-2t} + 3t^4 + 3c \qquad \Longleftrightarrow \qquad y = \sqrt[3]{-\frac{9}{4}(2t+1)\mathrm{e}^{-2t} + 3t^4 + 3c}.$$

Imponendo la condizione $y(0)=1$ (nella prima delle due equazioni qui sopra) si ha

$$1 = -\frac{9}{4} + 3c,$$

da cui si ricava $c = \frac{13}{12}$. La soluzione è quindi

$$y(t) = \sqrt[3]{-\frac{9}{4}(2t+1)\mathrm{e}^{-2t} + 3t^4 + \frac{13}{4}}.$$

Alternativamente, si poteva utilizzare direttamente la formula risolutiva per le equazioni a variabili separabili (insieme alla formula fondamentale del calcolo integrale)

$$\int_1^y z^2\,dz = \int_0^t (3s\mathrm{e}^{-2s}+4s^3)\,ds \quad \Longrightarrow \quad \left[\frac{z^3}{3}\right]_1^y = \left[-\frac{3}{4}(2s+1)\mathrm{e}^{-2s} + s^4\right]_0^t$$
$$\Longrightarrow \quad \frac{y^3}{3} - \frac{1}{3} = -\frac{3}{4}(2t+1)\mathrm{e}^{-2t} + t^4 + \frac{3}{4}$$

che risolta rispetto a y fornisce la soluzione cercata.

11 Dalla prima tabella si ottiene

$$\int \Big(\frac{2}{9+x^2} - \frac{3x^2\operatorname{sen}^2 x + 5}{\operatorname{sen}^2 x}\Big)\,dx = 2\int \frac{1}{9+x^2}\,dx - 3\int x^2\,dx - 5\int \frac{1}{\operatorname{sen}^2 x}\,dx = \frac{2}{3}\operatorname{arctg}\frac{x}{3} - x^3 + 5\cot x + c,$$

con c costante arbitraria, mentre integrando per parti si ha

$$\int_0^1 (x^2-3x)\mathrm{e}^{-x}\,dx = \left[-(x^2-3x)\mathrm{e}^{-x}\right]_0^1 + \int_0^1 (2x-3)\mathrm{e}^{-x}\,dx = 2\mathrm{e}^{-1} + \left[-(2x-3)\mathrm{e}^{-x}\right]_0^1 + \int_0^1 2\mathrm{e}^{-x}\,dx$$
$$= 2\mathrm{e}^{-1} + (\mathrm{e}^{-1}-3) + \left[-2\mathrm{e}^{-x}\right]_0^1 = 3\mathrm{e}^{-1} - 3 - 2\mathrm{e}^{-1} + 2 = \frac{1-\mathrm{e}}{\mathrm{e}}.$$

Facoltà di Agraria

Corsi di Laurea in VIT e STAL
Modulo di Matematica
Esame del 15/09/2011
A.A. 2010/2011

Scritto		Voto
Teoria	Esercizi	

Istruzioni: apporre nome, cognome e numero di matricola su ogni foglio. Prima della consegna indicare nell'apposito spazio il numero totale di fogli di cui è composto l'elaborato. Svolgere solamente uno tra 10-b) e 11. Allegare lo svolgimento completo degli esercizi 9, 10 e 11. **Non è ammesso l'uso di libri, appunti e calcolatrici grafiche o programmabili.**

Cognome	Nome
Corso di Laurea *VIT* *STAL*	Matricola
Vecchio ordinamento *SI* *NO*	n. fogli allegati

1 Se $\lim_{x\to x_0} f(x) = +\infty$ e $\lim_{x\to x_0} g(x) = -\infty$, allora $\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)}$ è

A $-\infty$

B $+\infty$

C -1

D non ci sono elementi sufficienti per rispondere

2 Se f è una funzione derivabile due volte in $]a, b[$ e vale $f'(x_0) = 0$ e $f''(x_0) < 0$ con $x_0 \in]a, b[$, allora

A x_0 è sempre punto di minimo relativo per f

B x_0 è sempre punto di massimo relativo per f

C x_0 è sempre punto di flesso per f

D nessuna delle precedenti

3 L'equazione differenziale $y'' = \text{sen}(y + y')$ è

A un'equazione lineare del primo ordine

B un'equazione lineare del secondo ordine

C un'equazione non lineare del primo ordine

D un'equazione non lineare del secondo ordine

4 Il grafico della funzione $f(x) = \frac{1}{1-3x}$ rappresenta

A una retta

B una parabola

C un'iperbole

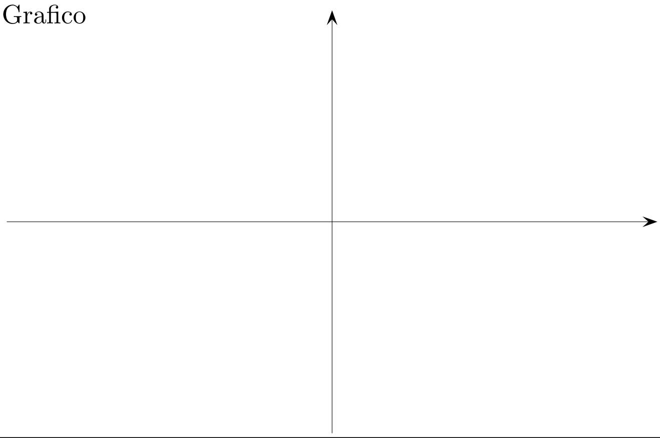
D nessuna delle precedenti

5 Per la funzione $f(x) = (5/7)^x$, scrivere il dominio $\mathcal{D}$, l'immagine $\mathcal{I}$, e rappresentare qualitativamente il grafico.

$\mathcal{D} =$

$\mathcal{I} =$

Grafico



6 Per definizione, la derivata di una funzione $f(x)$ in x_0 è:

7 Enunciare il teorema fondamentale del calcolo integrale.

8 Rappresentare il grafico di una funzione g che verifichi contemporaneamente le seguenti proprietà:

$$\lim_{x\to-\infty} g(x) = +\infty \qquad \lim_{x\to 2^-} g(x) = -\infty \qquad \lim_{x\to 2^+} g(x) = +\infty \qquad \lim_{x\to+\infty} g(x) = -1$$

9 Data la funzione

$$g(x) = \frac{x-1}{(2x-1)^2}$$

a) determinare il dominio $\mathcal{D}$, b) studiare il segno di g; c) calcolare i limiti agli estremi del dominio; d) determinare gli intervalli in cui la funzione è crescente, quelli in cui è decrescente, e gli eventuali punti di massimo/minimo relativo; e) determinare gli intervalli in cui la funzione è convessa e quelli in cui è concava; f) disegnare un grafico approssimativo di g.

10 Dato il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' = \dfrac{3^y(2+t^2)}{t} \\ y(1) = 0 \end{cases}$$

a) dire se la funzione $y(t) = \log_3(4t-3)$ è soluzione del problema;

b) determinare una soluzione del problema nel caso in cui non lo sia la funzione di cui al punto precedente.

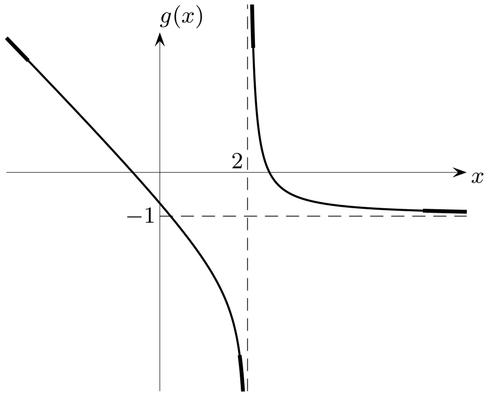
11 Calcolare i seguenti integrali

$$\int \Big(\frac{3}{\sqrt{25-x^2}} - \frac{3x\sqrt{x}+5x}{2x^2}\Big)\,dx, \qquad \int_0^1 \frac{3x+1}{x^2+1}\,dx.$$

IMPORTANTE! Risolvere solamente uno tra 10-b) e 11.

Soluzioni dei quesiti dell'esame del 15 settembre 2011

$\boxed{1}$ D; $\boxed{2}$ B; $\boxed{3}$ D; $\boxed{4}$ C; $\boxed{5}$-$\boxed{6}$-$\boxed{7}$ consultare il libro di testo; $\boxed{8}$ in neretto si evidenziano le informazioni date dai limiti. Il grafico della funzione è quindi completato a piacere (linea sottile), ad esempio:



$\boxed{9}$ a) Il dominio è costituito dagli x tali che $2x-1 \neq 0$ cioè $\mathcal{D} = \mathbb{R} \setminus \{1/2\}$. La funzione (razionale) è ivi continua e derivabile.

b) Poiché il denominatore è sempre positivo nel dominio, la funzione è positiva se e solo se $x-1>0$ cioè $x>1$. Si annulla in $x=1$.

c) Ha senso andare a studiare i limiti a $\pm\infty$ e in $1/2$. Si ha

$$\lim_{x\to 1/2} g(x) = \left[\frac{-1/2}{0^+}\right] = -\infty, \qquad \lim_{x\to\pm\infty} g(x) = \lim_{x\to\pm\infty} \left(\frac{1}{x}\cdot\frac{1-1/x}{(2-1/x)^2}\right) = \left[0\cdot\frac{1}{4}\right] = 0,$$

quindi la funzione ammette l'asintoto orizzontale $y=0$ a $\pm\infty$ e l'asintoto verticale $x=1/2$.

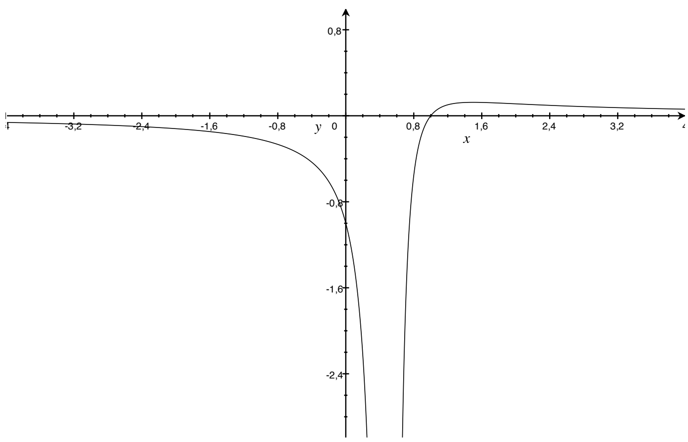
d) La derivata prima è

$$g'(x) = \frac{1\cdot(2x-1)^2-(x-1)2(2x-1)2}{(2x-1)^4} = \frac{(2x-1)-(x-1)4}{(2x-1)^3} = \frac{3-2x}{(2x-1)^3}.$$

Il numeratore è ≥ 0 se e solo se $3-2x \geq 0$ ovvero se $x \leq 3/2$, il denominatore è positivo se $(2x-1)^3 > 0$ ovvero $2x-1>0$ cioè $x>1/2$. Si ottiene dunque

$$g'(x)\begin{cases} <0, & \text{se } x\in]-\infty,1/2[\cup]3/2,+\infty[,\\ =0, & \text{se } x=3/2,\\ >0, & \text{se } x\in]1/2,3/2[,\end{cases}$$

perciò la funzione è decrescente in $]-\infty,1/2[$ e in $]3/2,+\infty[$, mentre è crescente in $]1/2,3/2[$. In $x=3/2$ ammette un massimo assoluto.



e) La derivata seconda è

$$g''(x) = \frac{-2(2x-1)^3-(3-2x)3(2x-1)^2 2}{(2x-1)^6} = \frac{-2(2x-1)-(3-2x)6}{(2x-1)^4} = \frac{8(x-2)}{(2x-1)^4}.$$

La derivata seconda è ≥ 0 se e solo se $x-2 \geq 0$ cioè se $x \geq 2$, quindi

$$g''(x) \begin{cases} > 0, & \text{se } x \in]2, +\infty[, \\ = 0, & \text{se } x = 2, \\ < 0, & \text{se } x \in]-\infty, 1/2[\cup]1/2, 2[, \end{cases}$$

perciò la funzione è convessa in $]2, +\infty[$, mentre è concava in $]-\infty, 1/2[$ e in $]1/2, 2[$. In $x = 2$ ammette un punto di flesso.

10 a) Si ha $y'(t) = \frac{\log_3 e}{4t-3} 4$ e sostituendo si ottiene l'equazione

$$\frac{4 \log_3 e}{4t-3} = \frac{3^{\log_3(4t-3)}(2+t^2)}{t} = \frac{(4t-3)(2+t^2)}{t}$$

che non è identicamente soddisfatta (ad esempio, per $t = 1$ si ha $4 \log_3 e \neq 3$). La funzione non è dunque soluzione. La funzione soddisfa invece la seconda condizione, essendo $y(1) = 0$.

b) Scrivendo $y' = \frac{dy}{dt}$ e utilizzando il metodo di separazione delle variabili si ha

$$\frac{1}{3^y}\, dy = \frac{2+t^2}{t}\, dt$$

e integrando (utilizzando le tabelle)

$$\int 3^{-y}\, dy = \int \Big(\frac{2}{t} + t\Big)\, dt \qquad \Longrightarrow \qquad -3^{-y} = 2 \ln|t| + \frac{t^2}{2} + c,$$

dove c è la generica costante d'integrazione. Si osservi che essendo $t_0 = 1$ si può supporre che $t > 0$ dunque $|t| = t$. Si ottiene quindi

$$3^{-y} = -2\ln t - \frac{t^2}{2} - c \qquad \Longleftrightarrow \qquad y = -\log_3 \Big(-2\ln t - \frac{t^2}{2} - c\Big).$$

Imponendo la condizione $y(1) = 0$ (nella prima delle due equazioni qui sopra) si ha

$$1 = -\frac{1}{2} - c,$$

da cui si ricava $c = -3/2$. La soluzione è quindi

$$y(t) = -\log_3 \Big(\frac{3}{2} - 2\ln t - \frac{t^2}{2}\Big).$$

Alternativamente, si poteva utilizzare direttamente la formula risolutiva per le equazioni a variabili separabili (insieme alla formula fondamentale del calcolo integrale)

$$\begin{aligned} \int_0^y 3^{-z}\, dz = \int_1^t \Big(\frac{2}{s} + s\Big)\, ds \quad &\Longrightarrow \quad \big[-3^{-z}\big]_0^y = \Big[2\ln s + \frac{s^2}{2}\Big]_1^t \\ &\Longrightarrow \quad 1 - 3^{-y} = 2\ln t + \frac{t^2}{2} - \frac{1}{2} \end{aligned}$$

che risolta rispetto a y fornisce la soluzione cercata.

11 Dalla prima tabella si ottiene

$$\begin{aligned} \int \Big(\frac{3}{\sqrt{25-x^2}} - \frac{3x\sqrt{x}+5x}{2x^2}\Big)\, dx &= 3\int \frac{1}{\sqrt{25-x^2}}\, dx - \frac{3}{2}\int x^{-1/2}\, dx - \frac{5}{2}\int \frac{1}{x}\, dx \\ &= 3 \operatorname{arcsen} \frac{x}{5} - 3x^{1/2} - \frac{5}{2}\ln|x| + c, \end{aligned}$$

con c costante arbitraria, mentre dalla seconda tabella si ha

$$\int_0^1 \frac{3x+1}{x^2+1}\, dx = \frac{3}{2}\int_0^1 \frac{2x}{x^2+1}\, dx + \int_0^1 \frac{1}{x^2+1}\, dx = \Big[\frac{3}{2}\ln(x^2+1) + \operatorname{arctg} x\Big]_0^1 = \frac{3}{2}\ln 2 + \frac{\pi}{4}.$$