Facoltà di Agraria

Corsi di Laurea in VIT e STAL
Modulo di Matematica
Esame del 03/02/2011
A.A. 2010/2011

Scritto		Voto
Teoria	Esercizi	

Istruzioni: apporre nome, cognome e numero di matricola su ogni foglio. Prima della consegna indicare nell'apposito spazio il numero totale di fogli di cui è composto l'elaborato. Svolgere solamente uno tra 10-b) e 11. Allegare lo svolgimento completo degli esercizi 9, 10 e 11. **Non è ammesso l'uso di libri, appunti e calcolatrici grafiche o programmabili.**

Cognome	Nome
Corso di Laurea $\boxed{VIT}$ $\boxed{STAL}$	Matricola
Vecchio ordinamento $\boxed{SI}$ $\boxed{NO}$	n. fogli allegati

1 Se $\lim_{x\to x_0} f(x) = +\infty$ e $\lim_{x\to x_0} g(x) = 0^-$, allora $\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)}$ è

A $-\infty$

B $+\infty$

C 0

D non ci sono elementi sufficienti per rispondere

2 Se f è una funzione derivabile due volte in $]a, b[$ e vale $f'(x) > 0$ e $f''(x) < 0$ in $]a, b[$, allora

A f è decrescente e concava in $]a, b[$

B f è crescente e convessa in $]a, b[$

C f è decrescente e convessa in $]a, b[$

D f è crescente e concava in $]a, b[$

3 L'equazione differenziale $y'' = (y + t)^2 - 5ty'$ è

A un'equazione lineare del primo ordine

B un'equazione lineare del secondo ordine

C un'equazione non lineare del primo ordine

D un'equazione non lineare del secondo ordine

4 Il grafico della funzione $f(x) = \dfrac{2^x + 1}{2^x + 5}$ rappresenta

A una retta

B una parabola

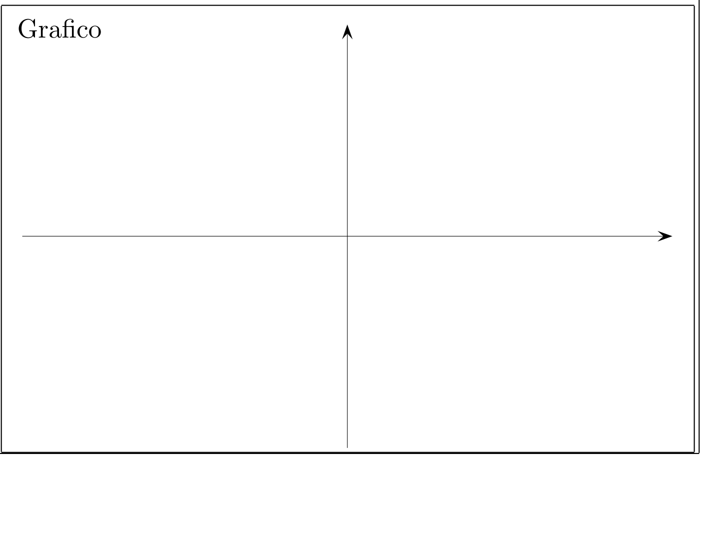
C un'iperbole

D nessuna delle precedenti

5 Per la funzione $f(x) = \log_{5/3} x$, scrivere il dominio $\mathcal{D}$, l'immagine $\mathcal{I}$, e rappresentare qualitativamente il grafico.

$\mathcal{D} =$

$\mathcal{I} =$



$\boxed{6}$ Per definizione, la derivata di una funzione $f(x)$ in x_0 è:

$\boxed{7}$ Enunciare il teorema fondamentale del calcolo integrale

$\boxed{8}$ Rappresentare il grafico di una funzione g che verifichi contemporaneamente le seguenti proprietà:

$$\lim_{x\to-\infty} g(x) = -3 \qquad \lim_{x\to1^-} g(x) = 2 \qquad \lim_{x\to1^+} g(x) = +\infty \qquad \lim_{x\to+\infty} g(x) = -\infty$$

$\boxed{9}$ Data la funzione

$$g(x) = \frac{x^3 + 9x^2}{x - 3}$$

a) determinare il dominio $\mathcal{D}$, b) studiare il segno di g; c) calcolare i limiti agli estremi del dominio; d) determinare gli intervalli in cui la funzione è crescente, quelli in cui è decrescente, e gli eventuali punti di massimo/minimo relativo; e) determinare gli eventuali asintoti; f) determinare l'equazione della retta tangente al grafico nel punto di ascissa $x_0 = 1$; g) disegnare un grafico approssimativo di g.

$\boxed{10}$ Dato il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' = \dfrac{2t^2}{4^y\sqrt{t^3+1}} \\ y(0) = 0 \end{cases}$$

a) dire se la funzione $y(t) = \log_4(t^3 + 1)$ è soluzione del problema;

b) determinare una soluzione del problema nel caso in cui non lo sia la funzione di cui al punto precedente.

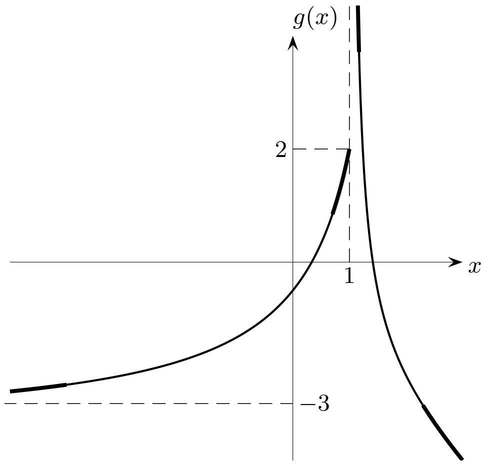
$\boxed{11}$ Calcolare i seguenti integrali

$$\int \left(\frac{2}{x^2+4} + \frac{x^3 5^x + x2^x}{x^3 2^x}\right) dx, \qquad \int_{-1}^{0} \frac{5t}{\sqrt[5]{2-t^2}}\, dt.$$

IMPORTANTE! Risolvere solamente uno tra 10-b) e 11.

Soluzioni dei quesiti dell'esame del 3 febbraio 2011

$\boxed{\mathbf{1}}$ A; $\boxed{\mathbf{2}}$ D; $\boxed{\mathbf{3}}$ D; $\boxed{\mathbf{4}}$ D; $\boxed{\mathbf{5}}$-$\boxed{\mathbf{6}}$-$\boxed{\mathbf{7}}$ consultare il libro di testo; $\boxed{\mathbf{8}}$ in neretto si evidenziano le informazioni date dai limiti. Il grafico della funzione è quindi completato a piacere (linea sottile), ad esempio:



$\boxed{\mathbf{9}}$ a) La funzione è definita se $x - 3 \neq 0$ cioè $x \neq 3$, perciò il dominio è $\mathcal{D} = \mathbb{R} \setminus \{3\}$ e la funzione (razionale) è ivi continua e derivabile.

b) Si osservi che la funzione può essere riscritta come

$$g(x) = \frac{x^2(x+9)}{x-3}$$

dunque il numeratore si annulla per $x = 0$ e $x = -9$ ed è positivo se $x > -9$; il denominatore è positivo se $x > 3$. La funzione è dunque positiva per $x < -9$ oppure $x > 3$, negativa per $-9 < x < 3$ e $x \neq 0$.

c) Ha senso andare a studiare i limiti in 3 e a $\pm\infty$. Si ha

$$\lim_{x\to\pm\infty} g(x) = \lim_{x\to\pm\infty} x^2 \frac{1+9/x}{1-3/x} = [+\infty \cdot 1] = +\infty, \qquad \lim_{x\to 3^{\pm}} g(x) = \left[\frac{108}{0^{\pm}}\right] = \pm\infty,$$

quindi la funzione non ammette massimo né minimo.

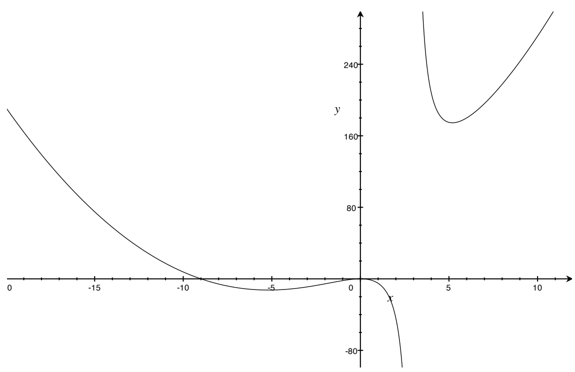
d) La derivata prima è

$$g'(x) = \frac{(3x^2+18x)(x-3) - (x^3+9x^2)\cdot 1}{(x-3)^2} = \frac{2x^3 - 54x}{(x-3)^2} = \frac{2x(x^2-27)}{(x-3)^2}.$$

Poiché il denominatore è sempre positivo nel dominio, la derivata prima è ≥ 0 se e solo se $x(x^2-27) \geq 0$ cioè se e solo se $x \geq \sqrt{27}$ oppure $-\sqrt{27} \leq x \leq 0$. Più precisamente

$$g'(x) \begin{cases} < 0, & \text{se } x \in]-\infty, -\sqrt{27}[\cup]0,3[\cup]3, \sqrt{27}[, \\ = 0, & \text{se } x = -\sqrt{27} \text{ oppure } x = 0 \text{ oppure } x = \sqrt{27}, \\ > 0, & \text{se } x \in]-\sqrt{27}, 0[\cup]\sqrt{27}, +\infty[, \end{cases}$$

perciò la funzione è decrescente in $]-\infty, -\sqrt{27}[$, in $]0,3[$ e in $]3,\sqrt{27}[$, mentre è crescente in $]-\sqrt{27}, 0[$ e in $]\sqrt{27}, +\infty[$. In $x = 0$ ammette un massimo relativo, in $x = \pm\sqrt{27}$ due punti di minimo relativo.



e) Dal punto c) segue che la retta $x = 3$ è un asintoto verticale. Inoltre, poiché

$$\lim_{x\to\pm\infty} \frac{g(x)}{x} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{x^3+9x^2}{x^2-3x} = \pm\infty,$$

la funzione non ammette asintoti obliqui/orizzontali a $\pm\infty$.

f) L'equazione della retta tangente al grafico nel generico punto $(x_0, g(x_0))$ è

$$y = (x - x_0)g'(x_0) + g(x_0).$$

Poiché $g(1) = -5$ e $g'(1) = -13$, l'equazione della retta cercata è

$$y = -13(x - 1) - 5.$$

10 a) Si ha $y'(t) = \frac{3t^2}{t^3+1}\log_4 \mathrm{e}$ e sostituendo si ottiene l'equazione

$$\frac{3t^2}{t^3+1}\log_4 \mathrm{e} = \frac{2t^2}{4^{\log_4(t^3+1)}\sqrt{t^3+1}} = \frac{2t^2}{(t^3+1)\sqrt{t^3+1}}$$

che non è identicamente soddisfatta (ad esempio, per $t = 1$ si ottiene $3\log_4 \mathrm{e}/2 \neq 1/\sqrt{2}$). La funzione non è dunque soluzione. Si osservi che la funzione soddisfa la seconda condizione, essendo $y(0) = 0$.

b) Scrivendo $y' = \frac{dy}{dt}$ e utilizzando il metodo di separazione delle variabili si ha

$$4^y\, dy = \frac{2t^2}{\sqrt{t^3+1}}\, dt$$

e integrando (utilizzando le tabelle)

$$\int 4^y\, dy = \int \frac{2t^2}{\sqrt{t^3+1}}\, dt \qquad \Longrightarrow \qquad \frac{4^y}{\ln 4} = \frac{4}{3}\sqrt{t^3+1} + c,$$

dove c è la generica costante d'integrazione; il secondo integrale è stato calcolato con la seconda tabella:

$$\int \frac{2t^2}{\sqrt{t^3+1}}\, dt = \frac{2}{3}\int (t^3+1)^{-1/2}(3t^2)\, dt = \frac{2}{3}\int (t^3+1)^{-1/2}(t^3+1)'\, dt = \frac{2}{3}\frac{(t^3+1)^{1/2}}{1/2} + c.$$

Si ottiene quindi

$$\frac{4^y}{\ln 4} = \frac{4}{3}\sqrt{t^3+1} + c \qquad \Longleftrightarrow \qquad y = \log_4\Big(\ln 4\big(\frac{4}{3}\sqrt{t^3+1} + c\big)\Big).$$

Imponendo la condizione $y(0) = 0$ (nella prima delle due equazioni qui sopra) si ha

$$\frac{1}{\ln 4} = \frac{4}{3} + c,$$

da cui si ricava $c = \frac{1}{\ln 4} - \frac{4}{3}$. La soluzione è quindi

$$y(t) = \log_4\Big(\frac{4\ln 4}{3}\sqrt{t^3+1} + 1 - \frac{4\ln 4}{3}\Big).$$

Alternativamente, si poteva utilizzare direttamente la formula risolutiva per le equazioni a variabili separabili (insieme alla formula fondamentale del calcolo integrale)

$$\int_0^y 4^z\, dz = \int_0^t \frac{2s^2}{\sqrt{s^3+1}}\, ds \quad \Longrightarrow \quad \Big[\frac{4^z}{\ln 4}\Big]_0^y = \Big[\frac{4}{3}\sqrt{s^3+1}\Big]_0^t$$
$$\Longrightarrow \quad \frac{4^y}{\ln 4} - \frac{1}{\ln 4} = \frac{4}{3}\sqrt{t^3+1} - \frac{4}{3}$$

che risolta rispetto a y fornisce la soluzione cercata.

11 Dalla prima tabella si ottiene

$$\int \Big(\frac{2}{x^2+4} + \frac{x^3 5^x + x 2^x}{x^3 2^x}\Big)\, dx = 2\int \frac{1}{x^2+4}\, dx + \int \Big(\frac{5}{2}\Big)^x dx + \int x^{-2}\, dx = \operatorname{arctg}\frac{x}{2} + \frac{(5/2)^x}{\ln(5/2)} - \frac{1}{x} + c,$$

con c costante arbitraria. Utilizzando invece la seconda tabella, si ha

$$\int_{-1}^0 \frac{5t}{\sqrt[5]{2-t^2}}\, dt = -\frac{5}{2}\int_{-1}^0 (2-t^2)^{-1/5}(2-t^2)'\, dt = -\frac{5}{2}\Big[\frac{(2-t^2)^{4/5}}{4/5}\Big]_{-1}^0 = -\frac{25}{8}(2^{4/5} - 1).$$

Facoltà di Agraria

Corsi di Laurea in VIT e STAL
Modulo di Matematica
Esame del 03/02/2011
A.A. 2010/2011

Scritto		Voto
Teoria	Esercizi	

Istruzioni: apporre nome, cognome e numero di matricola su ogni foglio. Prima della consegna indicare nell'apposito spazio il numero totale di fogli di cui è composto l'elaborato. Svolgere solamente uno tra 10-b) e 11. Allegare lo svolgimento completo degli esercizi 9, 10 e 11. **Non è ammesso l'uso di libri, appunti e calcolatrici grafiche o programmabili.**

Cognome	Nome
Corso di Laurea *VIT* *STAL*	Matricola
Vecchio ordinamento *SI* *NO*	n. fogli allegati

1 Se $\lim_{x\to x_0} f(x) = +\infty$ e $\lim_{x\to x_0} g(x) = -\infty$, allora $\lim_{x\to x_0} f(x) - g(x)$ è

A $-\infty$

B $+\infty$

C 0

D non ci sono elementi sufficienti per rispondere

2 Se f è una funzione derivabile due volte in $]a, b[$ e vale $f'(x_0) > 0$ con $x_0 \in]a, b[$, allora

A x_0 è sempre punto di minimo relativo per f

B x_0 è sempre punto di massimo relativo per f

C x_0 è sempre punto di flesso relativo per f

D nessuna delle precedenti

3 L'equazione differenziale $y' = \ln(3t - 5y)$ è

A un'equazione lineare del primo ordine

B un'equazione lineare del secondo ordine

C un'equazione non lineare del primo ordine

D un'equazione non lineare del secondo ordine

4 Il grafico della funzione $f(x) = \frac{3}{2}x^2 + \frac{1}{5}x + \frac{2}{x}$ rappresenta

A una retta

B una parabola

C un'iperbole

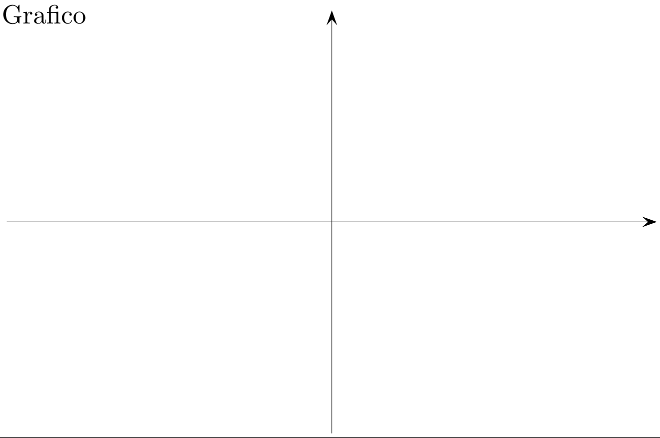
D nessuna delle precedenti

5 Per la funzione $f(x) = \sqrt[7]{x}$, scrivere il dominio $\mathcal{D}$, l'immagine $\mathcal{I}$, e rappresentare qualitativamente il grafico.

$\mathcal{D} =$

$\mathcal{I} =$

Grafico



6 L'integrale definito di una funzione positiva f su $[a, b]$ rappresenta:

7 Enunciare il teorema dei punti critici

8 Rappresentare il grafico di una funzione g che verifichi contemporaneamente le seguenti proprietà:

$$\lim_{x\to-\infty} g(x) = +\infty \qquad \lim_{x\to-2^-} g(x) = -\infty \qquad \lim_{x\to-2^+} g(x) = -\infty \qquad \lim_{x\to+\infty} g(x) = 5$$

9 Data la funzione

$$g(x) = \frac{3x^2 - x^3}{x+1}$$

a) determinare il dominio $\mathcal{D}$, b) studiare il segno di g; c) calcolare i limiti agli estremi del dominio; d) determinare gli intervalli in cui la funzione è crescente, quelli in cui è decrescente, e gli eventuali punti di massimo/minimo relativo; e) determinare gli eventuali asintoti; f) determinare l'equazione della retta tangente al grafico nel punto di ascissa $x_0 = 1$; g) disegnare un grafico approssimativo di g.

10 Dato il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' = \dfrac{t}{5^y\sqrt{2-t^2}} \\ y(1) = 0 \end{cases}$$

a) dire se la funzione $y(t) = \log_5(2 - t^2)$ è soluzione del problema;

b) determinare una soluzione del problema nel caso in cui non lo sia la funzione di cui al punto precedente.

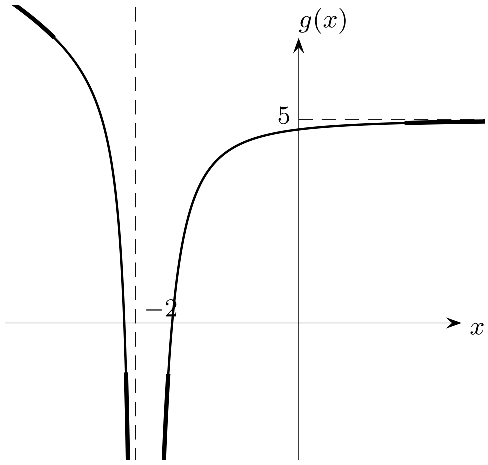
11 Calcolare i seguenti integrali

$$\int \left(\frac{x^2 2^x - x 3^x}{x^2 3^x} - \frac{3}{\sqrt{4-x^2}} \right) dx, \qquad \int_0^1 \frac{t^2}{\sqrt[3]{t^3+1}}\, dt.$$

IMPORTANTE! Risolvere solamente uno tra 10-b) e 11.

Soluzioni dei quesiti dell'esame del 3 febbraio 2011

$\boxed{1}$ B; $\boxed{2}$ D; $\boxed{3}$ C; $\boxed{4}$ D; $\boxed{5}$-$\boxed{6}$-$\boxed{7}$ consultare il libro di testo; $\boxed{8}$ in neretto si evidenziano le informazioni date dai limiti. Il grafico della funzione è quindi completato a piacere (linea sottile), ad esempio:



$\boxed{9}$ a) La funzione è definita se $x+1 \neq 0$ cioè $x \neq -1$, perciò il dominio è $\mathcal{D} = \mathbb{R} \setminus \{-1\}$ e la funzione (razionale) è ivi continua e derivabile.

b) Si osservi che la funzione può essere riscritta come

$$g(x) = \frac{x^2(3-x)}{x+1}$$

dunque il numeratore si annulla per $x = 0$ e $x = 3$ ed è positivo se $x < 3$; il denominatore è positivo se $x > -1$. La funzione è dunque negativa per $x < -1$ oppure $x > 3$, positiva per $-1 < x < 3$ e $x \neq 0$.

c) Ha senso andare a studiare i limiti in -1 e a $\pm\infty$. Si ha

$$\lim_{x\to\pm\infty} g(x) = \lim_{x\to\pm\infty} x^2 \frac{3/x-1}{1+1/x} = [+\infty \cdot -1] = -\infty, \qquad \lim_{x\to -1^\pm} g(x) = \left[\frac{4}{0^\pm}\right] = \pm\infty,$$

quindi la funzione non ammette massimo né minimo.

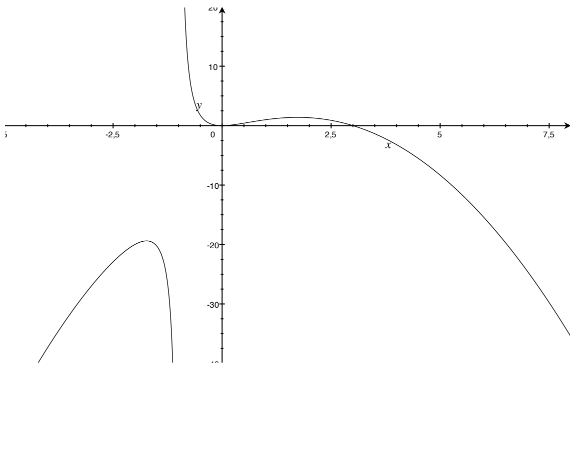
d) La derivata prima è

$$g'(x) = \frac{(6x-3x^2)(x+1)-(3x^2-x^3)\cdot 1}{(x+1)^2} = \frac{6x-2x^3}{(x+1)^2} = \frac{2x(3-x^2)}{(x+1)^2}.$$

Poiché il denominatore è sempre positivo nel dominio, la derivata prima è ≥ 0 se e solo se $x(3-x^2) \geq 0$ cioè se e solo se $x \leq -\sqrt{3}$ oppure $0 \leq x \leq \sqrt{3}$. Più precisamente

$$g'(x) \begin{cases} > 0, & \text{se } x \in]-\infty, -\sqrt{3}[\cup]0, \sqrt{3}[, \\ = 0, & \text{se } x = -\sqrt{3} \text{ oppure } x = 0 \text{ oppure } x = \sqrt{3}, \\ < 0, & \text{se } x \in]-\sqrt{3}, -1[\cup]-1, 0[\cup]\sqrt{3}, +\infty[, \end{cases}$$

perciò la funzione è crescente in $]-\infty, -\sqrt{3}[$ e in $]0, \sqrt{3}[$, mentre è decrescente in $]-\sqrt{3}, -1[$, in $]-1, 0[$ e in $]\sqrt{3}, +\infty[$. In $x = 0$ ammette un minimo relativo, in $x = \pm\sqrt{3}$ due punti di massimo relativo.



e) Dal punto c) segue che la retta $x = -1$ è un asintoto verticale. Inoltre, poiché

$$\lim_{x\to\pm\infty} \frac{g(x)}{x} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{3x^2 - x^3}{x^2 + x} = \mp\infty,$$

la funzione non ammette asintoti obliqui/orizzontali a $\pm\infty$.

f) L'equazione della retta tangente al grafico nel generico punto $(x_0, g(x_0))$ è

$$y = (x - x_0)g'(x_0) + g(x_0).$$

Poiché $g(1) = 1$ e $g'(1) = 1$, l'equazione della retta cercata è

$$y = (x - 1) + 1 \text{ cioè } y = x$$

10 a) Si ha $y'(t) = \frac{-2t}{2-t^2} \log_5 \mathrm{e}$ e sostituendo si ottiene l'equazione

$$\frac{-2t}{2 - t^2} \log_5 \mathrm{e} = \frac{t}{5^{\log_5(2-t^2)}\sqrt{2 - t^2}} = \frac{t}{(2 - t^2)\sqrt{2 - t^2}}$$

che non è identicamente soddisfatta (ad esempio, per $t = 1$ si ottiene $-2\log_5 \mathrm{e} \neq 1$). La funzione non è dunque soluzione. Si osservi che la funzione soddisfa la seconda condizione, essendo $y(1) = 0$.

b) Scrivendo $y' = \frac{dy}{dt}$ e utilizzando il metodo di separazione delle variabili si ha

$$5^y\, dy = \frac{t}{\sqrt{2 - t^2}}\, dt$$

e integrando (utilizzando le tabelle)

$$\int 5^y\, dy = \int \frac{t}{\sqrt{2 - t^2}}\, dt \qquad \Longrightarrow \qquad \frac{5^y}{\ln 5} = -\sqrt{2 - t^2} + c,$$

dove c è la generica costante d'integrazione; il secondo integrale è stato calcolato con la seconda tabella:

$$\int \frac{t}{\sqrt{2 - t^2}}\, dt = -\frac{1}{2}\int (2 - t^2)^{-1/2}(-2t)\, dt = -\frac{1}{2}\int (2 - t^2)^{-1/2}(2 - t^2)'\, dt = -\frac{1}{2}\frac{(2 - t^2)^{1/2}}{1/2} + c.$$

Si ottiene quindi

$$\frac{5^y}{\ln 5} = -\sqrt{2 - t^2} + c \qquad \Longleftrightarrow \qquad y = \log_5\Big(\ln 5\big(-\sqrt{2 - t^2} + c\big)\Big).$$

Imponendo la condizione $y(1) = 0$ (nella prima delle due equazioni qui sopra) si ha

$$\frac{1}{\ln 5} = -1 + c,$$

da cui si ricava $c = \frac{1}{\ln 5} + 1$. La soluzione è quindi

$$y(t) = \log_5\Big(1 + \ln 5 - \ln 5\sqrt{2 - t^2}\Big).$$

Alternativamente, si poteva utilizzare direttamente la formula risolutiva per le equazioni a variabili separabili (insieme alla formula fondamentale del calcolo integrale)

$$\int_0^y 5^z\, dz = \int_1^t \frac{s}{\sqrt{2 - s^2}}\, ds \quad \Longrightarrow \quad \left[\frac{5^z}{\ln 5}\right]_0^y = \left[-\sqrt{2 - s^2}\right]_1^t$$

$$\Longrightarrow \quad \frac{5^y}{\ln 5} - \frac{1}{\ln 5} = 1 - \sqrt{2 - t^2}$$

che risolta rispetto a y fornisce la soluzione cercata.

11 Dalla prima tabella si ottiene

$$\int \Big(\frac{x^2 2^x - x 3^x}{x^2 3^x} - \frac{3}{\sqrt{4 - x^2}}\Big)\, dx = \int \Big(\frac{2}{3}\Big)^x dx - \int \frac{1}{x}\, dx - \int \frac{3}{\sqrt{4 - x^2}}\, dx = \frac{(2/3)^x}{\ln(2/3)} - \ln|x| - 3\,\mathrm{arcsen}\,\frac{x}{2} + c,$$

con c costante arbitraria. Utilizzando invece la seconda tabella, si ha

$$\int_0^1 \frac{t^2}{\sqrt[3]{t^3 + 1}}\, dt = \frac{1}{3}\int_0^1 (t^3 + 1)^{-1/3}(t^3 + 1)'\, dt = \frac{1}{3}\Big[\frac{(t^3 + 1)^{2/3}}{2/3}\Big]_0^1 = \frac{1}{2}(2^{2/3} - 1).$$

Facoltà di Agraria

Corsi di Laurea in VIT e STAL
Modulo di Matematica
Esame del 03/02/2011
A.A. 2010/2011

Scritto		Voto
Teoria	Esercizi	

Istruzioni: apporre nome, cognome e numero di matricola su ogni foglio. Prima della consegna indicare nell'apposito spazio il numero totale di fogli di cui è composto l'elaborato. Svolgere solamente uno tra 10-b) e 11. Allegare lo svolgimento completo degli esercizi 9, 10 e 11. **Non è ammesso l'uso di libri, appunti e calcolatrici grafiche o programmabili.**

Cognome	Nome
Corso di Laurea *VIT* *STAL*	Matricola
Vecchio ordinamento *SI* *NO*	n. fogli allegati

1 Se $\lim_{x\to x_0} f(x) = 0^-$ e $\lim_{x\to x_0} g(x) = +\infty$, allora $\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)}$ è

A $-\infty$

B $+\infty$

C 0

D non ci sono elementi sufficienti per rispondere

2 Se f è una funzione derivabile due volte in $]a,b[$ e vale $f''(x_0) = 0$ e $f'(x_0) > 0$ con $x_0 \in]a,b[$, allora

A x_0 è sempre punto di minimo relativo per f

B x_0 è sempre punto di massimo relativo per f

C x_0 è sempre punto di flesso relativo per f

D nessuna delle precedenti

3 L'equazione differenziale $y' = \cos t - y \ln t^2$ è

A un'equazione lineare del primo ordine

B un'equazione lineare del secondo ordine

C un'equazione non lineare del primo ordine

D un'equazione non lineare del secondo ordine

4 Il grafico della funzione $f(x) = \frac{1}{2x^2+2x+1}$ rappresenta

A una retta

B una parabola

C un'iperbole

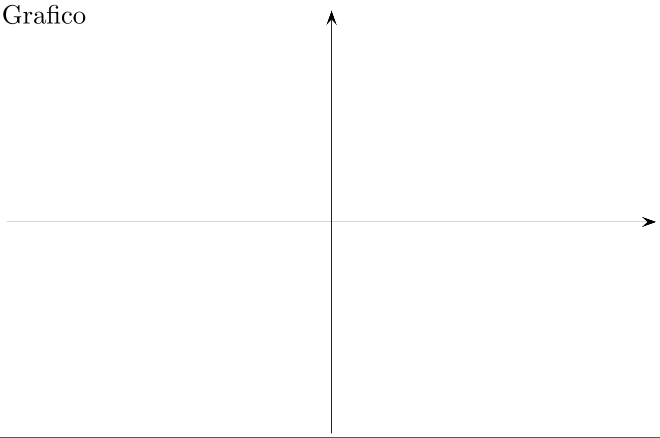
D nessuna delle precedenti

5 Per la funzione $f(x) = \operatorname{sen} x$, scrivere il dominio $\mathcal{D}$, l'immagine $\mathcal{I}$, e rappresentare qualitativamente il grafico.

$\mathcal{D} =$

$\mathcal{I} =$

Grafico



6 La derivata di una funzione f nel punto x_0 rappresenta:

7 Descrivere precisamente le relazioni che esistono tra la derivata seconda e il grafico di una funzione f

8 Rappresentare il grafico di una funzione g che verifichi contemporaneamente le seguenti proprietà:

$$\lim_{x\to-\infty} g(x) = 3 \qquad \lim_{x\to-1^-} g(x) = +\infty \qquad \lim_{x\to-1^+} g(x) = +\infty \qquad \lim_{x\to+\infty} g(x) = -2$$

9 Data la funzione

$$g(x) = \frac{x^3 - 6x^2}{x+2}$$

a) determinare il dominio $\mathcal{D}$, b) studiare il segno di g; c) calcolare i limiti agli estremi del dominio; d) determinare gli intervalli in cui la funzione è crescente, quelli in cui è decrescente, e gli eventuali punti di massimo/minimo relativo; e) determinare gli eventuali asintoti; f) determinare l'equazione della retta tangente al grafico nel punto di ascissa $x_0 = -1$; g) disegnare un grafico approssimativo di g.

10 Dato il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' = \dfrac{t}{3^y\sqrt{2t^2+1}} \\ y(0) = 0 \end{cases}$$

a) dire se la funzione $y(t) = \log_3(2t^2+1)$ è soluzione del problema;

b) determinare una soluzione del problema nel caso in cui non lo sia la funzione di cui al punto precedente.

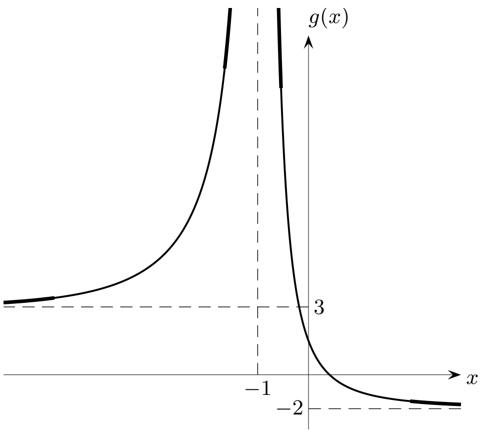
11 Calcolare i seguenti integrali

$$\int \Big(\frac{2}{\sqrt{9-x^2}} + \frac{x^3 5^x + x^2 4^x}{x^3 4^x}\Big)\, dx, \qquad \int_0^1 \frac{2t^4}{\sqrt{t^5+3}}\, dt.$$

IMPORTANTE! Risolvere solamente uno tra 10-b) e 11.

Soluzioni dei quesiti dell'esame del 3 febbraio 2011

$\boxed{1}$ C; $\boxed{2}$ D; $\boxed{3}$ A; $\boxed{4}$ D; $\boxed{5}$-$\boxed{6}$-$\boxed{7}$ consultare il libro di testo; $\boxed{8}$ in neretto si evidenziano le informazioni date dai limiti. Il grafico della funzione è quindi completato a piacere (linea sottile), ad esempio:



$\boxed{9}$ a) La funzione è definita se $x+2 \neq 0$ cioè $x \neq -2$, perciò il dominio è $\mathcal{D} = \mathbb{R} \setminus \{-2\}$ e la funzione (razionale) è ivi continua e derivabile.

b) Si osservi che la funzione può essere riscritta come

$$g(x) = \frac{x^2(x-6)}{x+2}$$

dunque il numeratore si annulla per $x = 0$ e $x = 6$ ed è positivo se $x > 6$; il denominatore è positivo se $x > -2$. La funzione è dunque positiva per $x < -2$ oppure $x > 6$, negativa per $-2 < x < 6$ e $x \neq 0$.

c) Ha senso andare a studiare i limiti in -2 e a $\pm\infty$. Si ha

$$\lim_{x\to\pm\infty} g(x) = \lim_{x\to\pm\infty} x^2 \frac{1-6/x}{1+2/x} = [+\infty \cdot 1] = +\infty, \qquad \lim_{x\to -2^{\pm}} g(x) = \left[\frac{-32}{0^{\pm}}\right] = \mp\infty,$$

quindi la funzione non ammette massimo né minimo.

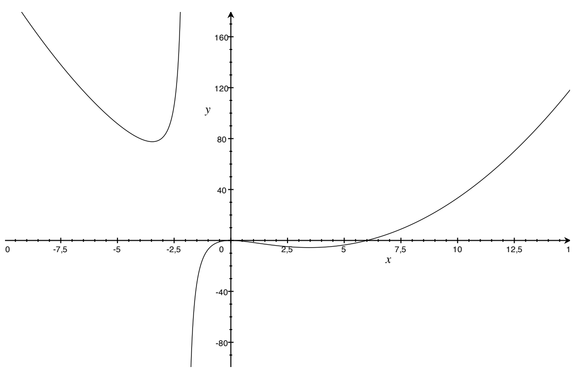
d) La derivata prima è

$$g'(x) = \frac{(3x^2-12x)(x+2) - (x^3-6x^2)\cdot 1}{(x+2)^2} = \frac{2x^3-24x}{(x+2)^2} = \frac{2x(x^2-12)}{(x+2)^2}.$$

Poiché il denominatore è sempre positivo nel dominio, la derivata prima è ≥ 0 se e solo se $x(x^2-12) \geq 0$ cioè se e solo se $x \geq \sqrt{12}$ oppure $-\sqrt{12} \leq x \leq 0$. Più precisamente

$$g'(x) \begin{cases} < 0, & \text{se } x \in]-\infty, -\sqrt{12}[\cup]0, \sqrt{12}[, \\ = 0, & \text{se } x = -\sqrt{12} \text{ oppure } x = 0 \text{ oppure } x = \sqrt{12}, \\ > 0, & \text{se } x \in]-\sqrt{12}, -2[\cup]-2, 0[\cup]\sqrt{12}, +\infty[, \end{cases}$$

perciò la funzione è decrescente in $]-\infty, -\sqrt{12}[$ e in $]0, \sqrt{12}[$, mentre è crescente in $]-\sqrt{12}, -2[$, in $]-2, 0[$ e in $]\sqrt{12}, +\infty[$. In $x = 0$ ammette un massimo relativo, in $x = \pm\sqrt{12}$ due punti di minimo relativo.



e) Dal punto c) segue che la retta $x = -2$ è un asintoto verticale. Inoltre, poiché

$$\lim_{x\to\pm\infty} \frac{g(x)}{x} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{x^3 - 6x^2}{x^2 + 2x} = \pm\infty,$$

la funzione non ammette asintoti obliqui/orizzontali a $\pm\infty$.
f) L'equazione della retta tangente al grafico nel generico punto $(x_0, g(x_0))$ è

$$y = (x - x_0)g'(x_0) + g(x_0).$$

Poiché $g(-1) = -7$ e $g'(-1) = 22$, l'equazione della retta cercata è

$$y = 22(x + 1) - 7.$$

10 a) Si ha $y'(t) = \frac{4t}{2t^2+1} \log_3 \mathrm{e}$ e sostituendo si ottiene l'equazione

$$\frac{4t}{2t^2+1} \log_3 \mathrm{e} = \frac{t}{3^{\log_3(2t^2+1)}\sqrt{2t^2+1}} = \frac{t}{(2t^2+1)\sqrt{2t^2+1}}$$

che non è identicamente soddisfatta (ad esempio, per $t = 1$ si ottiene $4\log_3 \mathrm{e}/3 \neq 1/(3\sqrt{3})$). La funzione non è dunque soluzione. Si osservi che la funzione soddisfa la seconda condizione, essendo $y(0) = 0$.
b) Scrivendo $y' = \frac{dy}{dt}$ e utilizzando il metodo di separazione delle variabili si ha

$$3^y\, dy = \frac{t}{\sqrt{2t^2+1}}\, dt$$

e integrando (utilizzando le tabelle)

$$\int 3^y\, dy = \int \frac{t}{\sqrt{2t^2+1}}\, dt \qquad \Longrightarrow \qquad \frac{3^y}{\ln 3} = \frac{1}{2}\sqrt{2t^2+1} + c,$$

dove c è la generica costante d'integrazione; il secondo integrale è stato calcolato con la seconda tabella:

$$\int \frac{t}{\sqrt{2t^2+1}}\, dt = \frac{1}{4}\int (2t^2+1)^{-1/2}(4t)\, dt = \frac{1}{4}\int (2t^2+1)^{-1/2}(2t^2+1)'\, dt = \frac{1}{4}\frac{(2t^2+1)^{1/2}}{1/2} + c.$$

Si ottiene quindi

$$\frac{3^y}{\ln 3} = \frac{1}{2}\sqrt{2t^2+1} + c \qquad \Longleftrightarrow \qquad y = \log_3\Big(\ln 3\big(\frac{1}{2}\sqrt{2t^2+1} + c\big)\Big).$$

Imponendo la condizione $y(0) = 0$ (nella prima delle due equazioni qui sopra) si ha

$$\frac{1}{\ln 3} = \frac{1}{2} + c,$$

da cui si ricava $c = \frac{1}{\ln 3} - \frac{1}{2}$. La soluzione è quindi

$$y(t) = \log_3\Big(\frac{\ln 3}{2}\sqrt{2t^2+1} + 1 - \frac{\ln 3}{2}\Big).$$

Alternativamente, si poteva utilizzare direttamente la formula risolutiva per le equazioni a variabili separabili (insieme alla formula fondamentale del calcolo integrale)

$$\int_0^y 3^z\, dz = \int_0^t \frac{s}{\sqrt{2s^2+1}}\, ds \quad \Longrightarrow \quad \left[\frac{3^z}{\ln 3}\right]_0^y = \left[\frac{1}{2}\sqrt{2s^2+1}\right]_0^t$$
$$\Longrightarrow \quad \frac{3^y}{\ln 3} - \frac{1}{\ln 3} = \frac{1}{2}\sqrt{2t^2+1} - \frac{1}{2}$$

che risolta rispetto a y fornisce la soluzione cercata.

11 Dalla prima tabella si ottiene

$$\int \Big(\frac{2}{\sqrt{9-x^2}} + \frac{x^3 5^x + x^2 4^x}{x^3 4^x}\Big)\, dx = \int \frac{2}{\sqrt{9-x^2}}\, dx + \int \Big(\frac{5}{4}\Big)^x dx + \int \frac{1}{x}\, dx = 2\,\mathrm{arcsen}\,\frac{x}{3} + \frac{(5/4)^x}{\ln(5/4)} + \ln|x| + c,$$

con c costante arbitraria. Utilizzando invece la seconda tabella, si ha

$$\int_0^1 \frac{2t^4}{\sqrt{t^5+3}}\, dt = \frac{2}{5}\int_0^1 (t^5+3)^{-1/2}(t^5+3)'\, dt = \frac{2}{5}\Big[\frac{(t^5+3)^{1/2}}{1/2}\Big]_0^1 = \frac{4}{5}(2 - \sqrt{3}).$$

Facoltà di Agraria

Corsi di Laurea in VIT e STAL
Modulo di Matematica
Esame del 03/02/2011
A.A. 2010/2011

Scritto		Voto
Teoria	Esercizi	

Istruzioni: apporre nome, cognome e numero di matricola su ogni foglio. Prima della consegna indicare nell'apposito spazio il numero totale di fogli di cui è composto l'elaborato. Svolgere solamente uno tra 10-b) e 11. Allegare lo svolgimento completo degli esercizi 9, 10 e 11. **Non è ammesso l'uso di libri, appunti e calcolatrici grafiche o programmabili.**

Cognome	Nome
Corso di Laurea $\boxed{VIT}$ $\boxed{STAL}$	Matricola
Vecchio ordinamento $\boxed{SI}$ $\boxed{NO}$	n. fogli allegati

1 Se $\lim_{x\to x_0} f(x) = 0^+$ e $\lim_{x\to x_0} g(x) = -\infty$, allora $\lim_{x\to x_0} f(x)g(x)$ è

- A $-\infty$
- B $+\infty$
- C 0
- D non ci sono elementi sufficienti per rispondere

2 Se f è una funzione derivabile due volte in $]a, b[$ e vale $f'(x_0) = 0$ e $f''(x_0) < 0$ con $x_0 \in]a, b[$, allora

- A x_0 è sempre punto di minimo relativo per f
- B x_0 è sempre punto di massimo relativo per f
- C x_0 è sempre punto di flesso relativo per f
- D nessuna delle precedenti

3 L'equazione differenziale $y'' = y\,\mathrm{tg}(t^2 + 1) + 3y'$ è

- A un'equazione lineare del primo ordine
- B un'equazione lineare del secondo ordine
- C un'equazione non lineare del primo ordine
- D un'equazione non lineare del secondo ordine

4 Il grafico della funzione $f(x) = 3(x^2 + 1)^2$ rappresenta

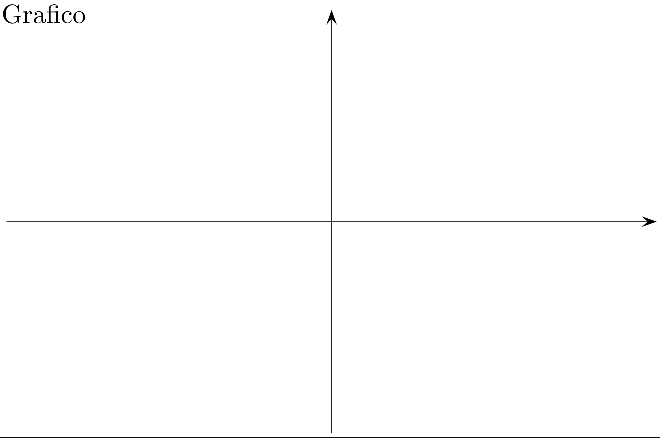
- A una retta
- B una parabola
- C un'iperbole
- D nessuna delle precedenti

5 Per la funzione $f(x) = (2/3)^x$, scrivere il dominio $\mathcal{D}$, l'immagine $\mathcal{I}$, e rappresentare qualitativamente il grafico.

$\mathcal{D} =$

$\mathcal{I} =$

Grafico



$\boxed{6}$ Per definizione, una primitiva di una funzione $f(x)$ in $]a, b[$ è:

$\boxed{7}$ Descrivere con precisione le relazioni che intercorrono tra la derivata di una funzione e le sue proprietà di monotonia.

$\boxed{8}$ Rappresentare il grafico di una funzione g che verifichi contemporaneamente le seguenti proprietà:

$$\lim_{x\to-\infty} g(x) = -3 \qquad \lim_{x\to 1^-} g(x) = 2 \qquad \lim_{x\to 1^+} g(x) = +\infty \qquad \lim_{x\to+\infty} g(x) = -\infty$$

$\boxed{9}$ Data la funzione

$$g(x) = \frac{x^3 + x^2}{1 - 3x}$$

a) determinare il dominio $\mathcal{D}$, b) studiare il segno di g; c) calcolare i limiti agli estremi del dominio; d) determinare gli intervalli in cui la funzione è crescente, quelli in cui è decrescente, e gli eventuali punti di massimo/minimo relativo; e) determinare gli eventuali asintoti; f) determinare l'equazione della retta tangente al grafico nel punto di ascissa $x_0 = 1$; g) disegnare un grafico approssimativo di g.

$\boxed{10}$ Dato il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' = \dfrac{t^3}{2^y\sqrt{t^4+1}} \\ y(0) = 0 \end{cases}$$

a) dire se la funzione $y(t) = \log_2(t^4 + 1)$ è soluzione del problema;

b) determinare una soluzione del problema nel caso in cui non lo sia la funzione di cui al punto precedente.

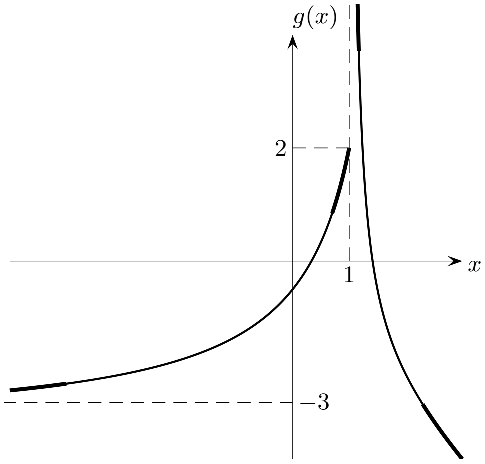
$\boxed{11}$ Calcolare i seguenti integrali

$$\int \left(\frac{4}{\cos^2 x} - \frac{5^x - x3^x}{x5^x}\right) dx, \qquad \int_{-1}^{0} \frac{3t}{\sqrt[5]{3+t^2}}\, dt.$$

IMPORTANTE! Risolvere solamente uno tra 10-b) e 11.

Soluzioni dei quesiti dell'esame del 3 febbraio 2011

$\boxed{\mathbf{1}}$ D; $\boxed{\mathbf{2}}$ B; $\boxed{\mathbf{3}}$ B; $\boxed{\mathbf{4}}$ D; $\boxed{\mathbf{5}}$-$\boxed{\mathbf{6}}$-$\boxed{\mathbf{7}}$ consultare il libro di testo; $\boxed{\mathbf{8}}$ in neretto si evidenziano le informazioni date dai limiti. Il grafico della funzione è quindi completato a piacere (linea sottile), ad esempio:



$\boxed{\mathbf{9}}$ a) La funzione è definita se $1-3x \neq 0$ cioè $x \neq 1/3$, perciò il dominio è $\mathcal{D} = \mathbb{R} \setminus \{1/3\}$ e la funzione (razionale) è ivi continua e derivabile.

b) Si osservi che la funzione può essere riscritta come

$$g(x) = \frac{x^2(x+1)}{1-3x}$$

dunque il numeratore si annulla per $x = 0$ e $x = -1$ ed è positivo se $x > -1$; il denominatore è positivo se $x < 1/3$. La funzione è dunque negativa per $x < -1$ oppure $x > 1/3$, positiva per $-1 < x < 1/3$ e $x \neq 0$.

c) Ha senso andare a studiare i limiti in $1/3$ e a $\pm\infty$. Si ha

$$\lim_{x\to\pm\infty} g(x) = \lim_{x\to\pm\infty} x^2 \frac{1+1/x}{1/x-3} = \left[+\infty \cdot -\frac{1}{3}\right] = -\infty, \qquad \lim_{x\to(1/3)^\pm} g(x) = \left[\frac{4/27}{0^\mp}\right] = \mp\infty,$$

quindi la funzione non ammette massimo né minimo.

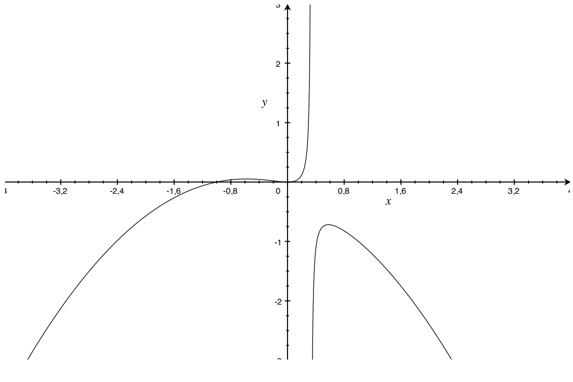
d) La derivata prima è

$$g'(x) = \frac{(3x^2+2x)(1-3x)-(x^3+x^2)\cdot(-3)}{(1-3x)^2} = \frac{2x-6x^3}{(1-3x)^2} = \frac{2x(1-3x^2)}{(1-3x)^2}.$$

Poiché il denominatore è sempre positivo nel dominio, la derivata prima è ≥ 0 se e solo se $x(1-3x^2) \geq 0$ cioè se e solo se $x \leq -1/\sqrt{3}$ oppure $0 \leq x \leq 1/\sqrt{3}$. Più precisamente

$$g'(x) \begin{cases} > 0, & \text{se } x \in]-\infty, -1/\sqrt{3}[\cup]0, 1/3[\cup]1/3, 1/\sqrt{3}[, \\ = 0, & \text{se } x = -1/\sqrt{3} \text{ oppure } x = 0 \text{ oppure } x = 1/\sqrt{3}, \\ < 0, & \text{se } x \in]-1/\sqrt{3}, 0[\cup]1/\sqrt{3}, +\infty[, \end{cases}$$

perciò la funzione è crescente in $]-\infty, -1/\sqrt{3}[$, in $]0, 1/3[$ e in $]1/3, 1/\sqrt{3}[$, mentre è decrescente in $]-1/\sqrt{3}, 0[$ e in $]1/\sqrt{3}, +\infty[$. In $x = 0$ ammette un minimo relativo, in $x = \pm 1/\sqrt{3}$ due punti di massimo relativo.



e) Dal punto c) segue che la retta $x = 1/3$ è un asintoto verticale. Inoltre, poiché

$$\lim_{x\to\pm\infty} \frac{g(x)}{x} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{x^3 + x^2}{x - 3x^2} = \mp\infty,$$

la funzione non ammette asintoti obliqui/orizzontali a $\pm\infty$.

f) L'equazione della retta tangente al grafico nel generico punto $(x_0, g(x_0))$ è

$$y = (x - x_0)g'(x_0) + g(x_0).$$

Poiché $g(1) = -1$ e $g'(1) = -1$, l'equazione della retta cercata è

$$y = -(x - 1) - 1.$$

$\boxed{\mathbf{10}}$ a) Si ha $y'(t) = \frac{4t^3}{t^4+1} \log_2 \mathrm{e}$ e sostituendo si ottiene l'equazione

$$\frac{4t^3}{t^4 + 1} \log_2 \mathrm{e} = \frac{t^3}{2^{\log_2(t^4+1)}\sqrt{t^4 + 1}} = \frac{t^3}{(t^4 + 1)\sqrt{t^4 + 1}}$$

che non è identicamente soddisfatta (ad esempio, per $t = 1$ si ottiene $2 \log_2 \mathrm{e} \neq 1/(2\sqrt{2})$). La funzione non è dunque soluzione. Si osservi che la funzione soddisfa la seconda condizione, essendo $y(0) = 0$.

b) Scrivendo $y' = \frac{dy}{dt}$ e utilizzando il metodo di separazione delle variabili si ha

$$2^y\, dy = \frac{t^3}{\sqrt{t^4 + 1}}\, dt$$

e integrando (utilizzando le tabelle)

$$\int 2^y\, dy = \int \frac{t^3}{\sqrt{t^4 + 1}}\, dt \qquad \Longrightarrow \qquad \frac{2^y}{\ln 2} = \frac{1}{2}\sqrt{t^4 + 1} + c,$$

dove c è la generica costante d'integrazione; il secondo integrale è stato calcolato con la seconda tabella:

$$\int \frac{t^3}{\sqrt{t^4 + 1}}\, dt = \frac{1}{4}\int (t^4 + 1)^{-1/2}(4t^3)\, dt = \frac{1}{4}\int (t^4 + 1)^{-1/2}(t^4 + 1)'\, dt = \frac{1}{4}\frac{(t^4 + 1)^{1/2}}{1/2} + c.$$

Si ottiene quindi

$$\frac{2^y}{\ln 2} = \frac{1}{2}\sqrt{t^4 + 1} + c \qquad \Longleftrightarrow \qquad y = \log_2 \Big(\ln 2 \big(\frac{1}{2}\sqrt{t^4 + 1} + c\big)\Big).$$

Imponendo la condizione $y(0) = 0$ (nella prima delle due equazioni qui sopra) si ha

$$\frac{1}{\ln 2} = \frac{1}{2} + c,$$

da cui si ricava $c = \frac{1}{\ln 2} - \frac{1}{2}$. La soluzione è quindi

$$y(t) = \log_2 \Big(\frac{\ln 2}{2}\sqrt{t^4 + 1} + 1 - \frac{\ln 2}{2}\Big).$$

Alternativamente, si poteva utilizzare direttamente la formula risolutiva per le equazioni a variabili separabili (insieme alla formula fondamentale del calcolo integrale)

$$\begin{aligned} \int_0^y 2^z\, dz = \int_0^t \frac{s^3}{\sqrt{s^4 + 1}}\, ds \quad &\Longrightarrow \quad \Big[\frac{2^z}{\ln 2}\Big]_0^y = \Big[\frac{1}{2}\sqrt{s^4 + 1}\Big]_0^t \\ &\Longrightarrow \quad \frac{2^y}{\ln 2} - \frac{1}{\ln 2} = \frac{1}{2}\sqrt{t^4 + 1} - \frac{1}{2} \end{aligned}$$

che risolta rispetto a y fornisce la soluzione cercata.

$\boxed{\mathbf{11}}$ Dalla prima tabella si ottiene

$$\int \Big(\frac{4}{\cos^2 x} - \frac{5^x - x3^x}{x5^x}\Big)\, dx = 4\int \frac{1}{\cos^2 x}\, dx - \int \frac{1}{x}\, dx + \int \Big(\frac{3}{5}\Big)^x\, dx = 4 \operatorname{tg} x - \ln|x| + \frac{(3/5)^x}{\ln(3/5)} + c,$$

con c costante arbitraria. Utilizzando invece la seconda tabella, si ha

$$\int_{-1}^0 \frac{3t}{\sqrt[5]{3 + t^2}}\, dt = \frac{3}{2}\int_{-1}^0 (3 + t^2)^{-1/5}(3 + t^2)'\, dt = \frac{3}{2}\Big[\frac{(3 + t^2)^{4/5}}{4/5}\Big]_{-1}^0 = \frac{15}{8}(3^{4/5} - 4^{4/5}).$$

Facoltà di Agraria

Corsi di Laurea in VIT e STAL
Modulo di Matematica
Esame del 16/02/2011
A.A. 2010/2011

Scritto		Voto
Teoria	Esercizi	

Istruzioni: apporre nome, cognome e numero di matricola su ogni foglio. Prima della consegna indicare nell'apposito spazio il numero totale di fogli di cui è composto l'elaborato. Svolgere solamente uno tra 10-b) e 11. Allegare lo svolgimento completo degli esercizi 9, 10 e 11. **Non è ammesso l'uso di libri, appunti e calcolatrici grafiche o programmabili.**

Cognome	Nome
Corso di Laurea *VIT* *STAL*	Matricola
Vecchio ordinamento *SI* *NO*	n. fogli allegati

1 Se $\lim_{x\to x_0} f(x) = +\infty$ e $\lim_{x\to x_0} g(x) = -3$, allora $\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)}$ è

A $-\infty$

B $+\infty$

C 0

D non ci sono elementi sufficienti per rispondere

2 Se f è una funzione derivabile due volte in $]a, b[$ e vale $f'(x_0) < 0$ e $f''(x_0) = 0$ con $x_0 \in]a, b[$, allora

A x_0 è sempre punto di minimo relativo per f

B x_0 è sempre punto di massimo relativo per f

C x_0 è sempre punto di flesso relativo per f

D nessuna delle precedenti

3 L'equazione differenziale $y' = e^t(y + t^2)$ è

A un'equazione lineare del primo ordine

B un'equazione lineare del secondo ordine

C un'equazione non lineare del primo ordine

D un'equazione non lineare del secondo ordine

4 Il grafico della funzione $f(x) = \dfrac{3-\sqrt{5}x}{\pi x - 1}$ rappresenta

A una retta

B una parabola

C un'iperbole

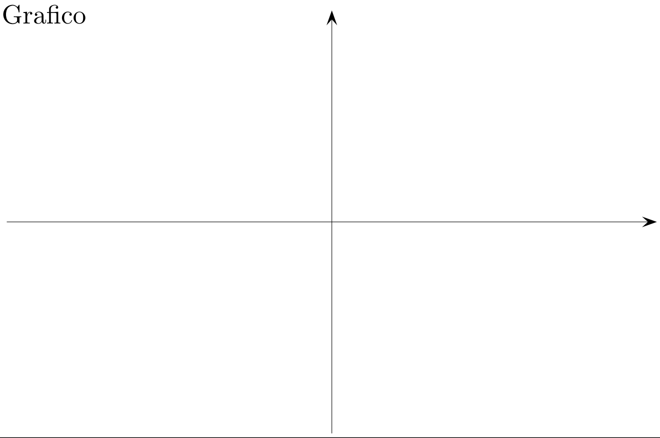
D nessuna delle precedenti

5 Per la funzione $f(x) = \cos x$, scrivere il dominio $\mathcal{D}$, l'immagine $\mathcal{I}$, e rappresentare qualitativamente il grafico.

$\mathcal{D} =$

$\mathcal{I} =$

Grafico



6 La derivata di una funzione f nel punto x_0 rappresenta geometricamente:

7 Enunciare il teorema dei punti critici

8 Rappresentare il grafico di una funzione g che verifichi contemporaneamente le seguenti proprietà:

$$\lim_{x\to-\infty} g(x) = +\infty \qquad \lim_{x\to 2^-} g(x) = +\infty \qquad \lim_{x\to 2^+} g(x) = -\infty \qquad \lim_{x\to+\infty} g(x) = -2$$

9 Data la funzione

$$g(x) = \frac{2x+1}{(3x-1)^2}$$

a) determinare il dominio $\mathcal{D}$, b) studiare il segno di g; c) calcolare i limiti agli estremi del dominio; d) determinare gli intervalli in cui la funzione è crescente, quelli in cui è decrescente, e gli eventuali punti di massimo/minimo relativo; e) determinare gli intervalli in cui la funzione è convessa e quelli in cui è concava; f) determinare gli eventuali asintoti; g) disegnare un grafico approssimativo di g.

10 Dato il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' = 2y + t^2 \\ y(1) = 0 \end{cases}$$

a) dire se la funzione $y(t) = (t-1)\mathrm{e}^{2t}$ è soluzione del problema;

b) determinare una soluzione del problema nel caso in cui non lo sia la funzione di cui al punto precedente.

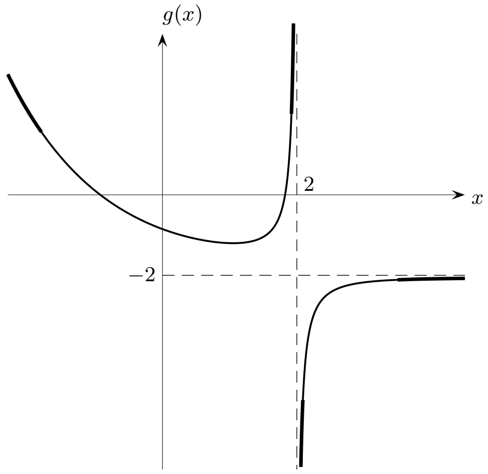
11 Calcolare i seguenti integrali

$$\int \Big(\frac{\sqrt{x}-1}{x} + \frac{2}{x^2+4} \Big)\, dx, \qquad \int_0^1 (x^2 - x)\mathrm{e}^{3x}\, dx.$$

IMPORTANTE! Risolvere solamente uno tra 10-b) e 11.

Soluzioni dei quesiti dell'esame del 16 febbraio 2011

$\boxed{\mathbf{1}}$ A; $\boxed{\mathbf{2}}$ D; $\boxed{\mathbf{3}}$ A; $\boxed{\mathbf{4}}$ C; $\boxed{\mathbf{5}}$-$\boxed{\mathbf{6}}$-$\boxed{\mathbf{7}}$ consultare il libro di testo; $\boxed{\mathbf{8}}$ in neretto si evidenziano le informazioni date dai limiti. Il grafico della funzione è quindi completato a piacere (linea sottile), ad esempio:



$\boxed{\mathbf{9}}$ a) La funzione è definita se $3x-1 \neq 0$ cioè $x \neq 1/3$, perciò il dominio è $\mathcal{D} = \mathbb{R} \setminus \{1/3\}$ e la funzione (razionale) è ivi continua e derivabile.

b) Poiché il denominatore è sempre positivo nel dominio, la funzione è positiva se e solo se $2x+1>0$ cioè $x > -1/2$, mentre si annulla in $x=-1/2$ ed è negativa per $x < -1/2$.

c) Ha senso andare a studiare i limiti in $1/3$ e a $\pm\infty$. Si ha

$$\lim_{x\to\pm\infty} g(x) = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{1}{x}\frac{2+1/x}{(3-1/x)^2} = \left[0\cdot\frac{2}{9}\right] = 0, \qquad \lim_{x\to(1/3)^\pm} g(x) = \left[\frac{5/3}{0^+}\right] = +\infty,$$

quindi la funzione non ammette massimo.

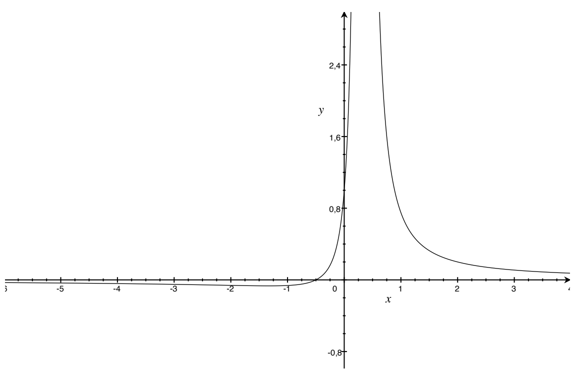
d) La derivata prima è

$$g'(x) = \frac{2(3x-1)^2 - (2x+1)2(3x-1)3}{(3x-1)^4} = \frac{2(3x-1)-(2x+1)6}{(3x-1)^3} = \frac{-2(3x+4)}{(3x-1)^3}.$$

Il numeratore è ≥ 0 se e solo se $3x+4 \leq 0$ ovvero $x \leq -4/3$; il denominatore è positivo se $(3x-1)^3 > 0$ cioè $3x-1>0$, dunque $x > 1/3$. In definitiva

$$g'(x)\begin{cases} <0, & \text{se } x \in]-\infty,-4/3[\cup]1/3,+\infty[, \\ =0, & \text{se } x=-4/3, \\ >0, & \text{se } x \in]-4/3,1/3[, \end{cases}$$

perciò la funzione è decrescente in $]-\infty,-4/3[$ e in $]1/3,+\infty[$, mentre è crescente in $]-4/3,1/3[$. In $x=-4/3$ ammette un minimo relativo ed assoluto.



e) La derivata seconda è

$$g''(x) = -2\frac{3(3x-1)^3 - (3x+4)3(3x-1)^2 3}{(3x-1)^6} = -2\frac{3(3x-1)-(3x+4)9}{(3x-1)^4} = \frac{6(6x+13)}{(3x-1)^4}.$$

Poiché il denominatore è sempre positivo nel dominio, la derivata seconda è ≥ 0 se e solo se $6x+13 \geq 0$, quindi

$$g''(x) \begin{cases} > 0, & \text{se } x \in]-13/6, 1/3[\cup]1/3, +\infty[\\ = 0, & \text{se } x = -13/6, \\ < 0, & \text{se } x \in]-\infty, -13/6[, \end{cases}$$

perciò la funzione è convessa in $]-13/6, 1/3[$ e in $]1/3, +\infty[$, mentre è concava in $]-\infty, -13/6[$. In $x = -13/6$ ammette un punto di flesso.

f) Dal punto c) segue immediatamente che la retta $x = 1/3$ è un asintoto verticale, mentre la retta $y = 0$ è un asintoto orizzontale.

10 a) Si ha $y'(t) = \mathrm{e}^{2t} + (t-1)\mathrm{e}^{2t}2 = (2t-1)\mathrm{e}^{2t}$ e sostituendo si ottiene l'equazione

$$(2t-1)\mathrm{e}^{2t} = 2(t-1)\mathrm{e}^{2t} + t^2$$

che non è identicamente soddisfatta per $t \in \mathbb{R}$ (ad esempio, per $t = 0$ si ha $-1 \neq -2$). La funzione non è dunque soluzione. La funzione soddisfa invece la seconda condizione, essendo $y(1) = 0$.

b) Si tratta di un'equazione lineare del primo ordine a coefficienti non costanti, del tipo

$$y' = a(t)y + b(t)$$

le cui soluzioni sono date da

$$y(t) = \mathrm{e}^{A(t)} \int \mathrm{e}^{-A(t)} b(t)\, dt$$

dove $A(t)$ è una primitiva di $a(t)$. In questo caso $A(t) = 2t$ e integrando per parti due volte si ottiene

$$\begin{aligned} y(t) &= \mathrm{e}^{2t} \int \mathrm{e}^{-2t} t^2\, dt = \mathrm{e}^{2t} \Big(\frac{\mathrm{e}^{-2t}}{-2} t^2 - \int \frac{\mathrm{e}^{-2t}}{-2} 2t\, dt \Big) = \mathrm{e}^{2t} \Big(-\frac{\mathrm{e}^{-2t}}{2} t^2 + \Big(\frac{\mathrm{e}^{-2t}}{-2} t - \int \frac{\mathrm{e}^{-2t}}{-2}\, dt \Big) \Big) \\ &= \mathrm{e}^{2t} \Big(-\frac{\mathrm{e}^{-2t}}{2} t^2 - \frac{\mathrm{e}^{-2t}}{2} t - \frac{\mathrm{e}^{-2t}}{4} + c \Big) = c\,\mathrm{e}^{2t} - \frac{t^2}{2} - \frac{t}{2} - \frac{1}{4}, \end{aligned}$$

dove c è la generica costante d'integrazione. Imponendo la condizione $y(1) = 0$ si ricava $0 = c\mathrm{e}^2 - 5/4$ cioè $c = 5/(4\mathrm{e}^2)$. La soluzione è quindi

$$y(t) = \frac{5}{4}\mathrm{e}^{2(t-1)} - \frac{t^2}{2} - \frac{t}{2} - \frac{1}{4}.$$

Alternativamente, si poteva utilizzare direttamente la formula risolutiva (insieme alla formula fondamentale del calcolo integrale)

$$y(t) = \mathrm{e}^{A(t)} \left(\int_1^t \mathrm{e}^{-A(s)} b(s)\, ds + y(1) \right)$$

dove $A(t) = \int_1^t a(s)\, ds$. In questo caso $A(t) = 2(t-1)$ e

$$\begin{aligned} y(t) &= \mathrm{e}^{2(t-1)} \left(\int_1^t \mathrm{e}^{-2(s-1)} s^2\, ds + 0 \right) \\ &= \mathrm{e}^{2(t-1)} \left(-\frac{\mathrm{e}^{-2(t-1)}}{2} t^2 - \frac{\mathrm{e}^{-2(t-1)}}{2} t - \frac{\mathrm{e}^{-2(t-1)}}{4} - \Big(-\frac{1}{2} - \frac{1}{2} - \frac{1}{4} \Big) \right) = \frac{5}{4}\mathrm{e}^{2(t-1)} - \frac{t^2}{2} - \frac{t}{2} - \frac{1}{4}. \end{aligned}$$

11 Dalle tabelle si ottiene

$$\int \Big(\frac{\sqrt{x}-1}{x} + \frac{2}{x^2+4} \Big)\, dx = \int x^{-1/2}\, dx - \int \frac{1}{x}\, dx + 2 \int \frac{1}{x^2+4}\, dx = \frac{x^{1/2}}{1/2} - \ln|x| + \operatorname{arctg} \frac{x}{2} + c,$$

con c costante arbitraria. Utilizzando invece il metodo di integrazione per parti si ha

$$\begin{aligned} \int_0^1 (x^2 - x)\mathrm{e}^{3x}\, dx &= \Big[(x^2 - x) \frac{\mathrm{e}^{3x}}{3} \Big]_0^1 - \int_0^1 (2x-1) \frac{\mathrm{e}^{3x}}{3}\, dx = 0 - \frac{1}{3} \left(\Big[(2x-1) \frac{\mathrm{e}^{3x}}{3} \Big]_0^1 - \int_0^1 2 \frac{\mathrm{e}^{3x}}{3}\, dx \right) \\ &= -\frac{1}{3} \Big(\frac{\mathrm{e}^3}{3} - (-\frac{1}{3}) \Big) + \frac{2}{9} \Big[\frac{\mathrm{e}^{3x}}{3} \Big]_0^1 = -\frac{\mathrm{e}^3 + 5}{27}. \end{aligned}$$

Facoltà di Agraria

Corsi di Laurea in VIT e STAL
Modulo di Matematica
Esame del 16/02/2011
A.A. 2010/2011

Scritto		Voto
Teoria	Esercizi	

Istruzioni: apporre nome, cognome e numero di matricola su ogni foglio. Prima della consegna indicare nell'apposito spazio il numero totale di fogli di cui è composto l'elaborato. Svolgere solamente uno tra 10-b) e 11. Allegare lo svolgimento completo degli esercizi 9, 10 e 11. **Non è ammesso l'uso di libri, appunti e calcolatrici grafiche o programmabili.**

Cognome	Nome
Corso di Laurea *VIT* *STAL*	Matricola
Vecchio ordinamento *SI* *NO*	n. fogli allegati

1 Se $\lim_{x\to x_0} f(x) = +\infty$ e $\lim_{x\to x_0} g(x) = -\infty$, allora $\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)}$ è

A $-\infty$

B $+\infty$

C -1

D non ci sono elementi sufficienti per rispondere

2 Se f è una funzione derivabile due volte in $]a,b[$ e vale $f'(x_0) = 0$ e $f''(x_0) > 0$ con $x_0 \in]a,b[$, allora

A x_0 è sempre punto di minimo relativo per f

B x_0 è sempre punto di massimo relativo per f

C x_0 è sempre punto di flesso relativo per f

D nessuna delle precedenti

3 L'equazione differenziale $y'' = y\ln(t^3+5) = \frac{y'}{t^2+1}$ è

A un'equazione lineare del primo ordine

B un'equazione lineare del secondo ordine

C un'equazione non lineare del primo ordine

D un'equazione non lineare del secondo ordine

4 Il grafico della funzione $f(x) = \dfrac{2e-1}{\pi+3}$ rappresenta

A una retta

B una parabola

C un'iperbole

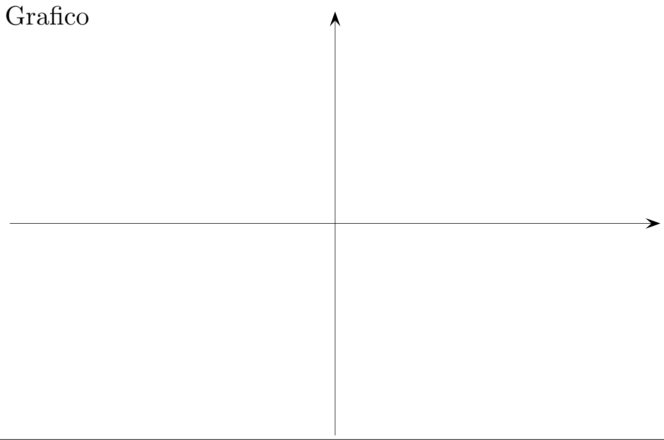
D nessuna delle precedenti

5 Per la funzione $f(x) = \operatorname{tg} x$, scrivere il dominio $\mathcal{D}$, l'immagine $\mathcal{I}$, e rappresentare qualitativamente il grafico.

$\mathcal{D} =$

$\mathcal{I} =$

Grafico



6 Per definizione, la derivata di una funzione $f(x)$ in x_0 è:

7 Enunciare il teorema fondamentale del calcolo integrale

8 Rappresentare il grafico di una funzione g che verifichi contemporaneamente le seguenti proprietà:

$$\lim_{x\to-\infty} g(x) = -1 \qquad \lim_{x\to-3^-} g(x) = -\infty \qquad \lim_{x\to-3^+} g(x) = +\infty \qquad \lim_{x\to+\infty} g(x) = -\infty$$

9 Data la funzione

$$g(x) = \frac{1-3x}{(2x-1)^2}$$

a) determinare il dominio $\mathcal{D}$, b) studiare il segno di g; c) calcolare i limiti agli estremi del dominio; d) determinare gli intervalli in cui la funzione è crescente, quelli in cui è decrescente, e gli eventuali punti di massimo/minimo relativo; e) determinare gli intervalli in cui la funzione è convessa e quelli in cui è concava; f) determinare gli eventuali asintoti; g) disegnare un grafico approssimativo di g.

10 Dato il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' = -2y + 3t^2 \\ y(2) = 0 \end{cases}$$

a) dire se la funzione $y(t) = (t-2)\mathrm{e}^{-2t}$ è soluzione del problema;

b) determinare una soluzione del problema nel caso in cui non lo sia la funzione di cui al punto precedente.

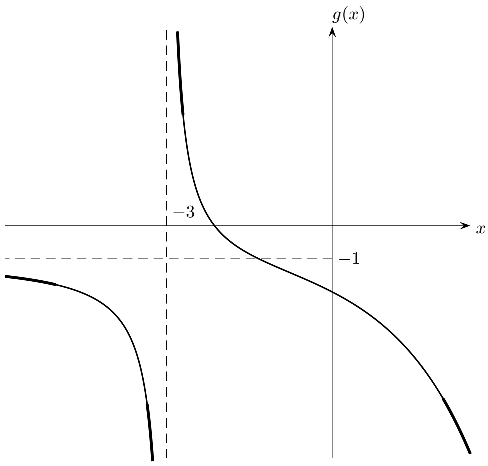
11 Calcolare i seguenti integrali

$$\int \Big(\frac{7}{\sqrt{16-x^2}} - \frac{\sqrt[3]{x}+2x}{x^3} \Big)\, dx, \qquad \int_{-1}^{0} (2x-x^2)\mathrm{e}^{-3x}\, dx.$$

IMPORTANTE! Risolvere solamente uno tra 10-b) e 11.

Soluzioni dei quesiti dell'esame del 16 febbraio 2011

$\boxed{\mathbf{1}}$ D; $\boxed{\mathbf{2}}$ A; $\boxed{\mathbf{3}}$ B; $\boxed{\mathbf{4}}$ A; $\boxed{\mathbf{5}}$-$\boxed{\mathbf{6}}$-$\boxed{\mathbf{7}}$ consultare il libro di testo; $\boxed{\mathbf{8}}$ in neretto si evidenziano le informazioni date dai limiti. Il grafico della funzione è quindi completato a piacere (linea sottile), ad esempio:



$\boxed{\mathbf{9}}$ a) La funzione è definita se $2x-1 \neq 0$ cioè $x \neq 1/2$, perciò il dominio è $\mathcal{D} = \mathbb{R} \setminus \{1/2\}$ e la funzione (razionale) è ivi continua e derivabile.

b) Poiché il denominatore è sempre positivo nel dominio, la funzione è positiva se e solo se $1-3x > 0$ cioè $x < 1/3$, mentre si annulla in $x = 1/3$ ed è negativa per $x > 1/3$.

c) Ha senso andare a studiare i limiti in $1/2$ e a $\pm\infty$. Si ha

$$\lim_{x\to\pm\infty} g(x) = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{1}{x}\frac{1/x-3}{(2-1/x)^2} = \left[0 \cdot \frac{-3}{4}\right] = 0, \qquad \lim_{x\to(1/2)^\pm} g(x) = \left[\frac{-1/2}{0^+}\right] = -\infty,$$

quindi la funzione non ammette minimo.

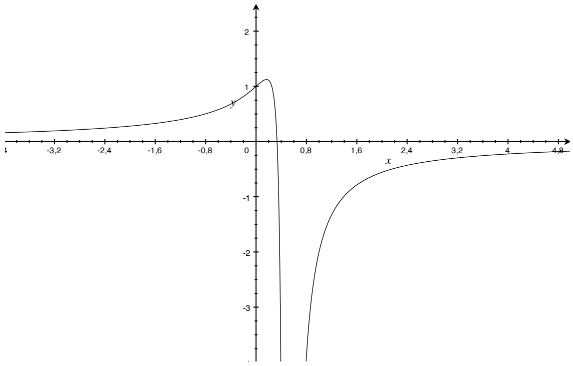
d) La derivata prima è

$$g'(x) = \frac{-3(2x-1)^2 - (1-3x)2(2x-1)2}{(2x-1)^4} = \frac{-3(2x-1)-(1-3x)4}{(2x-1)^3} = \frac{6x-1}{(2x-1)^3}.$$

Il numeratore è ≥ 0 se e solo se $6x-1 \geq 0$ ovvero $x \geq 1/6$; il denominatore è positivo se $(2x-1)^3 > 0$ cioè $2x-1 > 0$, dunque $x > 1/2$. In definitiva

$$g'(x) \begin{cases} > 0, & \text{se } x \in]-\infty, 1/6[\cup]1/2, +\infty[, \\ = 0, & \text{se } x = 1/6, \\ < 0, & \text{se } x \in]1/6, 1/2[, \end{cases}$$

perciò la funzione è crescente in $]-\infty, 1/6[$ e in $]1/2, +\infty[$, mentre è decrescente in $]1/6, 1/2[$. In $x = 1/6$ ammette un massimo relativo ed assoluto.



e) La derivata seconda è

$$g''(x) = \frac{6(2x-1)^3 - (6x-1)3(2x-1)^2 2}{(2x-1)^6} = \frac{6(2x-1)-(6x-1)6}{(2x-1)^4} = \frac{-24x}{(2x-1)^4}.$$

Poiché il denominatore è sempre positivo nel dominio, la derivata seconda è ≥ 0 se e solo se $x \leq 0$, quindi

$$g''(x) \begin{cases} < 0, & \text{se } x \in]0, 1/2[\cup]1/2, +\infty[\\ = 0, & \text{se } x = 0, \\ > 0, & \text{se } x \in]-\infty, 0[, \end{cases}$$

perciò la funzione è concava in $]0, 1/2[$ e in $]1/2, +\infty[$, mentre è convessa in $]-\infty, 0[$. In $x = 0$ ammette un punto di flesso.

f) Dal punto c) segue immediatamente che la retta $x = 1/2$ è un asintoto verticale, mentre la retta $y = 0$ è un asintoto orizzontale.

10 a) Si ha $y'(t) = \mathrm{e}^{-2t} + (t-2)\mathrm{e}^{-2t}(-2) = (5-2t)\mathrm{e}^{-2t}$ e sostituendo si ottiene l'equazione

$$(5-2t)\mathrm{e}^{-2t} = -2(t-2)\mathrm{e}^{-2t} + 3t^2$$

che non è identicamente soddisfatta per $t \in \mathbb{R}$ (ad esempio, per $t = 0$ si ha $5 \neq 4$). La funzione non è dunque soluzione. La funzione soddisfa invece la seconda condizione, essendo $y(2) = 0$.

b) Si tratta di un'equazione lineare del primo ordine a coefficienti non costanti, del tipo

$$y' = a(t)y + b(t)$$

le cui soluzioni sono date da

$$y(t) = \mathrm{e}^{A(t)} \int \mathrm{e}^{-A(t)} b(t)\, dt$$

dove $A(t)$ è una primitiva di $a(t)$. In questo caso $A(t) = -2t$ e integrando per parti due volte si ottiene

$$\begin{aligned} y(t) &= \mathrm{e}^{-2t} \int \mathrm{e}^{2t} 3t^2\, dt = \mathrm{e}^{-2t} \left(\frac{\mathrm{e}^{2t}}{2} 3t^2 - \int \frac{\mathrm{e}^{2t}}{2} 6t\, dt \right) = \mathrm{e}^{-2t} \left(\frac{\mathrm{e}^{2t}}{2} 3t^2 - 3 \left(\frac{\mathrm{e}^{2t}}{2} t - \int \frac{\mathrm{e}^{2t}}{2}\, dt \right) \right) \\ &= \mathrm{e}^{-2t} \left(\frac{\mathrm{e}^{2t}}{2} 3t^2 - \frac{3\mathrm{e}^{2t}}{2} t + \frac{3\mathrm{e}^{2t}}{4} + c \right) = c\,\mathrm{e}^{-2t} + \frac{3}{2}t^2 - \frac{3}{2}t + \frac{3}{4}, \end{aligned}$$

dove c è la generica costante d'integrazione. Imponendo la condizione $y(2) = 0$ si ricava $0 = c\mathrm{e}^{-4} + 15/4$ cioè $c = -15\mathrm{e}^4/4$. La soluzione è quindi

$$y(t) = -\frac{15}{4}\mathrm{e}^{-2(t-2)} + \frac{3}{2}t^2 - \frac{3}{2}t + \frac{3}{4}.$$

Alternativamente, si poteva utilizzare direttamente la formula risolutiva (insieme alla formula fondamentale del calcolo integrale)

$$y(t) = \mathrm{e}^{A(t)} \left(\int_2^t \mathrm{e}^{-A(s)} b(s)\, ds + y(2) \right)$$

dove $A(t) = \int_2^t a(s)\, ds$. In questo caso $A(t) = -2(t-2)$ e

$$\begin{aligned} y(t) &= \mathrm{e}^{-2(t-2)} \left(\int_2^t \mathrm{e}^{2(s-2)} 3s^2\, ds + 0 \right) \\ &= \mathrm{e}^{-2(t-2)} \left(\frac{3\mathrm{e}^{2(t-2)}}{2} t^2 - \frac{3\mathrm{e}^{2(t-2)}}{2} t + \frac{3\mathrm{e}^{2(t-2)}}{4} - \left(6 - 3 + \frac{3}{4}\right) \right) = -\frac{15}{4}\mathrm{e}^{-2(t-2)} + \frac{3}{2}t^2 - \frac{3}{2}t + \frac{3}{4}. \end{aligned}$$

11 Dalle tabelle si ottiene

$$\int \left(\frac{7}{\sqrt{16-x^2}} - \frac{\sqrt[3]{x} + 2x}{x^3} \right) dx = 7 \int \frac{1}{\sqrt{16-x^2}}\, dx - \int x^{-8/3}\, dx - 2 \int x^{-2}\, dx = 7 \operatorname{arcsen} \frac{x}{4} - \frac{x^{-5/3}}{-5/3} + \frac{2}{x} + c,$$

con c costante arbitraria. Utilizzando invece il metodo di integrazione per parti si ha

$$\begin{aligned} \int_{-1}^0 (2x - x^2)\mathrm{e}^{-3x}\, dx &= \left[(2x - x^2) \frac{\mathrm{e}^{-3x}}{-3} \right]_{-1}^0 - \int_{-1}^0 (2 - 2x) \frac{\mathrm{e}^{-3x}}{-3}\, dx = -\mathrm{e}^3 + \frac{2}{3} \left(\left[(1-x) \frac{\mathrm{e}^{-3x}}{-3} \right]_{-1}^0 + \right. \\ &\left. - \int_{-1}^0 (-1) \frac{\mathrm{e}^{-3x}}{-3}\, dx \right) = -\mathrm{e}^3 + \frac{2}{3} \left(-\frac{1}{3} - \left(-\frac{2\mathrm{e}^3}{3}\right) \right) - \frac{2}{9} \left[\frac{\mathrm{e}^{-3x}}{-3} \right]_{-1}^0 = \frac{37\mathrm{e}^3 - 4}{27}. \end{aligned}$$

Facoltà di Agraria

Corsi di Laurea in VIT e STAL
Modulo di Matematica
Esame del 16/02/2011
A.A. 2010/2011

Scritto		Voto
Teoria	Esercizi	

Istruzioni: apporre nome, cognome e numero di matricola su ogni foglio. Prima della consegna indicare nell'apposito spazio il numero totale di fogli di cui è composto l'elaborato. Svolgere solamente uno tra 10-b) e 11. Allegare lo svolgimento completo degli esercizi 9, 10 e 11. **Non è ammesso l'uso di libri, appunti e calcolatrici grafiche o programmabili.**

Cognome	Nome
Corso di Laurea *VIT* *STAL*	Matricola
Vecchio ordinamento *SI* *NO*	n. fogli allegati

1 Se $\lim_{x\to x_0} f(x) = 0$ e $\lim_{x\to x_0} g(x) = -\infty$, allora $\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)}$ è

- A $-\infty$
- B $+\infty$
- C 0
- D non ci sono elementi sufficienti per rispondere

2 Se f è una funzione derivabile due volte in $]a,b[$ e vale $f'(x) < 0$ e $f''(x) < 0$ in $]a,b[$, allora

- A f è decrescente e concava in $]a,b[$
- B f è crescente e convessa in $]a,b[$
- C f è decrescente e convessa in $]a,b[$
- D f è crescente e concava in $]a,b[$

3 L'equazione differenziale $y'' = 2te^y + 7y'$ è

- A un'equazione lineare del primo ordine
- B un'equazione lineare del secondo ordine
- C un'equazione non lineare del primo ordine
- D un'equazione non lineare del secondo ordine

4 Il grafico della funzione $f(x) = \dfrac{2x^2 - x - 1}{3x + 2}$ rappresenta

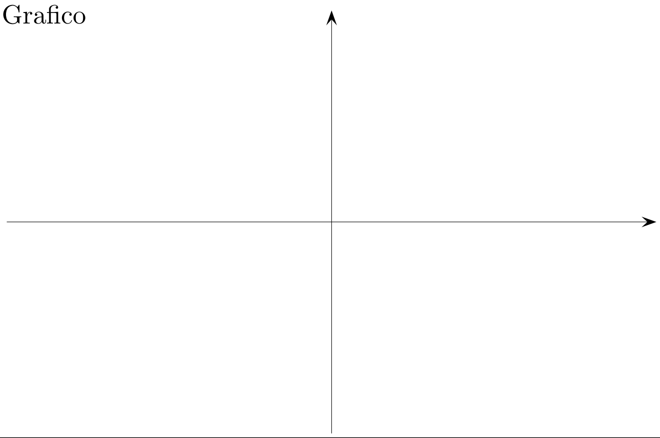
- A una retta
- B una parabola
- C un'iperbole
- D nessuna delle precedenti

5 Per la funzione $f(x) = \log_{1/4} x$, scrivere il dominio $\mathcal{D}$, l'immagine $\mathcal{I}$, e rappresentare qualitativamente il grafico.

$\mathcal{D} =$

$\mathcal{I} =$

Grafico



6 Per definizione, una primitiva di una funzione $f(x)$ in $]a,b[$ è:

7 Descrivere precisamente le relazioni che esistono tra la derivata seconda e il grafico di una funzione f

8 Rappresentare il grafico di una funzione g che verifichi contemporaneamente le seguenti proprietà:

$$\lim_{x\to-\infty} g(x) = 5 \qquad \lim_{x\to 2^-} g(x) = -\infty \qquad \lim_{x\to 2^+} g(x) = +\infty \qquad \lim_{x\to+\infty} g(x) = 1$$

9 Data la funzione

$$g(x) = \frac{2x-1}{(2x+1)^2}$$

a) determinare il dominio $\mathcal{D}$, b) studiare il segno di g; c) calcolare i limiti agli estremi del dominio; d) determinare gli intervalli in cui la funzione è crescente, quelli in cui è decrescente, e gli eventuali punti di massimo/minimo relativo; e) determinare gli intervalli in cui la funzione è convessa e quelli in cui è concava; f) determinare gli eventuali asintoti; g) disegnare un grafico approssimativo di g.

10 Dato il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' = -3y - 2t^2 \\ y(-1) = 0 \end{cases}$$

a) dire se la funzione $y(t) = (t+1)\mathrm{e}^{-3t}$ è soluzione del problema;

b) determinare una soluzione del problema nel caso in cui non lo sia la funzione di cui al punto precedente.

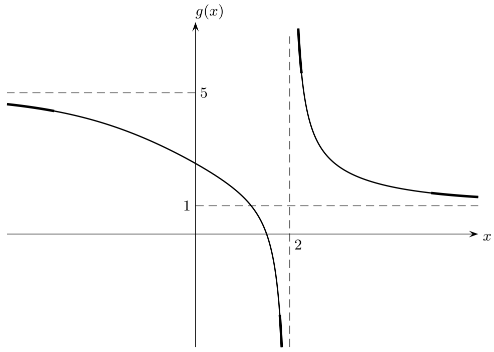
11 Calcolare i seguenti integrali

$$\int \left(\frac{3}{\operatorname{sen}^2 x} + \frac{2x^4 - \sqrt[3]{x}}{3x} \right) dx, \qquad \int_{-1}^{0} (x + 3x^2)\mathrm{e}^{-2x}\, dx.$$

IMPORTANTE! Risolvere solamente uno tra 10-b) e 11.

Soluzioni dei quesiti dell'esame del 16 febbraio 2011

1 C; **2** A; **3** D; **4** D; **5**-**6**-**7** consultare il libro di testo; **8** in neretto si evidenziano le informazioni date dai limiti. Il grafico della funzione è quindi completato a piacere (linea sottile), ad esempio:



9 a) La funzione è definita se $2x+1 \neq 0$ cioè $x \neq -1/2$, perciò il dominio è $\mathcal{D} = \mathbb{R} \setminus \{-1/2\}$ e la funzione (razionale) è ivi continua e derivabile.

b) Poiché il denominatore è sempre positivo nel dominio, la funzione è positiva se e solo se $2x - 1 > 0$ cioè $x > 1/2$, mentre si annulla in $x = 1/2$ ed è negativa per $x < 1/2$.

c) Ha senso andare a studiare i limiti in $-1/2$ e a $\pm\infty$. Si ha

$$\lim_{x\to\pm\infty} g(x) = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{1}{x}\frac{2-1/x}{(2+1/x)^2} = \left[0 \cdot \frac{2}{4}\right] = 0, \qquad \lim_{x\to(-1/2)^\pm} g(x) = \left[\frac{-2}{0^+}\right] = -\infty,$$

quindi la funzione non ammette minimo.

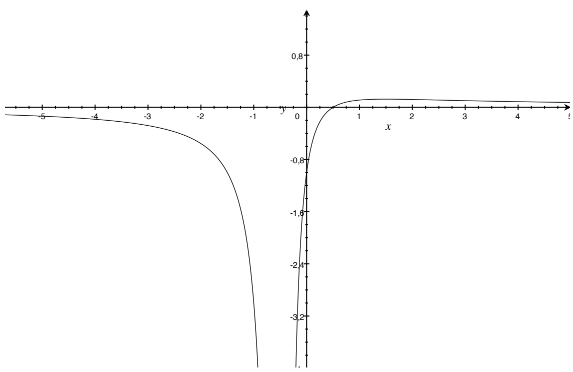
d) La derivata prima è

$$g'(x) = \frac{2(2x+1)^2 - (2x-1)2(2x+1)2}{(2x+1)^4} = \frac{2(2x+1) - (2x-1)4}{(2x+1)^3} = \frac{2(3-2x)}{(2x+1)^3}.$$

Il numeratore è ≥ 0 se e solo se $3 - 2x \geq 0$ ovvero $x \leq 3/2$; il denominatore è positivo se $(2x+1)^3 > 0$ cioè $2x + 1 > 0$, dunque $x > -1/2$. In definitiva

$$g'(x) \begin{cases} < 0, & \text{se } x \in]-\infty, -1/2[\cup]3/2, +\infty[, \\ = 0, & \text{se } x = 3/2, \\ > 0, & \text{se } x \in]-1/2, 3/2[, \end{cases}$$

perciò la funzione è decrescente in $]-\infty, -1/2[$ e in $]3/2, +\infty[$, mentre è crescente in $]-1/2, 3/2[$. In $x = 3/2$ ammette un massimo relativo ed assoluto.



e) La derivata seconda è

$$g''(x) = 2\frac{-2(2x+1)^3 - (3-2x)3(2x+1)^2 2}{(2x+1)^6} = 2\frac{-2(2x+1) - (3-2x)6}{(2x+1)^4} = \frac{8(2x-5)}{(2x+1)^4}.$$

Poiché il denominatore è sempre positivo nel dominio, la derivata seconda è ≥ 0 se e solo se $2x - 5 \geq 0$, quindi

$$g''(x) \begin{cases} < 0, & \text{se } x \in]-\infty, -1/2[\cup]-1/2, 5/2[\\ = 0, & \text{se } x = 5/2, \\ > 0, & \text{se } x \in]5/2, +\infty[, \end{cases}$$

perciò la funzione è concava in $]-1/2, 5/2[$ e in $]-\infty, -1/2[$, mentre è convessa in $]5/2, +\infty[$. In $x = 5/2$ ammette un punto di flesso.

f) Dal punto c) segue immediatamente che la retta $x = -1/2$ è un asintoto verticale, mentre la retta $y = 0$ è un asintoto orizzontale.

10 a) Si ha $y'(t) = \mathrm{e}^{-3t} + (t+1)\mathrm{e}^{-3t}(-3) = -(3t+2)\mathrm{e}^{-3t}$ e sostituendo si ottiene l'equazione

$$-(3t+2)\mathrm{e}^{-3t} = -3(t+1)\mathrm{e}^{-3t} - 2t^2$$

che non è identicamente soddisfatta per $t \in \mathbb{R}$ (ad esempio, per $t = 0$ si ha $-2 \neq -3$). La funzione non è dunque soluzione. La funzione soddisfa invece la seconda condizione, essendo $y(-1) = 0$.

b) Si tratta di un'equazione lineare del primo ordine a coefficienti non costanti, del tipo

$$y' = a(t)y + b(t)$$

le cui soluzioni sono date da

$$y(t) = \mathrm{e}^{A(t)} \int \mathrm{e}^{-A(t)} b(t)\, dt$$

dove $A(t)$ è una primitiva di $a(t)$. In questo caso $A(t) = -3t$ e integrando per parti due volte si ottiene

$$\begin{aligned} y(t) &= \mathrm{e}^{-3t} \int \mathrm{e}^{3t}(-2t^2)\, dt = \mathrm{e}^{-3t}\Big(\frac{\mathrm{e}^{3t}}{3}(-2t^2) + \int \frac{\mathrm{e}^{3t}}{3} 4t\, dt\Big) = \mathrm{e}^{-3t}\Big(-\frac{2\mathrm{e}^{3t}}{3}t^2 + \frac{4}{3}\Big(\frac{\mathrm{e}^{3t}}{3}t - \int \frac{\mathrm{e}^{3t}}{3}\, dt\Big)\Big) \\ &= \mathrm{e}^{-3t}\Big(-\frac{2\mathrm{e}^{3t}}{3}t^2 + \frac{4\mathrm{e}^{3t}}{9}t - \frac{4\mathrm{e}^{3t}}{27} + c\Big) = c\,\mathrm{e}^{-3t} - \frac{2}{3}t^2 + \frac{4}{9}t - \frac{4}{27}, \end{aligned}$$

dove c è la generica costante d'integrazione. Imponendo la condizione $y(-1) = 0$ si ricava $0 = c\mathrm{e}^3 - 34/27$ cioè $c = 34/(27\mathrm{e}^3)$. La soluzione è quindi

$$y(t) = \frac{34}{27}\mathrm{e}^{-3(t+1)} - \frac{2}{3}t^2 + \frac{4}{9}t - \frac{4}{27}.$$

Alternativamente, si poteva utilizzare direttamente la formula risolutiva (insieme alla formula fondamentale del calcolo integrale)

$$y(t) = \mathrm{e}^{A(t)}\Big(\int_{-1}^{t} \mathrm{e}^{-A(s)} b(s)\, ds + y(-1)\Big)$$

dove $A(t) = \int_{-1}^{t} a(s)\, ds$. In questo caso $A(t) = -3(t+1)$ e

$$\begin{aligned} y(t) &= \mathrm{e}^{-3(t+1)}\Big(\int_{-1}^{t} \mathrm{e}^{3(s+1)}(-2s^2)\, ds + 0\Big) \\ &= \mathrm{e}^{-3(t+1)}\Big(-\frac{2\mathrm{e}^{3(t+1)}}{3}t^2 + \frac{4\mathrm{e}^{3(t+1)}}{9}t - \frac{4\mathrm{e}^{3(t+1)}}{27} - \Big(-\frac{2}{3} - \frac{4}{9} - \frac{4}{27}\Big)\Big) = \frac{34}{27}\mathrm{e}^{-3(t+1)} - \frac{2}{3}t^2 + \frac{4}{9}t - \frac{4}{27}. \end{aligned}$$

11 Dalle tabelle si ottiene

$$\int \Big(\frac{3}{\operatorname{sen}^2 x} + \frac{2x^4 - \sqrt[3]{x}}{3x}\Big) dx = 3\int \frac{1}{\operatorname{sen}^2 x}\, dx + \frac{2}{3}\int x^3\, dx - \frac{1}{3}\int x^{-2/3}\, dx = -3\cot x + \frac{x^4}{6} - \frac{1}{3}\frac{x^{1/3}}{1/3} + c,$$

con c costante arbitraria. Utilizzando invece il metodo di integrazione per parti si ha

$$\begin{aligned} \int_{-1}^{0} (x + 3x^2)\mathrm{e}^{-2x}\, dx &= \Big[(x+3x^2)\frac{\mathrm{e}^{-2x}}{-2}\Big]_{-1}^{0} - \int_{-1}^{0} (1+6x)\frac{\mathrm{e}^{-2x}}{-2}\, dx = -2\mathrm{e}^2 + \frac{1}{2}\Big(\Big[(1+6x)\frac{\mathrm{e}^{-2x}}{-2}\Big]_{-1}^{0} + \\ &\quad - \int_{-1}^{0} 6\frac{\mathrm{e}^{-2x}}{-2}\, dx\Big) = -2\mathrm{e}^2 + \frac{1}{2}\Big(-\frac{1}{2} - \frac{5\mathrm{e}^2}{2}\Big) + \frac{3}{2}\Big[\frac{\mathrm{e}^{-2x}}{-2}\Big]_{-1}^{0} = -\frac{3}{2}\mathrm{e}^2 - 1. \end{aligned}$$

Facoltà di Agraria

Corsi di Laurea in VIT e STAL
Modulo di Matematica
Esame del 16/02/2011
A.A. 2010/2011

Scritto		Voto
Teoria	Esercizi	

Istruzioni: apporre nome, cognome e numero di matricola su ogni foglio. Prima della consegna indicare nell'apposito spazio il numero totale di fogli di cui è composto l'elaborato. Svolgere solamente uno tra 10-b) e 11. Allegare lo svolgimento completo degli esercizi 9, 10 e 11. **Non è ammesso l'uso di libri, appunti e calcolatrici grafiche o programmabili.**

Cognome	Nome
Corso di Laurea *VIT* *STAL*	Matricola
Vecchio ordinamento *SI* *NO*	n. fogli allegati

1 Se $\lim_{x\to x_0} f(x) = 0^+$ e $\lim_{x\to x_0} g(x) = 0^-$, allora $\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)}$ è

A $-\infty$

B $+\infty$

C 1

D non ci sono elementi sufficienti per rispondere

2 Se f è una funzione derivabile due volte in $]a,b[$ e vale $f'(x) < 0$ per ogni $x \in]a,b[$, allora

A f è decrescente in $[a,b]$

B f è crescente in $[a,b]$

C f è concava in $[a,b]$

D f è convessa in $[a,b]$

3 L'equazione differenziale $y' = 3t - 5\operatorname{tg} y$ è

A un'equazione lineare del primo ordine

B un'equazione lineare del secondo ordine

C un'equazione non lineare del primo ordine

D un'equazione non lineare del secondo ordine

4 Il grafico della funzione $f(x) = \dfrac{130}{7} - \dfrac{27x}{2}$ rappresenta

A una retta

B una parabola

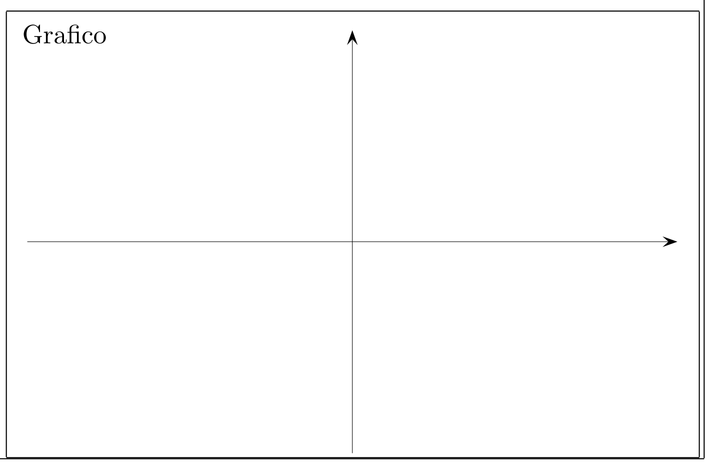
C un'iperbole

D nessuna delle precedenti

5 Per la funzione $f(x) = \sqrt[8]{x}$, scrivere il dominio $\mathcal{D}$, l'immagine $\mathcal{I}$, e rappresentare qualitativamente il grafico.

$\mathcal{D} =$

$\mathcal{I} =$



6 L'integrale definito di una funzione positiva f su $[a, b]$ rappresenta:

7 Descrivere con precisione le relazioni che intercorrono tra la derivata di una funzione e le sue proprietà di monotonia.

8 Rappresentare il grafico di una funzione g che verifichi contemporaneamente le seguenti proprietà:

$$\lim_{x\to-\infty} g(x) = -\infty \qquad \lim_{x\to2^-} g(x) = +\infty \qquad \lim_{x\to2^+} g(x) = -\infty \qquad \lim_{x\to+\infty} g(x) = 4$$

9 Data la funzione

$$g(x) = \frac{1-4x}{(3x+1)^2}$$

a) determinare il dominio $\mathcal{D}$, b) studiare il segno di g; c) calcolare i limiti agli estremi del dominio; d) determinare gli intervalli in cui la funzione è crescente, quelli in cui è decrescente, e gli eventuali punti di massimo/minimo relativo; e) determinare gli intervalli in cui la funzione è convessa e quelli in cui è concava; f) determinare gli eventuali asintoti; g) disegnare un grafico approssimativo di g.

10 Dato il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' = 3y - t^2 \\ y(-2) = 0 \end{cases}$$

a) dire se la funzione $y(t) = (t+2)\mathrm{e}^{3t}$ è soluzione del problema;

b) determinare una soluzione del problema nel caso in cui non lo sia la funzione di cui al punto precedente.

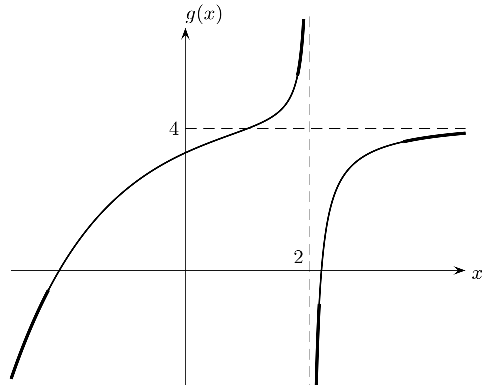
11 Calcolare i seguenti integrali

$$\int \left(\frac{\sqrt{x}+5}{x^2} - \frac{6}{\cos^2 x}\right) dx, \qquad \int_0^1 (2x^2 - 3x)\mathrm{e}^{2x}\, dx.$$

IMPORTANTE! Risolvere solamente uno tra 10-b) e 11.

Soluzioni dei quesiti dell'esame del 16 febbraio 2011

1 D; **2** A; **3** C; **4** A; **5**-**6**-**7** consultare il libro di testo; **8** in neretto si evidenziano le informazioni date dai limiti. Il grafico della funzione è quindi completato a piacere (linea sottile), ad esempio:



9 a) La funzione è definita se $3x+1 \neq 0$ cioè $x \neq -1/3$, perciò il dominio è $\mathcal{D} = \mathbb{R} \setminus \{-1/3\}$ e la funzione (razionale) è ivi continua e derivabile.

b) Poiché il denominatore è sempre positivo nel dominio, la funzione è positiva se e solo se $1-4x>0$ cioè $x<1/4$, mentre si annulla in $x=1/4$ ed è negativa per $x>1/4$.

c) Ha senso andare a studiare i limiti in $-1/3$ e a $\pm\infty$. Si ha

$$\lim_{x\to\pm\infty} g(x) = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{1}{x}\frac{1/x-4}{(3+1/x)^2} = \left[0\cdot\frac{-4}{9}\right] = 0, \qquad \lim_{x\to(-1/3)^\pm} g(x) = \left[\frac{7/3}{0^+}\right] = +\infty,$$

quindi la funzione non ammette massimo.

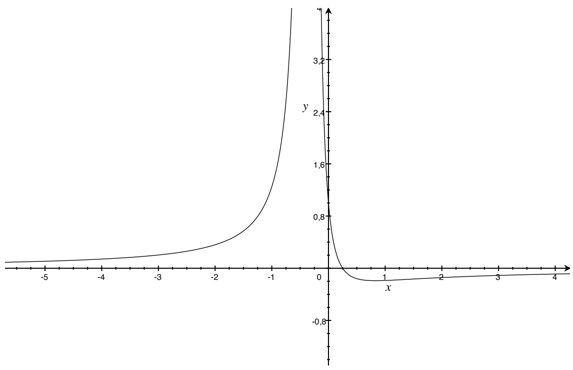
d) La derivata prima è

$$g'(x) = \frac{-4(3x+1)^2-(1-4x)2(3x+1)3}{(3x+1)^4} = \frac{-4(3x+1)-(1-4x)6}{(3x+1)^3} = \frac{2(6x-5)}{(3x+1)^3}.$$

Il numeratore è ≥ 0 se e solo se $6x-5\geq 0$ ovvero $x\geq 5/6$; il denominatore è positivo se $(3x+1)^3>0$ cioè $3x+1>0$, dunque $x>-1/3$. In definitiva

$$g'(x) \begin{cases} >0, & \text{se } x \in]-\infty,-1/3[\cup]5/6,+\infty[, \\ =0, & \text{se } x=5/6, \\ <0, & \text{se } x\in]-1/3,5/6[, \end{cases}$$

perciò la funzione è crescente in $]-\infty,-1/3[$ e in $]5/6,+\infty[$, mentre è decrescente in $]-1/3,5/6[$. In $x=5/6$ ammette un minimo relativo ed assoluto.



e) La derivata seconda è

$$g''(x) = 2\frac{6(3x+1)^3-(6x-5)3(3x+1)^2 3}{(3x+1)^6} = 2\frac{6(3x+1)-(6x-5)9}{(3x+1)^4} = \frac{6(17-12x)}{(3x+1)^4}.$$

Poiché il denominatore è sempre positivo nel dominio, la derivata seconda è ≥ 0 se e solo se $17-12x \geq 0$, quindi

$$g''(x) \begin{cases} > 0, & \text{se } x \in]-\infty, -1/3[\cup]-1/3, 17/12[\\ = 0, & \text{se } x = 17/12, \\ < 0, & \text{se } x \in]17/12, +\infty[, \end{cases}$$

perciò la funzione è convessa in $]-\infty, -1/3[$ e in $]-1/3, 17/12[$, mentre è concava in $]17/12, +\infty[$. In $x = 17/12$ ammette un punto di flesso.

f) Dal punto c) segue immediatamente che la retta $x = -1/3$ è un asintoto verticale, mentre la retta $y = 0$ è un asintoto orizzontale.

10 a) Si ha $y'(t) = \mathrm{e}^{3t} + (t+2)\mathrm{e}^{3t}3 = (3t+7)\mathrm{e}^{3t}$ e sostituendo si ottiene l'equazione

$$(3t+7)\mathrm{e}^{3t} = 3(t+2)\mathrm{e}^{3t} - t^2$$

che non è identicamente soddisfatta per $t \in \mathbb{R}$ (ad esempio, per $t = 0$ si ha $7 \neq 6$). La funzione non è dunque soluzione. La funzione soddisfa invece la seconda condizione, essendo $y(-2) = 0$.

b) Si tratta di un'equazione lineare del primo ordine a coefficienti non costanti, del tipo

$$y' = a(t)y + b(t)$$

le cui soluzioni sono date da

$$y(t) = \mathrm{e}^{A(t)} \int \mathrm{e}^{-A(t)} b(t)\, dt$$

dove $A(t)$ è una primitiva di $a(t)$. In questo caso $A(t) = 3t$ e integrando per parti due volte si ottiene

$$\begin{aligned} y(t) &= \mathrm{e}^{3t} \int \mathrm{e}^{-3t}(-t^2)\, dt = \mathrm{e}^{3t}\left(\frac{\mathrm{e}^{-3t}}{-3}(-t^2) - \int \frac{\mathrm{e}^{-3t}}{-3}(-2t)\, dt\right) = \mathrm{e}^{3t}\left(\frac{\mathrm{e}^{-3t}}{3}t^2 - \frac{2}{3}\Big(\frac{\mathrm{e}^{-3t}}{-3}t - \int \frac{\mathrm{e}^{-3t}}{-3}\, dt\Big)\right) \\ &= \mathrm{e}^{3t}\left(\frac{\mathrm{e}^{-3t}}{3}t^2 + \frac{2\mathrm{e}^{-3t}}{9}t + \frac{2\mathrm{e}^{-3t}}{27} + c\right) = c\,\mathrm{e}^{3t} + \frac{t^2}{3} + \frac{2}{9}t + \frac{2}{27}, \end{aligned}$$

dove c è la generica costante d'integrazione. Imponendo la condizione $y(-2) = 0$ si ricava $0 = c\mathrm{e}^{-6} + 26/27$ cioè $c = -26\mathrm{e}^6/27$. La soluzione è quindi

$$y(t) = -\frac{26}{27}\mathrm{e}^{3(t+2)} + \frac{t^2}{3} + \frac{2}{9}t + \frac{2}{27}.$$

Alternativamente, si poteva utilizzare direttamente la formula risolutiva (insieme alla formula fondamentale del calcolo integrale)

$$y(t) = \mathrm{e}^{A(t)} \left(\int_{-2}^{t} \mathrm{e}^{-A(s)} b(s)\, ds + y(-2)\right)$$

dove $A(t) = \int_{-2}^{t} a(s)\, ds$. In questo caso $A(t) = 3(t+2)$ e

$$\begin{aligned} y(t) &= \mathrm{e}^{3(t+2)} \left(\int_{-2}^{t} \mathrm{e}^{-3(s+2)}(-s^2)\, ds + 0\right) \\ &= \mathrm{e}^{3(t+2)} \left(\frac{\mathrm{e}^{-3(t+2)}}{3}t^2 + \frac{2\mathrm{e}^{-3(t+2)}}{9}t + \frac{2\mathrm{e}^{-3(t+2)}}{27} - \Big(\frac{4}{3} - \frac{4}{9} + \frac{2}{27}\Big)\right) = -\frac{26}{27}\mathrm{e}^{3(t+2)} + \frac{t^2}{3} + \frac{2}{9}t + \frac{2}{27}. \end{aligned}$$

11 Dalle tabelle si ottiene

$$\int \Big(\frac{\sqrt{x}+5}{x^2} - \frac{6}{\cos^2 x}\Big)\, dx = \int x^{-3/2}\, dx + 5\int x^{-2}\, dx - 6\int \frac{1}{\cos^2 x}\, dx = \frac{x^{-1/2}}{-1/2} - \frac{5}{x} - 6\,\mathrm{tg}\, x + c,$$

con c costante arbitraria. Utilizzando invece il metodo di integrazione per parti si ha

$$\begin{aligned} \int_0^1 (2x^2-3x)\mathrm{e}^{2x}\, dx =& \Big[(2x^2-3x)\frac{\mathrm{e}^{2x}}{2}\Big]_0^1 - \int_0^1 (4x-3)\frac{\mathrm{e}^{2x}}{2}\, dx = -\frac{\mathrm{e}^2}{2} - \frac{1}{2}\left(\Big[(4x-3)\frac{\mathrm{e}^{2x}}{2}\Big]_0^1 + \right. \\ & \left. - \int_0^1 4\frac{\mathrm{e}^{2x}}{2}\, dx\right) = -\frac{\mathrm{e}^2}{2} - \frac{1}{2}\Big(\frac{\mathrm{e}^2}{2} - (-\frac{3}{2})\Big) + \Big[\frac{\mathrm{e}^{2x}}{2}\Big]_0^1 = -\frac{\mathrm{e}^3+5}{4}. \end{aligned}$$

Facoltà di Agraria

Corsi di Laurea in VIT e STAL
Modulo di Matematica
Esame del 30/06/2011
A.A. 2010/2011

Scritto		Voto
Teoria	Esercizi	

Istruzioni: apporre nome, cognome e numero di matricola su ogni foglio. Prima della consegna indicare nell'apposito spazio il numero totale di fogli di cui è composto l'elaborato. Svolgere solamente uno tra 10-b) e 11. Allegare lo svolgimento completo degli esercizi 9, 10 e 11. **Non è ammesso l'uso di libri, appunti e calcolatrici grafiche o programmabili.**

Cognome	Nome
Corso di Laurea *VIT* *STAL*	Matricola
Vecchio ordinamento *SI* *NO*	n. fogli allegati

1 Se $\lim_{x\to x_0} f(x) = 1$ e $\lim_{x\to x_0} g(x) = 0$, allora $\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)}$ è

- A 1
- B $+\infty$
- C 0
- D non ci sono elementi sufficienti per rispondere

2 Se f è una funzione derivabile in $]a,b[$ e vale $f'(x) < 0$ per ogni $x \in]a,b[$, allora

- A f è crescente
- B f è decrescente
- C f è concava
- D f è convessa

3 L'equazione differenziale $y'' = t\,\mathrm{sen}(y + y')$ è

- A un'equazione lineare del primo ordine
- B un'equazione lineare del secondo ordine
- C un'equazione non lineare del primo ordine
- D un'equazione non lineare del secondo ordine

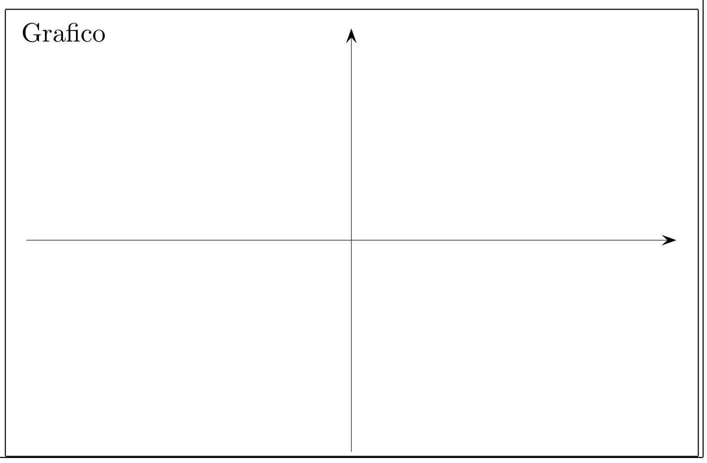
4 Il grafico della funzione $f(x) = \dfrac{2x-1}{3+x^4}$ rappresenta

- A una retta
- B una parabola
- C un'iperbole
- D nessuna delle precedenti

5 Per la funzione $f(x) = \log_{1/7} x$, scrivere il dominio $\mathcal{D}$, l'immagine $\mathcal{I}$, e rappresentare qualitativamente il grafico.

$\mathcal{D} =$

$\mathcal{I} =$



6 La derivata di una funzione f nel punto x_0 rappresenta geometricamente:

7 Enunciare il teorema fondamentale del calcolo integrale.

8 Rappresentare il grafico di una funzione g che verifichi contemporaneamente le seguenti proprietà:

$$\lim_{x\to-\infty} g(x) = +\infty \qquad \lim_{x\to(-1)^-} g(x) = -\infty \qquad \lim_{x\to(-1)^+} g(x) = 2 \qquad \lim_{x\to+\infty} g(x) = -1$$

9 Data la funzione

$$g(x) = \frac{2x^2 - 1}{3x^2 + 2x + 1}$$

a) determinare il dominio $\mathcal{D}$, b) studiare il segno di g; c) calcolare i limiti agli estremi del dominio; d) determinare gli intervalli in cui la funzione è crescente, quelli in cui è decrescente, e gli eventuali punti di massimo/minimo relativo; e) determinare gli eventuali asintoti; f) determinare l'equazione della retta tangente al grafico nel punto di ascissa $x_0 = 0$; g) disegnare un grafico approssimativo di g.

10 Dato il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' = (3 + t\,\mathrm{sen}(t^2))y^6 \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

a) dire se la funzione $y(t) = \cos(t + t^3)$ è soluzione del problema;

b) determinare una soluzione del problema nel caso in cui non lo sia la funzione di cui al punto precedente.

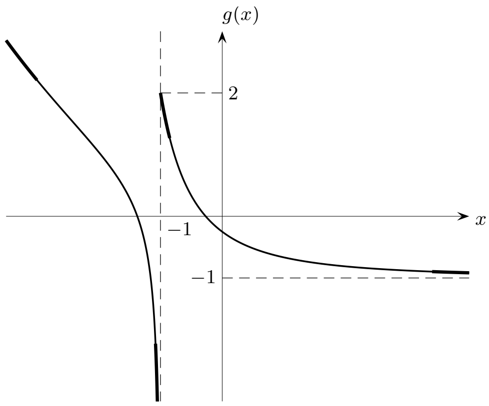
11 Calcolare i seguenti integrali

$$\int \left(x^2\,\sqrt[3]{x} - \frac{2}{\sqrt{9 - x^2}}\right) dx, \qquad \int_{\pi/4}^{\pi/2} \frac{\cos x}{\mathrm{sen}^3\,x}\,dx.$$

IMPORTANTE! Risolvere solamente uno tra 10-b) e 11.

Soluzioni dei quesiti dell'esame del 30 giugno 2011

$\boxed{\mathbf{1}}$ D; $\boxed{\mathbf{2}}$ B; $\boxed{\mathbf{3}}$ D; $\boxed{\mathbf{4}}$ D; $\boxed{\mathbf{5}}$-$\boxed{\mathbf{6}}$-$\boxed{\mathbf{7}}$ consultare il libro di testo; $\boxed{\mathbf{8}}$ in neretto si evidenziano le informazioni date dai limiti. Il grafico della funzione è quindi completato a piacere (linea sottile), ad esempio:



$\boxed{\mathbf{9}}$ a) La funzione è definita se $3x^2 + 2x + 1 \neq 0$; avendo il discriminante negativo, l'equazione di secondo grado non ha soluzioni, dunque il denominatore non si annulla mai e il dominio è $\mathcal{D} = \mathbb{R}$. La funzione (razionale) è ivi continua e derivabile.

b) Poiché il denominatore è sempre positivo nel dominio, la funzione è ≥ 0 se e solo se $2x^2 - 1 \geq 0$ cioè $x \geq 1/\sqrt{2}$ oppure $x \leq -1/\sqrt{2}$. È dunque negativa se $-1/\sqrt{2} < x < 1/\sqrt{2}$, mentre si annulla in $x = -1/\sqrt{2}$ e $x = 1/\sqrt{2}$.

c) Ha senso andare a studiare i limiti a $\pm\infty$. Si ha

$$\lim_{x\to\pm\infty} g(x) = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{2 - 1/x^2}{3 + 2/x + 1/x^2} = \left[\frac{2-0}{3+0+0}\right] = \frac{2}{3},$$

quindi la funzione ammette un asintoto orizzontale a $\pm\infty$.

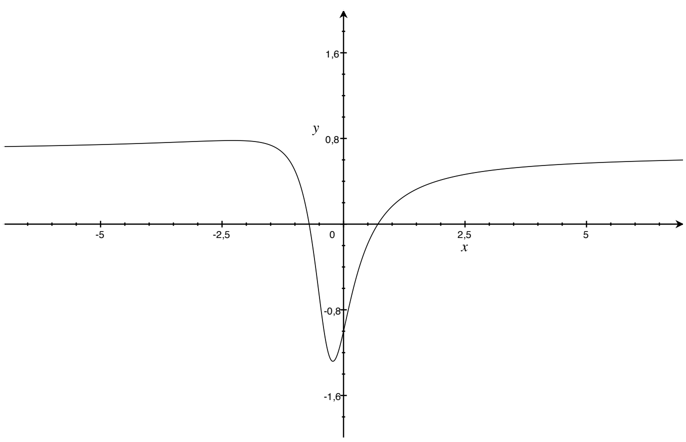
d) La derivata prima è

$$g'(x) = \frac{4x(3x^2 + 2x + 1) - (2x^2 - 1)(6x + 2)}{(3x^2 + 2x + 1)^2} = \frac{2(2x^2 + 5x + 1)}{(3x^2 + 2x + 1)^2}.$$

Il numeratore è ≥ 0 se e solo se $2x^2 + 5x + 1 \geq 0$ ovvero se $x \leq \frac{-5-\sqrt{17}}{4}$ oppure $x \geq \frac{-5+\sqrt{17}}{4}$, dunque

$$g'(x) \begin{cases} < 0, & \text{se } x \in \left]\frac{-5-\sqrt{17}}{4}, \frac{-5+\sqrt{17}}{4}\right[, \\ = 0, & \text{se } x = \frac{-5-\sqrt{17}}{4} \text{ oppure } x = \frac{-5+\sqrt{17}}{4}, \\ > 0, & \text{se } x \in \left]-\infty, \frac{-5-\sqrt{17}}{4}\right[\cup \left]\frac{-5+\sqrt{17}}{4}, +\infty\right[, \end{cases}$$

perciò la funzione è decrescente in $]\frac{-5-\sqrt{17}}{4}, \frac{-5+\sqrt{17}}{4}[$, mentre è crescente in $]-\infty, \frac{-5-\sqrt{17}}{4}[$ e in $]\frac{-5+\sqrt{17}}{4}, +\infty[$. In $x = \frac{-5-\sqrt{17}}{4}$ e in $x = \frac{-5+\sqrt{17}}{4}$ ammette, rispettivamente, un massimo assoluto ed un minimo assoluto.



e) Dal punto c) segue immediatamente che la retta $x = 2/3$ è un asintoto orizzontale, dunque non possono esserci asintoti obliqui. Poiché la funzione è definita e continua su tutto $\mathbb{R}$ non ci possono neanche essere asintoti verticali.

f) L'equazione della retta tangente al grafico nel generico punto $(x_0, g(x_0))$ è

$$y = (x - x_0)g'(x_0) + g(x_0).$$

Poiché $g(0) = -1$ e $g'(0) = 2$, l'equazione della retta cercata è

$$y = 2x - 1.$$

10 a) Si ha $y'(t) = -(1 + 3t^2)\operatorname{sen}(t + t^3)$ e sostituendo si ottiene l'equazione

$$-(1 + 3t^2)\operatorname{sen}(t + t^3) = (3 + t\operatorname{sen}(t^2))\cos^6(t + t^3)$$

che non è identicamente soddisfatta per $t \in \mathbb{R}$ (ad esempio, per $t = 0$ si ha $0 \neq 3$). La funzione non è dunque soluzione. La funzione soddisfa invece la seconda condizione, essendo $y(0) = 1$.

b) Scrivendo $y' = \frac{dy}{dt}$ e utilizzando il metodo di separazione delle variabili si ha

$$\frac{1}{y^6}\,dy = (3 + t\operatorname{sen}(t^2))\,dt$$

e integrando (utilizzando le tabelle)

$$\int y^{-6}\,dy = \int (3 + t\operatorname{sen}(t^2))\,dt \qquad \Longrightarrow \qquad \frac{y^{-5}}{-5} = 3t - \frac{1}{2}\cos(t^2) + c,$$

dove c è la generica costante d'integrazione; il secondo integrale è stato calcolato con la seconda tabella:

$$\int t\operatorname{sen}(t^2)\,dt = \frac{1}{2}\int 2t\operatorname{sen}(t^2)\,dt = \frac{1}{2}\int (t^2)'\operatorname{sen}(t^2)\,dt = -\frac{1}{2}\cos(t^2) + c.$$

Si ottiene quindi

$$y^{-5} = \frac{5\cos(t^2) - 30t - 10c}{2} \qquad \Longleftrightarrow \qquad y = \sqrt[5]{\frac{2}{5\cos(t^2) - 30t - 10c}}.$$

Imponendo la condizione $y(0) = 1$ (nella prima delle due equazioni qui sopra) si ha

$$1 = \frac{5 - 10c}{2},$$

da cui si ricava $c = \frac{3}{10}$. La soluzione è quindi

$$y(t) = \sqrt[5]{\frac{2}{5\cos(t^2) - 30t - 3}}.$$

Alternativamente, si poteva utilizzare direttamente la formula risolutiva per le equazioni a variabili separabili (insieme alla formula fondamentale del calcolo integrale)

$$\begin{aligned}\int_1^y z^{-6}\,dz = \int_0^t (3 + s\operatorname{sen}(s^2))\,ds \quad &\Longrightarrow \quad \left[\frac{z^{-5}}{-5}\right]_1^y = \left[3s - \frac{1}{2}\cos(s^2)\right]_0^t \\ &\Longrightarrow \quad -\frac{1}{5y^5} + \frac{1}{5} = 3t - \frac{1}{2}\cos(t^2) + \frac{1}{2}\end{aligned}$$

che risolta rispetto a y fornisce la soluzione cercata.

11 Dalla prima tabella si ottiene

$$\int \left(x^2\sqrt[3]{x} - \frac{2}{\sqrt{9 - x^2}}\right)dx = \int x^{7/3}\,dx - 2\int \frac{1}{\sqrt{9 - x^2}}\,dx = \frac{x^{10/3}}{10/3} - 2\arcsen\frac{x}{3} + c,$$

con c costante arbitraria, mentre dalla seconda tabella si ha

$$\int_{\pi/4}^{\pi/2} \frac{\cos x}{\operatorname{sen}^3 x}\,dx = \int_{\pi/4}^{\pi/2} (\operatorname{sen} x)'(\operatorname{sen} x)^{-3}\,dx = \left[\frac{(\operatorname{sen} x)^{-2}}{-2}\right]_{\pi/4}^{\pi/2} = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2(1/\sqrt{2})^2} = \frac{1}{2}.$$

Facoltà di Agraria

Corsi di Laurea in VIT e STAL
Modulo di Matematica
Esame del 30/06/2011
A.A. 2010/2011

Scritto		Voto
Teoria	Esercizi	

Istruzioni: apporre nome, cognome e numero di matricola su ogni foglio. Prima della consegna indicare nell'apposito spazio il numero totale di fogli di cui è composto l'elaborato. Svolgere solamente uno tra 10-b) e 11. Allegare lo svolgimento completo degli esercizi 9, 10 e 11. **Non è ammesso l'uso di libri, appunti e calcolatrici grafiche o programmabili.**

Cognome	Nome
Corso di Laurea $\boxed{VIT}$ $\boxed{STAL}$	Matricola
Vecchio ordinamento $\boxed{SI}$ $\boxed{NO}$	n. fogli allegati

1 Se $\lim_{x\to x_0} f(x) = +\infty$ e $\lim_{x\to x_0} g(x) = -3$, allora $\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)}$ è

- A $-\infty$
- B $+\infty$
- C 0
- D non ci sono elementi sufficienti per rispondere

2 Se f è una funzione derivabile due volte in $]a,b[$ e vale $f''(x) > 0$ per ogni $x \in]a,b[$, allora

- A f è crescente
- B f è decrescente
- C f è concava
- D f è convessa

3 L'equazione differenziale $y' = t^5 y - \ln t$ è

- A un'equazione lineare del primo ordine
- B un'equazione lineare del secondo ordine
- C un'equazione non lineare del primo ordine
- D un'equazione non lineare del secondo ordine

4 Il grafico della funzione $f(x) = \dfrac{3-7x}{1-4}$ rappresenta

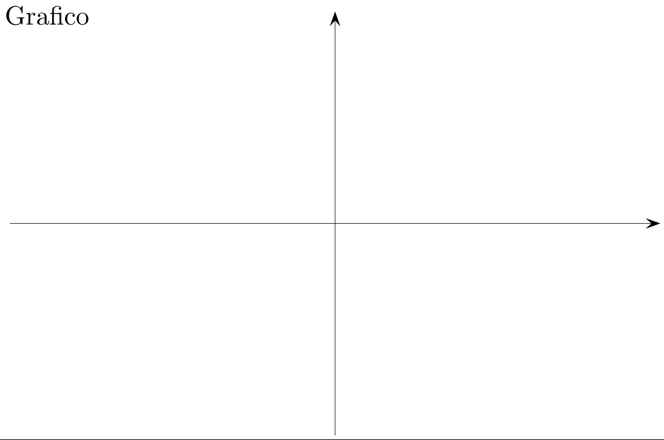
- A una retta
- B una parabola
- C un'iperbole
- D nessuna delle precedenti

5 Per la funzione $f(x) = \operatorname{tg} x$, scrivere il dominio $\mathcal{D}$, l'immagine $\mathcal{I}$, e rappresentare qualitativamente il grafico.

$\mathcal{D} =$

$\mathcal{I} =$

Grafico



6 Per definizione, una primitiva di una funzione $f(x)$ in $]a,b[$ è:

7 Enunciare il teorema dei punti critici.

8 Rappresentare il grafico di una funzione g che verifichi contemporaneamente le seguenti proprietà:

$$\lim_{x\to-\infty} g(x) = -1 \qquad \lim_{x\to1^-} g(x) = +\infty \qquad \lim_{x\to1^+} g(x) = -\infty \qquad \lim_{x\to+\infty} g(x) = -\infty$$

9 Data la funzione

$$g(x) = \frac{2-x^2}{x^2-x+3}$$

a) determinare il dominio $\mathcal{D}$, b) studiare il segno di g; c) calcolare i limiti agli estremi del dominio; d) determinare gli intervalli in cui la funzione è crescente, quelli in cui è decrescente, e gli eventuali punti di massimo/minimo relativo; e) determinare gli eventuali asintoti; f) determinare l'equazione della retta tangente al grafico nel punto di ascissa $x_0 = 0$; g) disegnare un grafico approssimativo di g.

10 Dato il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' = (t^2\cos(t^3) - 2)y^4 \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

a) dire se la funzione $y(t) = \cos(2t^2 - t)$ è soluzione del problema;

b) determinare una soluzione del problema nel caso in cui non lo sia la funzione di cui al punto precedente.

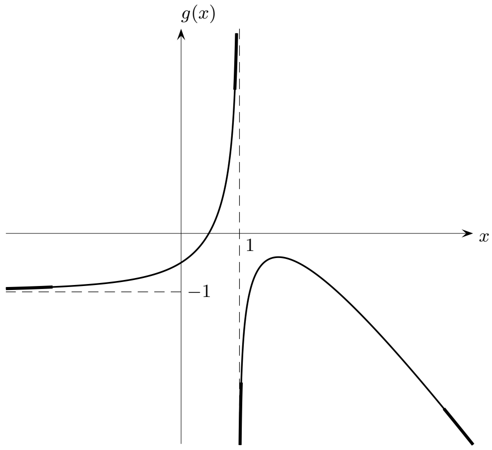
11 Calcolare i seguenti integrali

$$\int \left(x\sqrt{x} + \frac{5}{4+x^2}\right) dx, \qquad \int_0^{\pi/4} \frac{\operatorname{sen} x}{\cos^2 x}\, dx.$$

IMPORTANTE! Risolvere solamente uno tra 10-b) e 11.

Soluzioni dei quesiti dell'esame del 30 giugno 2011

$\boxed{1}$ A: $\boxed{2}$ D; $\boxed{3}$ A; $\boxed{4}$ A; $\boxed{5}$-$\boxed{6}$-$\boxed{7}$ consultare il libro di testo; $\boxed{8}$ in neretto si evidenziano le informazioni date dai limiti. Il grafico della funzione è quindi completato a piacere (linea sottile), ad esempio:



$\boxed{9}$ a) La funzione è definita se $x^2 - x + 3 \neq 0$; avendo il discriminante negativo, l'equazione di secondo grado non ha soluzioni, dunque il denominatore non si annulla mai e il dominio è $\mathcal{D} = \mathbb{R}$. La funzione (razionale) è ivi continua e derivabile.

b) Poiché il denominatore è sempre positivo nel dominio, la funzione è ≥ 0 se e solo se $2 - x^2 \geq 0$ cioè $-\sqrt{2} \leq x \leq \sqrt{2}$. È dunque negativa se $x < -\sqrt{2}$ oppure $x > \sqrt{2}$, mentre si annulla in $x = -\sqrt{2}$ e $x = \sqrt{2}$.

c) Ha senso andare a studiare i limiti a $\pm\infty$. Si ha

$$\lim_{x\to\pm\infty} g(x) = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{2/x^2 - 2}{1 - 1/x + 3/x^2} = \left[\frac{0-1}{1-0+0}\right] = -1,$$

quindi la funzione ammette un asintoto orizzontale a $\pm\infty$.

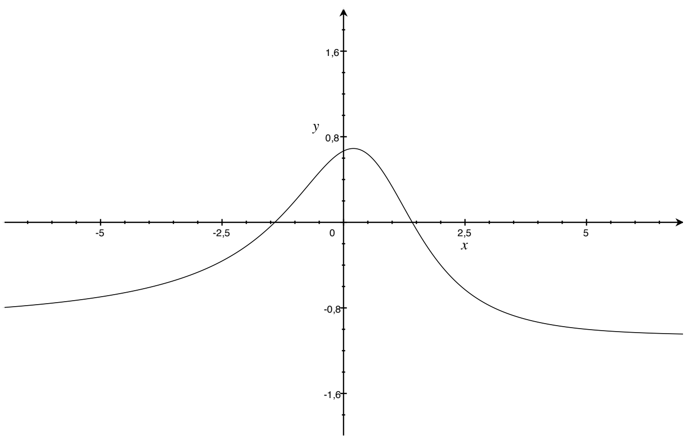
d) La derivata prima è

$$g'(x) = \frac{-2x(x^2 - x + 3) - (2 - x^2)(2x - 1)}{(x^2 - x + 3)^2} = \frac{x^2 - 10x + 2}{(x^2 - x + 3)^2}.$$

Il numeratore è ≥ 0 se e solo se $x^2 - 10x + 2 \geq 0$ ovvero se $x \leq 5 - \sqrt{23}$ oppure $x \geq 5 + \sqrt{23}$, dunque

$$g'(x) \begin{cases} < 0, & \text{se } x \in]5 - \sqrt{23}, 5 + \sqrt{23}[, \\ = 0, & \text{se } x = 5 - \sqrt{23} \text{ oppure } x = 5 + \sqrt{23}, \\ > 0, & \text{se } x \in] - \infty, 5 - \sqrt{23}[\cup]5 + \sqrt{23}, +\infty[, \end{cases}$$

perciò la funzione è decrescente in $]5 - \sqrt{23}, 5 + \sqrt{23}[$, mentre è crescente in $] - \infty, 5 - \sqrt{23}[$ e in $]5 + \sqrt{23}, +\infty[$. In $x = 5 - \sqrt{23}$ e in $x = 5 + \sqrt{23}$ ammette, rispettivamente, un massimo assoluto ed un minimo assoluto.



e) Dal punto c) segue immediatamente che la retta $x = -1$ è un asintoto orizzontale, dunque non possono esserci asintoti obliqui. Poiché la funzione è definita e continua su tutto $\mathbb{R}$ non ci possono neanche essere asintoti verticali.

f) L'equazione della retta tangente al grafico nel generico punto $(x_0, g(x_0))$ è

$$y = (x - x_0)g'(x_0) + g(x_0).$$

Poiché $g(0) = 2/3$ e $g'(0) = 2/9$, l'equazione della retta cercata è

$$y = \frac{2}{9}x + \frac{2}{3}.$$

10 a) Si ha $y'(t) = -(4t-1)\,\mathrm{sen}(2t^2 - t)$ e sostituendo si ottiene l'equazione

$$-(4t-1)\,\mathrm{sen}(2t^2 - t) = (t^2\cos(t^3) - 2)\cos^4(2t^2 - t)$$

che non è identicamente soddisfatta per $t \in \mathbb{R}$ (ad esempio, per $t = 0$ si ha $0 \neq -2$). La funzione non è dunque soluzione. La funzione soddisfa invece la seconda condizione, essendo $y(0) = 1$.

b) Scrivendo $y' = \frac{dy}{dt}$ e utilizzando il metodo di separazione delle variabili si ha

$$\frac{1}{y^4}\,dy = (t^2\cos(t^3) - 2)\,dt$$

e integrando (utilizzando le tabelle)

$$\int y^{-4}\,dy = \int (t^2\cos(t^3) - 2)\,dt \qquad \Longrightarrow \qquad \frac{y^{-3}}{-3} = \frac{1}{3}\,\mathrm{sen}(t^3) - 2t + c,$$

dove c è la generica costante d'integrazione; il secondo integrale è stato calcolato con la seconda tabella:

$$\int t^2\cos(t^3)\,dt = \frac{1}{3}\int 3t^2\cos(t^3)\,dt = \frac{1}{3}\int (t^3)'\cos(t^3)\,dt = \frac{1}{3}\,\mathrm{sen}(t^3) + c.$$

Si ottiene quindi

$$y^{-3} = 6t - \mathrm{sen}(t^3) - 3c \qquad \Longleftrightarrow \qquad y = \sqrt[3]{\frac{1}{6t - \mathrm{sen}(t^3) - 3c}}.$$

Imponendo la condizione $y(0) = 1$ (nella prima delle due equazioni qui sopra) si ha

$$1 = -3c,$$

da cui si ricava $c = -\frac{1}{3}$. La soluzione è quindi

$$y(t) = \sqrt[3]{\frac{1}{6t - \mathrm{sen}(t^3) + 1}}.$$

Alternativamente, si poteva utilizzare direttamente la formula risolutiva per le equazioni a variabili separabili (insieme alla formula fondamentale del calcolo integrale)

$$\begin{aligned}\int_1^y z^{-4}\,dz = \int_0^t (s^2\cos(s^3) - 2)\,ds \quad &\Longrightarrow \quad \left[\frac{z^{-3}}{-3}\right]_1^y = \left[\frac{1}{3}\,\mathrm{sen}(s^3) - 2s\right]_0^t \\ &\Longrightarrow \quad -\frac{1}{3y^3} + \frac{1}{3} = \frac{1}{3}\,\mathrm{sen}(t^3) - 2t\end{aligned}$$

che risolta rispetto a y fornisce la soluzione cercata.

11 Dalla prima tabella si ottiene

$$\int \left(x\sqrt{x} + \frac{5}{4+x^2}\right)dx = \int x^{3/2}\,dx + 5\int \frac{1}{4+x^2}\,dx = \frac{x^{5/2}}{5/2} + \frac{5}{2}\,\mathrm{arctg}\,\frac{x}{2} + c,$$

con c costante arbitraria, mentre dalla seconda tabella si ha

$$\int_0^{\pi/4} \frac{\mathrm{sen}\,x}{\cos^2 x}\,dx = -\int_0^{\pi/4} (\cos x)'(\cos x)^{-2}\,dx = -\left[\frac{(\cos x)^{-1}}{-1}\right]_0^{\pi/4} = \frac{1}{1/\sqrt{2}} - 1 = \sqrt{2} - 1.$$

Facoltà di Agraria

Corsi di Laurea in VIT e STAL
Modulo di Matematica
Esame del 13/07/2011
A.A. 2010/2011

Scritto		Voto
Teoria	Esercizi	

Istruzioni: apporre nome, cognome e numero di matricola su ogni foglio. Prima della consegna indicare nell'apposito spazio il numero totale di fogli di cui è composto l'elaborato. Svolgere solamente uno tra 10-b) e 11. Allegare lo svolgimento completo degli esercizi 9, 10 e 11. **Non è ammesso l'uso di libri, appunti e calcolatrici grafiche o programmabili.**

Cognome	Nome
Corso di Laurea *VIT* *STAL*	Matricola
Vecchio ordinamento *SI* *NO*	n. fogli allegati

1 Se $\lim_{x\to x_0} f(x) = +\infty$ e $\lim_{x\to x_0} g(x) = -3$, allora $\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)}$ è

A $-\infty$

B $+\infty$

C 0

D non ci sono elementi sufficienti per rispondere

2 Se f è una funzione derivabile due volte in $]a, b[$ e vale $f'(x) < 0$ e $f''(x) > 0$ in $]a, b[$, allora

A f è decrescente e concava in $]a, b[$

B f è crescente e convessa in $]a, b[$

C f è decrescente e convessa in $]a, b[$

D f è crescente e concava in $]a, b[$

3 L'equazione differenziale $y'' = y' - \mathrm{sen}(ty)$ è

A un'equazione lineare del primo ordine

B un'equazione lineare del secondo ordine

C un'equazione non lineare del primo ordine

D un'equazione non lineare del secondo ordine

4 Il grafico della funzione $f(x) = \frac{2}{3}x - 5x^2$ rappresenta

A una retta

B una parabola

C un'iperbole

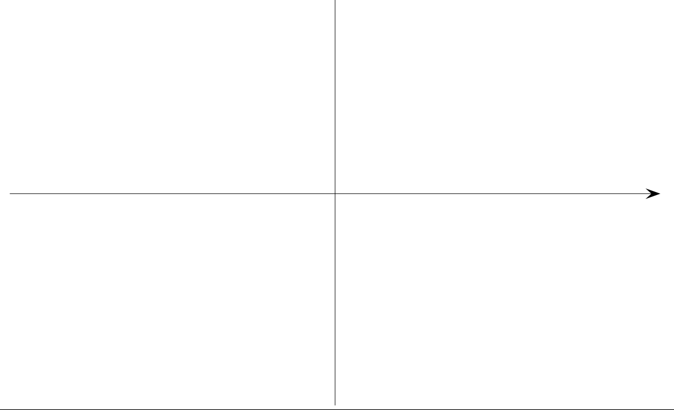
D nessuna delle precedenti

5 Per la funzione $f(x) = \sqrt[5]{x}$, scrivere il dominio $\mathcal{D}$, l'immagine $\mathcal{I}$, e rappresentare qualitativamente il grafico.

$\mathcal{D} =$

$\mathcal{I} =$

Grafico



6 Per definizione, la derivata di una funzione $f(x)$ in x_0 è:

7 Enunciare il teorema fondamentale del calcolo integrale.

8 Rappresentare il grafico di una funzione g che verifichi contemporaneamente le seguenti proprietà:

$$\lim_{x\to-\infty} g(x) = +\infty \qquad \lim_{x\to 2^-} g(x) = +\infty \qquad \lim_{x\to 2^+} g(x) = -\infty \qquad \lim_{x\to+\infty} g(x) = -2$$

9 Data la funzione

$$g(x) = (x^2 - x)\mathrm{e}^{-2x}$$

a) determinare il dominio $\mathcal{D}$, b) studiare il segno di g; c) calcolare i limiti agli estremi del dominio; d) determinare gli intervalli in cui la funzione è crescente, quelli in cui è decrescente, e gli eventuali punti di massimo/minimo relativo; e) determinare gli intervalli in cui la funzione è convessa e quelli in cui è concava; f) disegnare un grafico approssimativo di g.

10 Dato il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' = \dfrac{3t\mathrm{e}^{-2t} + 4t^3}{y^2} \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

a) dire se la funzione $y(t) = \mathrm{e}^{3t^3}$ è soluzione del problema;

b) determinare una soluzione del problema nel caso in cui non lo sia la funzione di cui al punto precedente.

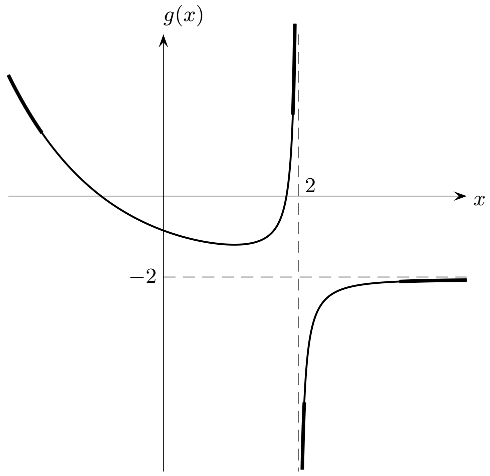
11 Calcolare i seguenti integrali

$$\int \left(\frac{2}{9 + x^2} - \frac{3x^2 \operatorname{sen}^2 x + 5}{\operatorname{sen}^2 x} \right) dx, \qquad \int_0^1 (x^2 - 3x)\mathrm{e}^{-x}\, dx.$$

IMPORTANTE! Risolvere solamente uno tra 10-b) e 11.

Soluzioni dei quesiti dell'esame del 13 luglio 2011

$\boxed{\mathbf{1}}$ A; $\boxed{\mathbf{2}}$ C; $\boxed{\mathbf{3}}$ D; $\boxed{\mathbf{4}}$ B; $\boxed{\mathbf{5}}$-$\boxed{\mathbf{6}}$-$\boxed{\mathbf{7}}$ consultare il libro di testo; $\boxed{\mathbf{8}}$ in neretto si evidenziano le informazioni date dai limiti. Il grafico della funzione è quindi completato a piacere (linea sottile), ad esempio:



$\boxed{\mathbf{9}}$ a) Il dominio è banalmente $\mathcal{D} = \mathbb{R}$. La funzione, prodotto di funzioni continue e derivabili, è ivi continua e derivabile.

b) Poiché la funzione esponenziale è sempre strettamente positiva, $g(x) \geq 0$ se e solo se $x^2 - x \geq 0$ cioè $x \leq 0$ oppure $x \geq 1$. È dunque negativa se $0 < x < 1$, mentre si annulla in $x = 0$ e $x = 1$.

c) Ha senso andare a studiare i limiti a $\pm\infty$. Si ha

$$\lim_{x\to-\infty} g(x) = \lim_{x\to-\infty} (x^2 - x)\mathrm{e}^{-2x} = [+\infty \cdot +\infty] = +\infty,$$

$$\lim_{x\to+\infty} g(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^2 - x}{\mathrm{e}^{2x}} = 0,$$

dove nell'ultimo limite si è usato il ben noto fatto che la funzione esponenziale tende all'infinito più rapidamente di un qualsiasi polinomio per $x \to +\infty$. In particolare, dallo studio dei limiti segue che la funzione non ammette massimo, e ha un asintoto orizzontale a $+\infty$.

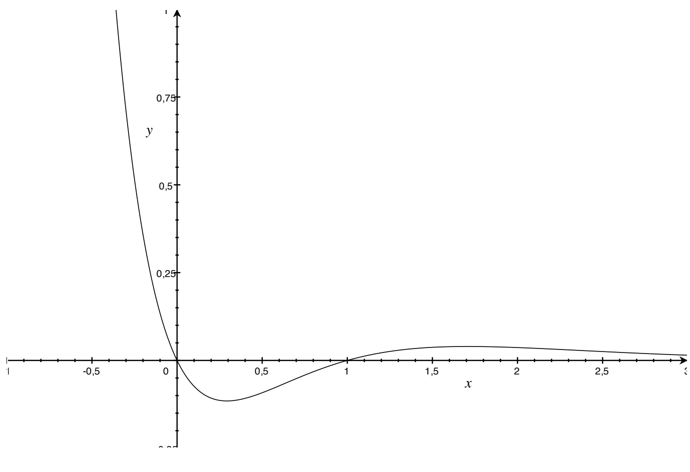
d) La derivata prima è

$$g'(x) = (2x - 1)\mathrm{e}^{-2x} + (x^2 - x)\mathrm{e}^{-2x}(-2) = (-2x^2 + 4x - 1)\mathrm{e}^{-2x}.$$

La derivata prima è ≥ 0 se e solo se $-2x^2 + 4x - 1 \geq 0$ ovvero se $1 - \frac{\sqrt{2}}{2} \leq x \leq 1 + \frac{\sqrt{2}}{2}$, dunque

$$g'(x) \begin{cases} > 0, & \text{se } x \in]1 - \frac{\sqrt{2}}{2}, 1 + \frac{\sqrt{2}}{2}[, \\ = 0, & \text{se } x = 1 - \frac{\sqrt{2}}{2} \text{ oppure } x = 1 + \frac{\sqrt{2}}{2}, \\ < 0, & \text{se } x \in]-\infty, 1 - \frac{\sqrt{2}}{2}[\cup]1 + \frac{\sqrt{2}}{2}, +\infty[, \end{cases}$$

perciò la funzione è crescente in $]1 - \frac{\sqrt{2}}{2}, 1 + \frac{\sqrt{2}}{2}[$, mentre è decrescente in $]-\infty, 1 - \frac{\sqrt{2}}{2}[$ e in $]1 + \frac{\sqrt{2}}{2}, +\infty[$. In $x = 1 + \frac{\sqrt{2}}{2}$ ammette un massimo relativo mentre in $x = 1 - \frac{\sqrt{2}}{2}$ ammette un minimo relativo e assoluto.



e) La derivata seconda è

$$g''(x) = (-4x+4)\mathrm{e}^{-2x} - 2(-2x^2+4x-1)\mathrm{e}^{-2x} = 2(2x^2-6x+3)\mathrm{e}^{-2x}.$$

La derivata seconda è ≥ 0 se e solo se $2x^2-6x+3 \geq 0$ cioè se $x \leq \frac{3-\sqrt{3}}{2}$ oppure $x \geq \frac{3+\sqrt{3}}{2}$, quindi

$$g''(x) \begin{cases} < 0, & \text{se } x \in]\frac{3-\sqrt{3}}{2}, \frac{3+\sqrt{3}}{2}[, \\ = 0, & \text{se } x = \frac{3-\sqrt{3}}{2} \text{ oppure } x = \frac{3+\sqrt{3}}{2}, \\ > 0, & \text{se } x \in]-\infty, \frac{3-\sqrt{3}}{2}[\cup]\frac{3+\sqrt{3}}{2}, +\infty[, \end{cases}$$

perciò la funzione è concava in $]\frac{3-\sqrt{3}}{2}, \frac{3+\sqrt{3}}{2}[$, mentre è convessa in $]-\infty, \frac{3-\sqrt{3}}{2}[$ e in $]\frac{3+\sqrt{3}}{2}, +\infty[$. In $x = \frac{3-\sqrt{3}}{2}$ e in $x = \frac{3+\sqrt{3}}{2}$ ammette due punti di flesso.

10 a) Si ha $y'(t) = 9t^2\mathrm{e}^{3t^3}$ e sostituendo si ottiene l'equazione

$$9t^2\mathrm{e}^{3t^3} = \frac{3t\mathrm{e}^{-2t}+4t^3}{\mathrm{e}^{6t^3}}$$

che non è identicamente soddisfatta per $t \in \mathbb{R}$ (ad esempio, per $t=1$ si ha $9\mathrm{e}^3 \neq (3\mathrm{e}^{-2}+4)/\mathrm{e}^6$). La funzione non è dunque soluzione. La funzione soddisfa invece la seconda condizione, essendo $y(0)=1$.

b) Scrivendo $y' = \frac{dy}{dt}$ e utilizzando il metodo di separazione delle variabili si ha

$$y^2\,dy = (3t\mathrm{e}^{-2t}+4t^3)\,dt$$

e integrando (utilizzando le tabelle)

$$\int y^2\,dy = \int (3t\mathrm{e}^{-2t}+4t^3)\,dt \qquad \Longrightarrow \qquad \frac{y^3}{3} = -\frac{3}{4}(2t+1)\mathrm{e}^{-2t} + t^4 + c,$$

dove c è la generica costante d'integrazione; il secondo integrale è stato calcolato per parti:

$$\int 3t\mathrm{e}^{-2t}\,dt = 3t\frac{\mathrm{e}^{-2t}}{-2} - \int 3\frac{\mathrm{e}^{-2t}}{-2}\,dt = -\frac{3}{2}t\mathrm{e}^{-2t} + \frac{3}{2}\int \mathrm{e}^{-2t}\,dt = -\frac{3}{2}t\mathrm{e}^{-2t} - \frac{3}{4}\mathrm{e}^{-2t}.$$

Si ottiene quindi

$$y^3 = -\frac{9}{4}(2t+1)\mathrm{e}^{-2t} + 3t^4 + 3c \qquad \Longleftrightarrow \qquad y = \sqrt[3]{-\frac{9}{4}(2t+1)\mathrm{e}^{-2t} + 3t^4 + 3c}.$$

Imponendo la condizione $y(0)=1$ (nella prima delle due equazioni qui sopra) si ha

$$1 = -\frac{9}{4} + 3c,$$

da cui si ricava $c = \frac{13}{12}$. La soluzione è quindi

$$y(t) = \sqrt[3]{-\frac{9}{4}(2t+1)\mathrm{e}^{-2t} + 3t^4 + \frac{13}{4}}.$$

Alternativamente, si poteva utilizzare direttamente la formula risolutiva per le equazioni a variabili separabili (insieme alla formula fondamentale del calcolo integrale)

$$\int_1^y z^2\,dz = \int_0^t (3s\mathrm{e}^{-2s}+4s^3)\,ds \quad \Longrightarrow \quad \left[\frac{z^3}{3}\right]_1^y = \left[-\frac{3}{4}(2s+1)\mathrm{e}^{-2s} + s^4\right]_0^t$$

$$\Longrightarrow \quad \frac{y^3}{3} - \frac{1}{3} = -\frac{3}{4}(2t+1)\mathrm{e}^{-2t} + t^4 + \frac{3}{4}$$

che risolta rispetto a y fornisce la soluzione cercata.

11 Dalla prima tabella si ottiene

$$\int \Big(\frac{2}{9+x^2} - \frac{3x^2\operatorname{sen}^2 x + 5}{\operatorname{sen}^2 x}\Big)\,dx = 2\int \frac{1}{9+x^2}\,dx - 3\int x^2\,dx - 5\int \frac{1}{\operatorname{sen}^2 x}\,dx = \frac{2}{3}\operatorname{arctg}\frac{x}{3} - x^3 + 5\cot x + c,$$

con c costante arbitraria, mentre integrando per parti si ha

$$\int_0^1 (x^2-3x)\mathrm{e}^{-x}\,dx = \big[-(x^2-3x)\mathrm{e}^{-x}\big]_0^1 + \int_0^1 (2x-3)\mathrm{e}^{-x}\,dx = 2\mathrm{e}^{-1} + \big[-(2x-3)\mathrm{e}^{-x}\big]_0^1 + \int_0^1 2\mathrm{e}^{-x}\,dx$$

$$= 2\mathrm{e}^{-1} + (\mathrm{e}^{-1}-3) + \big[-2\mathrm{e}^{-x}\big]_0^1 = 3\mathrm{e}^{-1} - 3 - 2\mathrm{e}^{-1} + 2 = \frac{1-\mathrm{e}}{\mathrm{e}}.$$

Facoltà di Agraria

Corsi di Laurea in VIT e STAL
Modulo di Matematica
Esame del 13/07/2011
A.A. 2010/2011

Scritto		Voto
Teoria	Esercizi	

Istruzioni: apporre nome, cognome e numero di matricola su ogni foglio. Prima della consegna indicare nell'apposito spazio il numero totale di fogli di cui è composto l'elaborato. Svolgere solamente uno tra 10-b) e 11. Allegare lo svolgimento completo degli esercizi 9, 10 e 11. **Non è ammesso l'uso di libri, appunti e calcolatrici grafiche o programmabili.**

Cognome	Nome
Corso di Laurea *VIT* *STAL*	Matricola
Vecchio ordinamento *SI* *NO*	n. fogli allegati

1 Se $\lim_{x\to x_0} f(x) = +\infty$ e $\lim_{x\to x_0} g(x) = +\infty$, allora $\lim_{x\to x_0} f(x) - g(x)$ è

- A $-\infty$
- B $+\infty$
- C 0
- D non ci sono elementi sufficienti per rispondere

2 Se f è una funzione derivabile due volte in $]a, b[$ e vale $f''(x_0) = 0$ e $f'(x_0) > 0$ con $x_0 \in]a, b[$, allora

- A x_0 è sempre punto di minimo relativo per f
- B x_0 è sempre punto di massimo relativo per f
- C x_0 è sempre punto di flesso per f
- D nessuna delle precedenti

3 L'equazione differenziale $y' = \mathrm{sen}(t) - t^2 y$ è

- A un'equazione lineare del primo ordine
- B un'equazione lineare del secondo ordine
- C un'equazione non lineare del primo ordine
- D un'equazione non lineare del secondo ordine

4 Il grafico della funzione $f(x) = \dfrac{3x^3+1}{2x^3-3}$ rappresenta

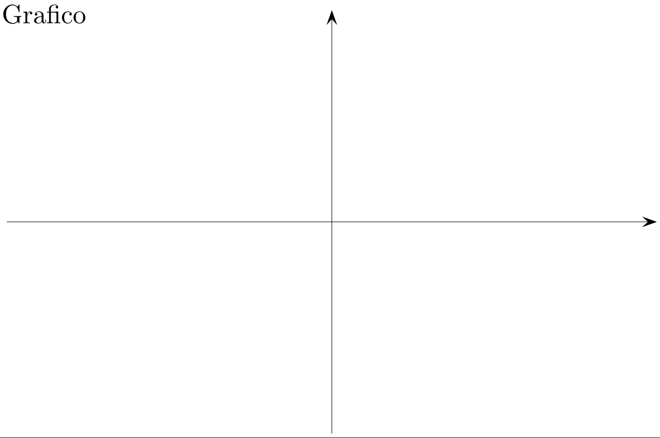
- A una retta
- B una parabola
- C un'iperbole
- D nessuna delle precedenti

5 Per la funzione $f(x) = (4/5)^x$, scrivere il dominio $\mathcal{D}$, l'immagine $\mathcal{I}$, e rappresentare qualitativamente il grafico.

$\mathcal{D} =$

$\mathcal{I} =$

Grafico



6 Per definizione, una primitiva di una funzione $f(x)$ in $]a,b[$ è:

7 Enunciare il teorema dei punti critici.

8 Rappresentare il grafico di una funzione g che verifichi contemporaneamente le seguenti proprietà:

$$\lim_{x\to-\infty} g(x) = -1 \qquad \lim_{x\to-3^-} g(x) = -\infty \qquad \lim_{x\to-3^+} g(x) = +\infty \qquad \lim_{x\to+\infty} g(x) = -\infty$$

9 Data la funzione

$$g(x) = (x^2 - x)\mathrm{e}^{-2x}$$

a) determinare il dominio $\mathcal{D}$, b) studiare il segno di g; c) calcolare i limiti agli estremi del dominio; d) determinare gli intervalli in cui la funzione è crescente, quelli in cui è decrescente, e gli eventuali punti di massimo/minimo relativo; e) determinare gli intervalli in cui la funzione è convessa e quelli in cui è concava; f) disegnare un grafico approssimativo di g.

10 Dato il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' = \dfrac{3t^2 - 2t\mathrm{e}^{-t}}{y^4} \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

a) dire se la funzione $y(t) = \mathrm{e}^{2t^2}$ è soluzione del problema;

b) determinare una soluzione del problema nel caso in cui non lo sia la funzione di cui al punto precedente.

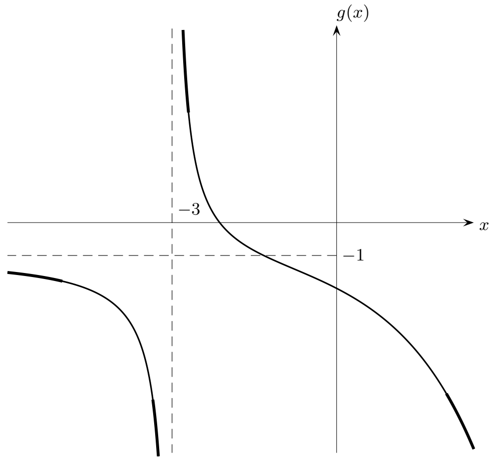
11 Calcolare i seguenti integrali

$$\int \left(\frac{4x^3\cos^2 x - 3}{\cos^2 x} + \frac{6}{\sqrt{4-x^2}}\right) dx, \qquad \int_0^1 (x - 2x^2)\mathrm{e}^{-3x}\, dx.$$

IMPORTANTE! Risolvere solamente uno tra 10-b) e 11.

Soluzioni dei quesiti dell'esame del 13 luglio 2011

$\boxed{\mathbf{1}}$ D; $\boxed{\mathbf{2}}$ D; $\boxed{\mathbf{3}}$ A; $\boxed{\mathbf{4}}$ D; $\boxed{\mathbf{5}}$-$\boxed{\mathbf{6}}$-$\boxed{\mathbf{7}}$ consultare il libro di testo; $\boxed{\mathbf{8}}$ in neretto si evidenziano le informazioni date dai limiti. Il grafico della funzione è quindi completato a piacere (linea sottile), ad esempio:



$\boxed{\mathbf{9}}$ a) Il dominio è banalmente $\mathcal{D} = \mathbb{R}$. La funzione, prodotto di funzioni continue e derivabili, è ivi continua e derivabile.

b) Poiché la funzione esponenziale è sempre strettamente positiva, $g(x) \geq 0$ se e solo se $x^2 - x \geq 0$ cioè $x \leq 0$ oppure $x \geq 1$. È dunque negativa se $0 < x < 1$, mentre si annulla in $x = 0$ e $x = 1$.

c) Ha senso andare a studiare i limiti a $\pm\infty$. Si ha

$$\lim_{x\to-\infty} g(x) = \lim_{x\to-\infty} (x^2 - x)\mathrm{e}^{-2x} = [+\infty \cdot +\infty] = +\infty,$$

$$\lim_{x\to+\infty} g(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^2 - x}{\mathrm{e}^{2x}} = 0,$$

dove nell'ultimo limite si è usato il ben noto fatto che la funzione esponenziale tende all'infinito più rapidamente di un qualsiasi polinomio per $x \to +\infty$. In particolare, dallo studio dei limiti segue che la funzione non ammette massimo, e ha un asintoto orizzontale a $+\infty$.

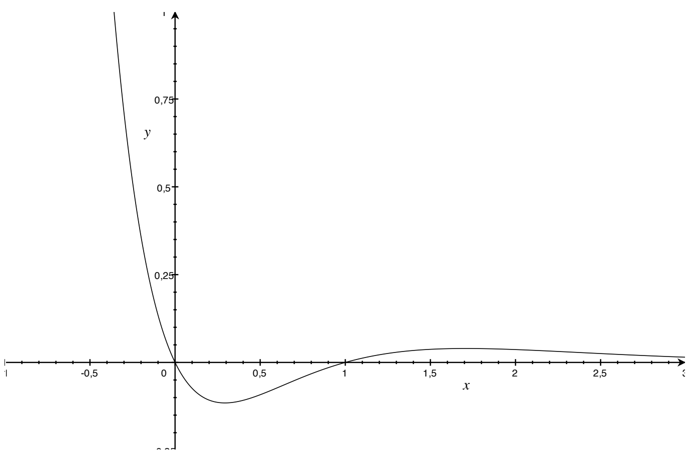
d) La derivata prima è

$$g'(x) = (2x - 1)\mathrm{e}^{-2x} + (x^2 - x)\mathrm{e}^{-2x}(-2) = (-2x^2 + 4x - 1)\mathrm{e}^{-2x}.$$

La derivata prima è ≥ 0 se e solo se $-2x^2 + 4x - 1 \geq 0$ ovvero se $1 - \frac{\sqrt{2}}{2} \leq x \leq 1 + \frac{\sqrt{2}}{2}$, dunque

$$g'(x) \begin{cases} > 0, & \text{se } x \in]1 - \frac{\sqrt{2}}{2}, 1 + \frac{\sqrt{2}}{2}[, \\ = 0, & \text{se } x = 1 - \frac{\sqrt{2}}{2} \text{ oppure } x = 1 + \frac{\sqrt{2}}{2}, \\ < 0, & \text{se } x \in]-\infty, 1 - \frac{\sqrt{2}}{2}[\cup]1 + \frac{\sqrt{2}}{2}, +\infty[, \end{cases}$$

perciò la funzione è crescente in $]1 - \frac{\sqrt{2}}{2}, 1 + \frac{\sqrt{2}}{2}[$, mentre è decrescente in $]-\infty, 1 - \frac{\sqrt{2}}{2}[$ e in $]1 + \frac{\sqrt{2}}{2}, +\infty[$. In $x = 1 + \frac{\sqrt{2}}{2}$ ammette un massimo relativo mentre in $x = 1 - \frac{\sqrt{2}}{2}$ ammette un minimo relativo e assoluto.



e) La derivata seconda è

$$g''(x) = (-4x+4)\mathrm{e}^{-2x} - 2(-2x^2+4x-1)\mathrm{e}^{-2x} = 2(2x^2-6x+3)\mathrm{e}^{-2x}.$$

La derivata seconda è ≥ 0 se e solo se $2x^2-6x+3 \geq 0$ cioè se $x \leq \frac{3-\sqrt{3}}{2}$ oppure $x \geq \frac{3+\sqrt{3}}{2}$, quindi

$$g''(x) \begin{cases} <0, & \text{se } x \in]\frac{3-\sqrt{3}}{2}, \frac{3+\sqrt{3}}{2}[, \\ =0, & \text{se } x = \frac{3-\sqrt{3}}{2} \text{ oppure } x = \frac{3+\sqrt{3}}{2}, \\ >0, & \text{se } x \in]-\infty, \frac{3-\sqrt{3}}{2}[\cup]\frac{3+\sqrt{3}}{2}, +\infty[, \end{cases}$$

perciò la funzione è concava in $]\frac{3-\sqrt{3}}{2}, \frac{3+\sqrt{3}}{2}[$, mentre è convessa in $]-\infty, \frac{3-\sqrt{3}}{2}[$ e in $]\frac{3+\sqrt{3}}{2}, +\infty[$. In $x = \frac{3-\sqrt{3}}{2}$ e in $x = \frac{3+\sqrt{3}}{2}$ ammette due punti di flesso.

10 a) Si ha $y'(t) = 4t\mathrm{e}^{2t^2}$ e sostituendo si ottiene l'equazione

$$4t\mathrm{e}^{2t^2} = \frac{3t^2 - 2t\mathrm{e}^{-t}}{\mathrm{e}^{8t^2}}$$

che non è identicamente soddisfatta per $t \in \mathbb{R}$ (ad esempio, per $t=1$ si ha $4\mathrm{e}^2 \neq (3-2\mathrm{e}^{-1})/\mathrm{e}^8$). La funzione non è dunque soluzione. La funzione soddisfa invece la seconda condizione, essendo $y(0)=1$.

b) Scrivendo $y' = \frac{dy}{dt}$ e utilizzando il metodo di separazione delle variabili si ha

$$y^4\,dy = (3t^2 - 2t\mathrm{e}^{-t})\,dt$$

e integrando (utilizzando le tabelle)

$$\int y^4\,dy = \int (3t^2 - 2t\mathrm{e}^{-t})\,dt \qquad \Longrightarrow \qquad \frac{y^5}{5} = t^3 - 2(t+1)\mathrm{e}^{-t} + c,$$

dove c è la generica costante d'integrazione; il secondo integrale è stato calcolato per parti:

$$\int 2t\mathrm{e}^{-t}\,dt = -2t\mathrm{e}^{-t} + \int 2\mathrm{e}^{-t}\,dt = -2t\mathrm{e}^{-t} - 2\mathrm{e}^{-t}.$$

Si ottiene quindi

$$y^5 = 5t^3 - 10(t+1)\mathrm{e}^{-t} + 5c \qquad \Longleftrightarrow \qquad y = \sqrt[5]{5t^3 - 10(t+1)\mathrm{e}^{-t} + 5c}.$$

Imponendo la condizione $y(0)=1$ (nella prima delle due equazioni qui sopra) si ha

$$1 = -10 + 5c,$$

da cui si ricava $c = \frac{11}{5}$. La soluzione è quindi

$$y(t) = \sqrt[5]{5t^3 - 10(t+1)\mathrm{e}^{-t} + 11}.$$

Alternativamente, si poteva utilizzare direttamente la formula risolutiva per le equazioni a variabili separabili (insieme alla formula fondamentale del calcolo integrale)

$$\int_1^y z^4\,dz = \int_0^t (3s^2 - 2s\mathrm{e}^{-s})\,ds \quad \Longrightarrow \quad \left[\frac{z^5}{5}\right]_1^y = \left[s^3 - 2(s+1)\mathrm{e}^{-s}\right]_0^t$$

$$\Longrightarrow \quad \frac{y^5}{5} - \frac{1}{5} = t^3 - 2(t+1)\mathrm{e}^{-t} + 2$$

che risolta rispetto a y fornisce la soluzione cercata.

11 Dalla prima tabella si ottiene

$$\int \left(\frac{4x^3\cos^2 x - 3}{\cos^2 x} + \frac{6}{\sqrt{4-x^2}}\right) dx = 4\int x^3\,dx - 3\int \frac{1}{\cos^2 x}\,dx + 6\int \frac{1}{\sqrt{4-x^2}}\,dx = x^4 - 3\operatorname{tg} x + 6\arcsen\frac{x}{2} + c,$$

con c costante arbitraria, mentre integrando per parti si ha

$$\int_0^1 (x-2x^2)\mathrm{e}^{-3x}\,dx = \left[(x-2x^2)\frac{\mathrm{e}^{-3x}}{-3}\right]_0^1 - \int_0^1 (1-4x)\frac{\mathrm{e}^{-3x}}{-3}\,dx = \frac{\mathrm{e}^{-3}}{3} - \left[(1-4x)\frac{\mathrm{e}^{-3x}}{9}\right]_0^1 + \int_0^1 -4\frac{\mathrm{e}^{-3x}}{9}\,dx$$

$$= \frac{\mathrm{e}^{-3}}{3} + \frac{1}{3}\mathrm{e}^{-3} + \frac{1}{9} + \left[4\frac{\mathrm{e}^{-3x}}{27}\right]_0^1 = \frac{2}{3}\mathrm{e}^{-3} + \frac{1}{9} + \frac{4}{27}\mathrm{e}^{-3} - \frac{4}{27} = \frac{22 - \mathrm{e}^3}{27\mathrm{e}^3}.$$

Facoltà di Agraria

Corsi di Laurea in VIT e STAL
Modulo di Matematica
Esame del 15/09/2011
A.A. 2010/2011

Scritto		Voto
Teoria	Esercizi	

Istruzioni: apporre nome, cognome e numero di matricola su ogni foglio. Prima della consegna indicare nell'apposito spazio il numero totale di fogli di cui è composto l'elaborato. Svolgere solamente uno tra 10-b) e 11. Allegare lo svolgimento completo degli esercizi 9, 10 e 11. **Non è ammesso l'uso di libri, appunti e calcolatrici grafiche o programmabili.**

Cognome	Nome
Corso di Laurea $\boxed{VIT}$ $\boxed{STAL}$	Matricola
Vecchio ordinamento $\boxed{SI}$ $\boxed{NO}$	n. fogli allegati

1 Se $\lim_{x\to x_0} f(x) = +\infty$ e $\lim_{x\to x_0} g(x) = -\infty$, allora $\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)}$ è

A $-\infty$

B $+\infty$

C -1

D non ci sono elementi sufficienti per rispondere

2 Se f è una funzione derivabile due volte in $]a,b[$ e vale $f'(x_0) = 0$ e $f''(x_0) < 0$ con $x_0 \in]a,b[$, allora

A x_0 è sempre punto di minimo relativo per f

B x_0 è sempre punto di massimo relativo per f

C x_0 è sempre punto di flesso per f

D nessuna delle precedenti

3 L'equazione differenziale $y'' = \mathrm{sen}(y + y')$ è

A un'equazione lineare del primo ordine

B un'equazione lineare del secondo ordine

C un'equazione non lineare del primo ordine

D un'equazione non lineare del secondo ordine

4 Il grafico della funzione $f(x) = \frac{1}{1-3x}$ rappresenta

A una retta

B una parabola

C un'iperbole

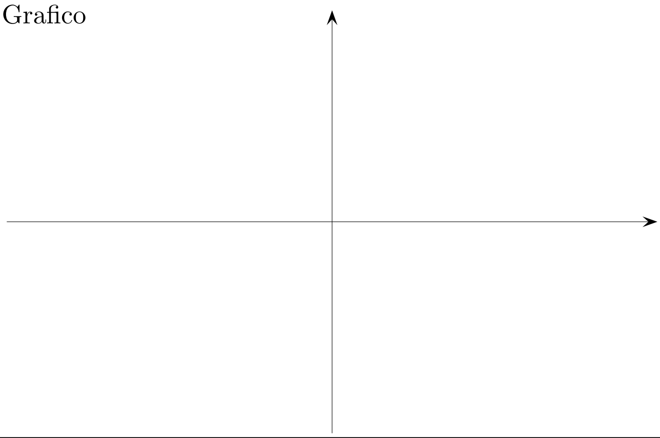
D nessuna delle precedenti

5 Per la funzione $f(x) = (5/7)^x$, scrivere il dominio $\mathcal{D}$, l'immagine $\mathcal{I}$, e rappresentare qualitativamente il grafico.

$\mathcal{D} =$

$\mathcal{I} =$

Grafico



6 Per definizione, la derivata di una funzione $f(x)$ in x_0 è:

7 Enunciare il teorema fondamentale del calcolo integrale.

8 Rappresentare il grafico di una funzione g che verifichi contemporaneamente le seguenti proprietà:

$$\lim_{x\to-\infty} g(x) = +\infty \qquad \lim_{x\to 2^-} g(x) = -\infty \qquad \lim_{x\to 2^+} g(x) = +\infty \qquad \lim_{x\to+\infty} g(x) = -1$$

9 Data la funzione

$$g(x) = \frac{x-1}{(2x-1)^2}$$

a) determinare il dominio $\mathcal{D}$, b) studiare il segno di g; c) calcolare i limiti agli estremi del dominio; d) determinare gli intervalli in cui la funzione è crescente, quelli in cui è decrescente, e gli eventuali punti di massimo/minimo relativo; e) determinare gli intervalli in cui la funzione è convessa e quelli in cui è concava; f) disegnare un grafico approssimativo di g.

10 Dato il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' = \dfrac{3^y(2+t^2)}{t} \\ y(1) = 0 \end{cases}$$

a) dire se la funzione $y(t) = \log_3(4t-3)$ è soluzione del problema;

b) determinare una soluzione del problema nel caso in cui non lo sia la funzione di cui al punto precedente.

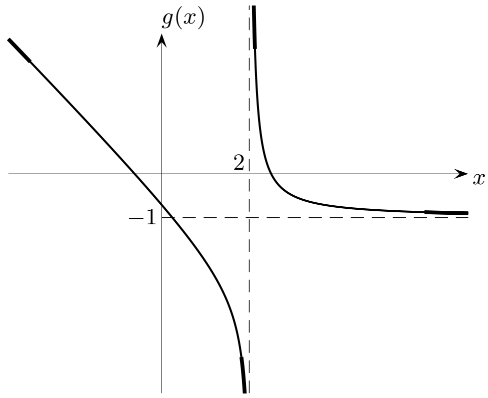
11 Calcolare i seguenti integrali

$$\int \Big(\frac{3}{\sqrt{25-x^2}} - \frac{3x\sqrt{x}+5x}{2x^2}\Big)\,dx, \qquad \int_0^1 \frac{3x+1}{x^2+1}\,dx.$$

IMPORTANTE! Risolvere solamente uno tra 10-b) e 11.

Soluzioni dei quesiti dell'esame del 15 settembre 2011

$\boxed{1}$ D; $\boxed{2}$ B; $\boxed{3}$ D; $\boxed{4}$ C; $\boxed{5}$-$\boxed{6}$-$\boxed{7}$ consultare il libro di testo; $\boxed{8}$ in neretto si evidenziano le informazioni date dai limiti. Il grafico della funzione è quindi completato a piacere (linea sottile), ad esempio:



$\boxed{9}$ a) Il dominio è costituito dagli x tali che $2x - 1 \neq 0$ cioè $\mathcal{D} = \mathbb{R} \setminus \{1/2\}$. La funzione (razionale) è ivi continua e derivabile.

b) Poiché il denominatore è sempre positivo nel dominio, la funzione è positiva se e solo se $x - 1 > 0$ cioè $x > 1$. Si annulla in $x = 1$.

c) Ha senso andare a studiare i limiti a $\pm\infty$ e in $1/2$. Si ha

$$\lim_{x \to 1/2} g(x) = \left[\frac{-1/2}{0^+}\right] = -\infty, \qquad \lim_{x \to \pm\infty} g(x) = \lim_{x \to \pm\infty} \left(\frac{1}{x} \cdot \frac{1 - 1/x}{(2 - 1/x)^2}\right) = \left[0 \cdot \frac{1}{4}\right] = 0,$$

quindi la funzione ammette l'asintoto orizzontale $y = 0$ a $\pm\infty$ e l'asintoto verticale $x = 1/2$.

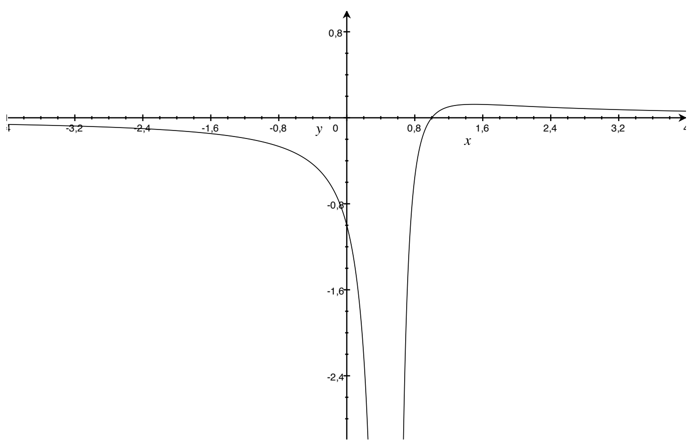
d) La derivata prima è

$$g'(x) = \frac{1 \cdot (2x-1)^2 - (x-1)2(2x-1)2}{(2x-1)^4} = \frac{(2x-1) - (x-1)4}{(2x-1)^3} = \frac{3 - 2x}{(2x-1)^3}.$$

Il numeratore è ≥ 0 se e solo se $3 - 2x \geq 0$ ovvero se $x \leq 3/2$, il denominatore è positivo se $(2x-1)^3 > 0$ ovvero $2x - 1 > 0$ cioè $x > 1/2$. Si ottiene dunque

$$g'(x) \begin{cases} < 0, & \text{se } x \in]-\infty, 1/2[\cup]3/2, +\infty[, \\ = 0, & \text{se } x = 3/2, \\ > 0, & \text{se } x \in]1/2, 3/2[, \end{cases}$$

perciò la funzione è decrescente in $]-\infty, 1/2[$ e in $]3/2, +\infty[$, mentre è crescente in $]1/2, 3/2[$. In $x = 3/2$ ammette un massimo assoluto.



e) La derivata seconda è

$$g''(x) = \frac{-2(2x-1)^3 - (3-2x)3(2x-1)^2 2}{(2x-1)^6} = \frac{-2(2x-1) - (3-2x)6}{(2x-1)^4} = \frac{8(x-2)}{(2x-1)^4}.$$

La derivata seconda è ≥ 0 se e solo se $x-2 \geq 0$ cioè se $x \geq 2$, quindi

$$g''(x) \begin{cases} >0, & \text{se } x \in]2,+\infty[, \\ =0, & \text{se } x = 2, \\ <0, & \text{se } x \in]-\infty,1/2[\cup]1/2,2[, \end{cases}$$

perciò la funzione è convessa in $]2,+\infty[$, mentre è concava in $]-\infty,1/2[$ e in $]1/2,2[$. In $x=2$ ammette un punto di flesso.

10 a) Si ha $y'(t) = \frac{\log_3 \mathrm{e}}{4t-3} 4$ e sostituendo si ottiene l'equazione

$$\frac{4\log_3 \mathrm{e}}{4t-3} = \frac{3^{\log_3(4t-3)}(2+t^2)}{t} = \frac{(4t-3)(2+t^2)}{t}$$

che non è identicamente soddisfatta (ad esempio, per $t=1$ si ha $4\log_3 \mathrm{e} \neq 3$). La funzione non è dunque soluzione. La funzione soddisfa invece la seconda condizione, essendo $y(1)=0$.

b) Scrivendo $y' = \frac{dy}{dt}$ e utilizzando il metodo di separazione delle variabili si ha

$$\frac{1}{3^y}\,dy = \frac{2+t^2}{t}\,dt$$

e integrando (utilizzando le tabelle)

$$\int 3^{-y}\,dy = \int \Big(\frac{2}{t}+t\Big)\,dt \qquad \Longrightarrow \qquad -3^{-y} = 2\ln|t| + \frac{t^2}{2} + c,$$

dove c è la generica costante d'integrazione. Si osservi che essendo $t_0 = 1$ si può supporre che $t > 0$ dunque $|t| = t$. Si ottiene quindi

$$3^{-y} = -2\ln t - \frac{t^2}{2} - c \qquad \Longleftrightarrow \qquad y = -\log_3\Big(-2\ln t - \frac{t^2}{2} - c\Big).$$

Imponendo la condizione $y(1)=0$ (nella prima delle due equazioni qui sopra) si ha

$$1 = -\frac{1}{2} - c,$$

da cui si ricava $c = -3/2$. La soluzione è quindi

$$y(t) = -\log_3\Big(\frac{3}{2} - 2\ln t - \frac{t^2}{2}\Big).$$

Alternativamente, si poteva utilizzare direttamente la formula risolutiva per le equazioni a variabili separabili (insieme alla formula fondamentale del calcolo integrale)

$$\begin{aligned} \int_0^y 3^{-z}\,dz = \int_1^t \Big(\frac{2}{s}+s\Big)\,ds \quad &\Longrightarrow \quad \big[-3^{-z}\big]_0^y = \Big[2\ln s + \frac{s^2}{2}\Big]_1^t \\ &\Longrightarrow \quad 1 - 3^{-y} = 2\ln t + \frac{t^2}{2} - \frac{1}{2} \end{aligned}$$

che risolta rispetto a y fornisce la soluzione cercata.

11 Dalla prima tabella si ottiene

$$\begin{aligned} \int \Big(\frac{3}{\sqrt{25-x^2}} - \frac{3x\sqrt{x}+5x}{2x^2}\Big)\,dx &= 3\int \frac{1}{\sqrt{25-x^2}}\,dx - \frac{3}{2}\int x^{-1/2}\,dx - \frac{5}{2}\int \frac{1}{x}\,dx \\ &= 3\,\mathrm{arcsen}\,\frac{x}{5} - 3x^{1/2} - \frac{5}{2}\ln|x| + c, \end{aligned}$$

con c costante arbitraria, mentre dalla seconda tabella si ha

$$\int_0^1 \frac{3x+1}{x^2+1}\,dx = \frac{3}{2}\int_0^1 \frac{2x}{x^2+1}\,dx + \int_0^1 \frac{1}{x^2+1}\,dx = \Big[\frac{3}{2}\ln(x^2+1) + \mathrm{arctg}\,x\Big]_0^1 = \frac{3}{2}\ln 2 + \frac{\pi}{4}.$$

Facoltà di Agraria

Corsi di Laurea in VIT e STAL
Modulo di Matematica
Esame del 15/09/2011
A.A. 2010/2011

Scritto		Voto
Teoria	Esercizi	

Istruzioni: apporre nome, cognome e numero di matricola su ogni foglio. Prima della consegna indicare nell'apposito spazio il numero totale di fogli di cui è composto l'elaborato. Svolgere solamente uno tra 10-b) e 11. Allegare lo svolgimento completo degli esercizi 9, 10 e 11. **Non è ammesso l'uso di libri, appunti e calcolatrici grafiche o programmabili.**

Cognome	Nome
Corso di Laurea $\boxed{VIT}$ $\boxed{STAL}$	Matricola
Vecchio ordinamento $\boxed{SI}$ $\boxed{NO}$	n. fogli allegati

1 Se $\lim_{x\to x_0} f(x) = 1$ e $\lim_{x\to x_0} g(x) = -\infty$, allora $\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)}$ è

A $-\infty$

B $+\infty$

C 0

D non ci sono elementi sufficienti per rispondere

2 Se f è una funzione derivabile due volte in $]a, b[$ e vale $f'(x) > 0$ e $f''(x) > 0$ in $]a, b[$, allora

A f è decrescente e concava in $]a, b[$

B f è crescente e convessa in $]a, b[$

C f è decrescente e convessa in $]a, b[$

D f è crescente e concava in $]a, b[$

3 L'equazione differenziale $y' = 3t^3 y - \cos 3t^2$ è

A un'equazione lineare del primo ordine

B un'equazione lineare del secondo ordine

C un'equazione non lineare del primo ordine

D un'equazione non lineare del secondo ordine

4 Il grafico della funzione $f(x) = 5x - 1 + x^3$ rappresenta

A una retta

B una parabola

C un'iperbole

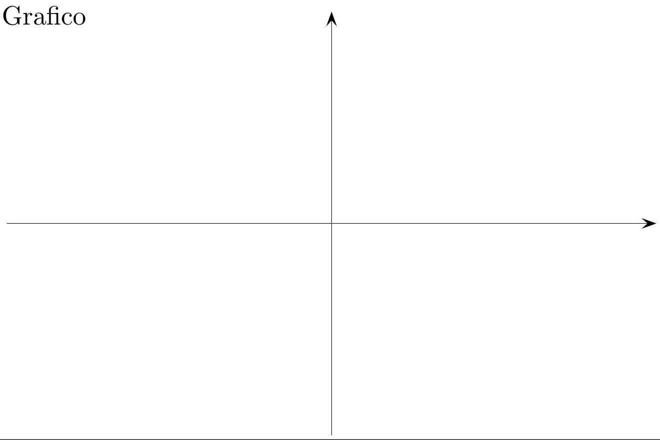
D nessuna delle precedenti

5 Per la funzione $f(x) = \log_{2/7} x$, scrivere il dominio $\mathcal{D}$, l'immagine $\mathcal{I}$, e rappresentare qualitativamente il grafico.

$\mathcal{D} =$

$\mathcal{I} =$

Grafico



6 Per definizione, una primitiva di una funzione $f(x)$ in $[a,b]$ è:

7 Enunciare il teorema dei punti critici.

8 Rappresentare il grafico di una funzione g che verifichi contemporaneamente le seguenti proprietà:

$$\lim_{x\to-\infty} g(x) = 2 \qquad \lim_{x\to1^-} g(x) = -\infty \qquad \lim_{x\to1^+} g(x) = -1 \qquad \lim_{x\to+\infty} g(x) = -\infty$$

9 Data la funzione

$$g(x) = \frac{x+2}{(2x+3)^2}$$

a) determinare il dominio $\mathcal{D}$, b) studiare il segno di g; c) calcolare i limiti agli estremi del dominio; d) determinare gli intervalli in cui la funzione è crescente, quelli in cui è decrescente, e gli eventuali punti di massimo/minimo relativo; e) determinare gli intervalli in cui la funzione è convessa e quelli in cui è concava; f) disegnare un grafico approssimativo di g.

10 Dato il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' = \dfrac{2^y(3t^2-1)}{t} \\ y(1) = 0 \end{cases}$$

a) dire se la funzione $y(t) = \log_2(3-2t)$ è soluzione del problema;

b) determinare una soluzione del problema nel caso in cui non lo sia la funzione di cui al punto precedente.

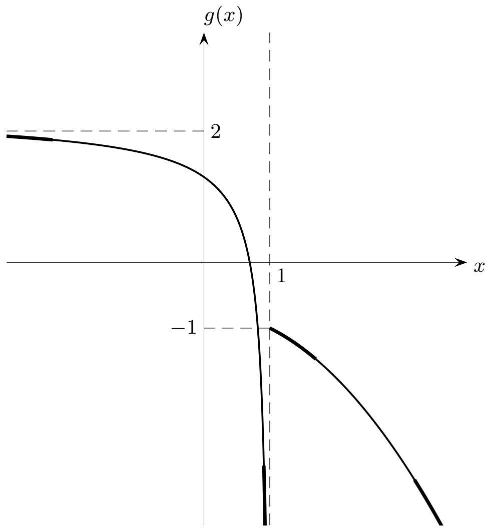
11 Calcolare i seguenti integrali

$$\int \left(\frac{4}{3\cos^2 x} + \frac{2\sqrt{x}-x^2}{3x\sqrt{x}}\right) dx, \qquad \int_0^{1/2} \frac{5x-1}{\sqrt{1-x^2}}\, dx.$$

IMPORTANTE! Risolvere solamente uno tra 10-b) e 11.

Soluzioni dei quesiti dell'esame del 15 settembre 2011

$\boxed{1}$ C; $\boxed{2}$ B; $\boxed{3}$ A; $\boxed{4}$ D; $\boxed{5}$-$\boxed{6}$-$\boxed{7}$ consultare il libro di testo; $\boxed{8}$ in neretto si evidenziano le informazioni date dai limiti. Il grafico della funzione è quindi completato a piacere (linea sottile), ad esempio:



$\boxed{9}$ a) Il dominio è costituito dagli x tali che $2x + 3 \neq 0$ cioè $\mathcal{D} = \mathbb{R} \setminus \{-3/2\}$. La funzione (razionale) è ivi continua e derivabile.

b) Poiché il denominatore è sempre positivo nel dominio, la funzione è positiva se e solo se $x + 2 > 0$ cioè $x > -2$. Si annulla in $x = -2$.

c) Ha senso andare a studiare i limiti a $\pm\infty$ e in $-3/2$. Si ha

$$\lim_{x\to -3/2} g(x) = \left[\frac{1/2}{0^+}\right] = +\infty, \qquad \lim_{x\to\pm\infty} g(x) = \lim_{x\to\pm\infty}\left(\frac{1}{x}\cdot\frac{1+2/x}{(2+3/x)^2}\right) = \left[0\cdot\frac{1}{4}\right] = 0,$$

quindi la funzione ammette l'asintoto orizzontale $y = 0$ a $\pm\infty$ e l'asintoto verticale $x = -3/2$.

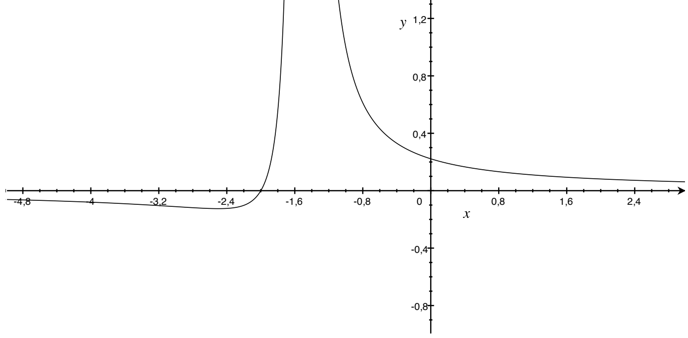
d) La derivata prima è

$$g'(x) = \frac{1\cdot(2x+3)^2 - (x+2)2(2x+3)2}{(2x+3)^4} = \frac{(2x+3)-(x+2)4}{(2x+3)^3} = \frac{-(2x+5)}{(2x+3)^3}.$$

Il numeratore è ≥ 0 se e solo se $2x + 5 \leq 0$ ovvero se $x \leq -5/2$, il denominatore è positivo se $(2x + 3)^3 > 0$ ovvero $2x + 3 > 0$ cioè $x > -3/2$. Si ottiene dunque

$$g'(x)\begin{cases} < 0, & \text{se } x \in]-\infty, -5/2[\cup]-3/2, +\infty[, \\ = 0, & \text{se } x = -5/2, \\ > 0, & \text{se } x \in]-5/2, -3/2[, \end{cases}$$

perciò la funzione è decrescente in $]-\infty, -5/2[$ e in $]-3/2, +\infty[$, mentre è crescente in $]-5/2, -3/2[$. In $x = -5/2$ ammette un minimo assoluto.



e) La derivata seconda è

$$g''(x) = -\frac{2(2x+3)^3 - (2x+5)3(2x+3)^2 2}{(2x+3)^6} = -\frac{2(2x+3) - (2x+5)6}{(2x+3)^4} = \frac{8(x+3)}{(2x+3)^4}.$$

La derivata seconda è ≥ 0 se e solo se $x+3 \geq 0$ cioè se $x \geq -3$, quindi

$$g''(x) \begin{cases} < 0, & \text{se } x \in]-\infty, -3[, \\ = 0, & \text{se } x = -3, \\ > 0, & \text{se } x \in]-3, -3/2[\cup]-3/2, +\infty[, \end{cases}$$

perciò la funzione è concava in $]-\infty, -3[$, mentre è convessa in $]-3, -3/2[$ e in $]-3/2, +\infty[$. In $x = -3$ ammette un punto di flesso.

10 a) Si ha $y'(t) = \frac{\log_2 e}{3-2t}(-2)$ e sostituendo si ottiene l'equazione

$$\frac{-2\log_2 e}{3-2t} = \frac{2^{\log_2(3-2t)}(3t^2-1)}{t} = \frac{(3-2t)(3t^2-1)}{t}$$

che non è identicamente soddisfatta (ad esempio, per $t = 1$ si ha $-2\log_2 e \neq 2$). La funzione non è dunque soluzione. La funzione soddisfa invece la seconda condizione, essendo $y(1) = 0$.

b) Scrivendo $y' = \frac{dy}{dt}$ e utilizzando il metodo di separazione delle variabili si ha

$$\frac{1}{2^y}\, dy = \frac{3t^2-1}{t}\, dt$$

e integrando (utilizzando le tabelle)

$$\int 2^{-y}\, dy = \int \Big(3t - \frac{1}{t}\Big)\, dt \qquad \Longrightarrow \qquad -2^{-y} = \frac{3t^2}{2} - \ln|t| + c,$$

dove c è la generica costante d'integrazione. Si osservi che essendo $t_0 = 1$ si può supporre che $t > 0$ dunque $|t| = t$. Si ottiene quindi

$$2^{-y} = -\frac{3t^2}{2} + \ln|t| - c \qquad \Longleftrightarrow \qquad y = -\log_2\Big(\ln t - \frac{3t^2}{2} - c\Big).$$

Imponendo la condizione $y(1) = 0$ (nella prima delle due equazioni qui sopra) si ha

$$1 = -\frac{3}{2} - c,$$

da cui si ricava $c = -5/2$. La soluzione è quindi

$$y(t) = -\log_2\Big(\frac{5}{2} + \ln t - \frac{3t^2}{2}\Big).$$

Alternativamente, si poteva utilizzare direttamente la formula risolutiva per le equazioni a variabili separabili (insieme alla formula fondamentale del calcolo integrale)

$$\int_0^y 2^{-z}\, dz = \int_1^t \Big(3s - \frac{1}{s}\Big)\, ds \quad \Longrightarrow \quad \big[-2^{-z}\big]_0^y = \Big[\frac{3s^2}{2} - \ln s\Big]_1^t$$
$$\Longrightarrow \quad 1 - 2^{-y} = \frac{3t^2}{2} - \ln t - \frac{3}{2}$$

che risolta rispetto a y fornisce la soluzione cercata.

11 Dalla prima tabella si ottiene

$$\int \Big(\frac{4}{3\cos^2 x} + \frac{2\sqrt{x} - x^2}{3x\sqrt{x}}\Big)\, dx = \frac{4}{3}\int \frac{1}{\cos^2 x}\, dx + \frac{2}{3}\int \frac{1}{x}\, dx + \frac{2}{3}\int x^{1/2}\, dx$$
$$= \frac{4}{3}\operatorname{tg} x + \frac{2}{3}\ln|x| + \frac{4}{9}x^{3/2} + c,$$

con c costante arbitraria, mentre dalla seconda tabella si ha

$$\int_0^{1/2} \frac{5x-1}{\sqrt{1-x^2}}\, dx = -\frac{5}{2}\int_0^{1/2} \frac{-2x}{\sqrt{1-x^2}}\, dx - \int_0^{1/2} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\, dx$$
$$= \Big[-5\sqrt{1-x^2} - \operatorname{arcsen} x\Big]_0^{1/2} = -5\sqrt{1-(1/2)^2} + 5 - \operatorname{arcsen}\frac{1}{2} = \frac{5}{2}(2-\sqrt{3}) - \frac{\pi}{6}.$$