

Corso di Laurea Specialistica in Matematica

Programma del Corso di Analisi Matematica 8/9 - seconda parte

Docente: Paolo Baiti

Preliminari. Le funzioni a variazione limitata di una variabile reale: definizione e proprietà principali. Approssimazione di funzioni a variazione limitata con funzioni costanti a tratti nelle norme L^1 e L^∞ . Il teorema di compattezza di Helly. Cenni alla teoria delle distribuzioni. **Leggi di conservazione scalari.** Equazioni e sistemi strettamente iperbolici di leggi di conservazione unidimensionali. Alcuni esempi e motivazioni dalla fisica: l'equazione del traffico, le equazioni di Eulero, il p -sistema, l'equazione di Burger non viscosa. Cenni al metodo delle caratteristiche per equazioni differenziali alle derivate parziali non lineari del primo ordine. Soluzioni classiche e il fenomeno della catastrofe del gradiente. Il concetto di soluzione debole e relazioni con le soluzioni classiche. Le condizioni di Rankine-Hugoniot. Teorema di caratterizzazione per soluzioni deboli C^1 -a pezzi. Non unicità delle soluzioni deboli del problema di Cauchy per leggi di conservazione scalare. Entropie e flussi d'entropia. Varie definizioni del concetto di soluzione debole entropica e loro relazioni. La condizione di stabilità di Lax. Teorema di caratterizzazione per soluzioni deboli entropiche e C^1 -a pezzi. Il teorema di Kruzkov sull'unicità delle soluzioni deboli entropiche e limitate. Il problema di Riemann: il caso del flusso convesso e del flusso affine a tratti. Il metodo di wave-front tracking. Teorema di esistenza di soluzioni deboli entropiche per il problema di Cauchy per leggi di conservazione scalari con dati iniziali a variazione limitata.

English version.

Preliminaries. Bounded variation functions of one real variable: definition and first properties. Approximation of bounded variation functions with piecewise constant functions in L^1 or L^∞ . Helly's compactness theorem. An outline of the theory of distributions.

Scalar conservation laws. Equations and systems of strictly hyperbolic conservation laws. Some example from physics: traffic models, Euler equations, the p -system, non viscous Burger's equation. An outline of the theory of characteristics for first order non linear partial differential equations. Classical solutions and the gradient-catastrophe. Weak solutions for scalar conservation laws. The Rankine-Hugoniot conditions. Characterization of piecewise smooth weak solutions. Non uniqueness of weak solutions for the Cauchy problem associated to a scalar conservation law. Entropies and entropy fluxes. Some definitions of entropy solutions. Lax stability condition. Characterization of piecewise smooth entropy solutions. Kruzkov's uniqueness theorem for bounded entropy solutions for the Cauchy problem associated to a scalar conservation law. The Riemann problem: the case of a strictly convex or piecewise linear flux. The wave-front tracking method. Existence of entropy solutions for the Cauchy problem associated to a scalar conservation law with bounded variation initial data.